سلسلۂ نصاباتِ علمیۂ جامعۂ عثمانیہ

احصا کا ابتدائی رسالہ

حصۂ دوم

مع توضیحات از علم ہندسہ، علم حیل، و طبیعیات

مصنفۂ

جارج، اے گبسن ایم۔اے۔ ایل۔ایل ڈی۔ ایف، آر ایس، ای

جس کا

قاضی محمد حسین صاحب ایم۔اے

پروفیسر کلیہ جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی نے اردو میں ترجمہ کیا

سنہ ۱۳۴۶ھ م سنہ ۱۳۳۷ف م سنہ ۱۹۲۸ع

احصا کے ابتدائی رسالہ مصنفۂ گبسن کا ترجمہ اردو میں حسب منظوری مجلس ریاضی و سائنس بی۔ اے کی جماعتوں کے لئے کیا گیا ہے۔ مبتدیوں کے لئے انگریزی زبان میں یہ مفید کتاب ہے، احصا کے اطلاق کے متعلق طبیعی، حیلی وہندسی مسائل کی کثیر تعداد اس میں موجود ہے۔ ترجمہ تحت لفظی ہے کوئی ترمیم اصل پر نہیں کی گئی۔ کتاب کی ضخامت کی وجہ سے اس کو دو حصوں میں تقسیم کردیا گیا ہے، ورنہ مضمون بالکل مسلسل ہے، جہاں تکمل کی باضابطہ بحث شروع ہوتی ہے، وہاں سے حصۂ دوم کی ابتدا کی گئی ہے۔ اس کتاب میں تفرق اور تکمل میں کوئی خط فاصل نہیں پیدا کیا گیا اور نہ ہی ہونا چاہئے، ایک نقطہ نظر سے تکمل تفرق کا الٹ ہے، اس لئے جہاں معیاری ضابطے تفرق کے حاصل کئے جاتے ہیں وہاں تکمل کی معیاری صورتیں بھی پیدا ہوتی ہیں، ٹھیک اس موقع پر طالب علم کو ان دونوں اعمال سے تماس پیدا کرلینا چاہئے۔

مجوزہ ترقیم واصطلاحات کی فہرست اس کتاب کے ساتھ منسلک ہے، احصا کی علامات ورموز اساسی اہمیت رکھتی ہیں اور کثرت سے اعلیٰ ریاضی اور سائنس کے ہر شعبہ میں استعمال ہوتی ہیں، اس لئے ترقیم و علامات کا مناسب انتخاب اور انکے لحاظ سے پوری یکسانیت ریاضی اور سائنس کی تمام شاخوں میں ضروری ہے۔ اس کتاب کے مطبع میں جانے کے بعد سائنس ترقیم کمیٹی جامعہ عثمانیہ نے

انگریزی و یونانی حروف کے لئے مماثل عربی حروف اختیار کئے ہیں جن کے ساتھ مطابقت آئندہ سے سائنس کے تمام شعبوں میں لازمی ہوگی، ان کی فہرست حوالہ کے طور پر یہاں دیجاتی ہے، براہ کرم اس کتاب کی تفصیلی ترقیم کو ان حروف کی مطابقت سے پڑھا جائے۔

مترجم

مفرد حروف انگریزی و یونانی کے مماثل مجوزہ حروف ۔

A	B	C	D	E	F	G	H
ا	ب	ج	د	ع	ف	گ	ح
I	J	K	L	M	N	O	P
آ	ژ	ک	ل	م	ن	ط	پ
Q	R	S	T	U	V	W	X
ق	ر	س	ت	ء	و	ھ	لا
Y	Z						
ما	ے						

انگریزی کے بڑے (Capital) حروف بخط عربی لکھے جائینگے اور چھوٹے حروف بخط فارسی ۔ نیز بڑے حروف جلی لکھے جائیں گے اور ان کے لئے پیمانہ بھی بڑا ہوگا۔

a	b	c	d ....
ا	ب	ج	د ......
A′	B′	C′	D′..........
اَ	بَ	جَ	دَ ......
A_1	B_1	C_1	D_1 ....
ا۱	ب۱	ج۱	د۱ ....

α	β	γ	δ	ϵ	ζ	η	θ
عہ	بہ	جہ	ضہ	صہ	شہ	یہ	طہ
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	o	π
حہ	کہ	لہ	مہ	نہ	ظہ	بھ	π
ρ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω
ر، غہ	ثہ	ٹہ	چہ	فہ	خہ	پہ	سہ

یونانی بڑے حروف کے لئے آخر میں ھ کی بجائے ا لکھا جائے گا
جیسے عا، با، جا، ....

گذشتہ چند سالوں میں علمی سائنس کی تمام شاخوں میں بےحد ترقی ہوئی ہے۔ جس کی وجہ سے طالب علم کے اوقات پر بوجھ بہت بڑھ گیا ہے، اس لئے بعض لوگوں کا خیال ہے کہ ریاضی کتب نصاب کی نوعیت میں تبدیلی کی ضرورت ہے۔ اس لحاظ سے کئی کتب ریاضی شائع ہوئی ہیں جو طلبہ کی خاص خاص جماعتوں کے لئے موزوں کی گئی ہیں، ان میں صرف اتنی اور اس قسم کی ریاضی مندرج ہوتی ہے جو صرف ان طلبہ کی اغراض کو پورا کرے۔

اس تبدیلی کے حق میں جو دلائل اکثر بیان کئے جاتے ہیں ان میں سے بعض کے ساتھ ہمیں دلی ہمدردی ہے۔ لیکن یہ ہمیشہ سے درست ہے اور آج بھی درست ہے کہ ریاضی سیکھنے کے لئے کوئی شاہ راہ نہیں ہے اور بغیر جانسوز کوشش کے اس علم کی کوئی مفید کار تحصیل نہیں ہو سکتی۔

بعض اوقات یہ کہا جاتا ہے کہ اگر طالب علم سادہ قوتوں، قوت نمائی اور لوگارثمی تفاعلوں اور شاید جیب اور جیب التمام کے مشتقوں اور تکملوں کے ساتھ پوری واقفیت رکھتا ہو تو فن انجنیری کے لئے علم احصا کی اسقدر بنیاد کافی ہے۔ اس بیان میں سچائی کی بڑی مقدار موجود ہے، تاہم یاد رہے کہ اگر محض نتائج کے اقتباس اور استعمال کی حد سے زیادہ استعداد مطلوب ہو تو یہ ان چند اسباق سے حاصل نہیں ہو سکتی جو بالعموم ابتدائی اصولوں کی تشریح کے لئے کافی خیال کئے جاتے ہیں۔

یہ شائد ممکن ہے کہ چند سبقوں میں احصا کے خاص نتائج کی کافی مقدار بیان کردیجا سکے اور ان کی توضیح بھی کر دیجائے اور ان کی مدد سے طالب علم حیلی اور طبیعی مسائل کی ابتدائی بحث کو ایک حد تک بخوبی سمجھ سکے' لیکن احصا کا اسقدر سطحی کورس اگرچہ فائدہ سے خالی نہیں مگر ہر دو مقدار اور نوعیت کے لحاظ سے یہ اس قسم کے علمی مضامین کے برجستہ مطالعہ کے لئے مطلق کافی نہیں ہے جیسے تبادل برقی رو کا نظریہ' حرحرکیات' حرکت سیالات' لچک کا نظریہ وغیرہ وغیرہ اور جس طالب علم کی بنیاد محض مندرجہ بالا کورس پر رکھی گئی ہے اُس کے لئے طبیعیات اور کیمیا کے جدید معلومات اور مضامین تک رسائی محال ہوگی۔ علاوہ اس کے ہر دوراندیش تعلیمی اسکیم کا یہ مقصد ہونا چاہئے کہ طالب علم اپنے مذاق کے خاص فن میں بذات خود تحقیق و تجسس کرنے کے قابل ہوجائے' جدید سائنس کے نہایت پیچیدہ مسائل اور اسقدر تفصیل جو اس کے ساتھ مخصوص ہے اُن سب کی بنا پر یہ کچھ لازم نہیں آتا کہ ریاضی کی تعلیم میں بخل سے کام نہ لیا جائے۔ اس امر کے مدنظر کہ طالب علم کو بالآخر کسی ایک خاص فن میں مہارت حاصل کرنا ہے یہ اور بھی ضروری معلوم ہوتا ہے کہ ابتدائی منزلوں میں اُس کی ریاضی کی تعلیم بالکل وہی ہو خواہ بعد میں وہ خالص ریاضی کی تحصیل میں اپنا پورا وقت لگانا چاہئے یا سائنس کی زیادہ علمی شاخوں میں۔ اور یہ خاص طور پر ضروری ہے کیونکہ تخیل کے اعمال جو کسی حیلی' طبیعی یا کیمیاوی منظر کے سنجیدہ مطالعہ میں شامل ہوتے ہیں وہ اُن اعمال کے ساتھ بہت کچھ لگاؤ اور اشتراک رکھتے ہیں جو احصا (کیلکولس) کی تعلیم میں منکشف ہوتے ہیں۔

ابتدا میں احصا پر جو کتابیں لکھی گئیں جیسے **مکلارن** اور **سمسن** کے رسالے وہ صرف خالص ریاضی دانوں کے لئے ہی تصنیف نہیں کی گئی تھیں' بلکہ اکثر ان کی توضیحات طبیعی فلسفہ سے حاصل کی گئی تھیں' بعد میں شاید طبیعیات کی وسعت کے بڑھ جانے سے ایسی کتابوں میں احصا کا طبیعی استعمال کم ہوتا گیا اور احصا کی کتابیں ایک حد تک اعلیٰ ہندسہ کے رسالے بن گئے۔ علم ریاضی کی موجودہ صورت حال یہ ہے کہ احصا کی کتابوں کو نہ اعلیٰ ہندسہ کی کتب نصاب بن جانا چاہیئے اور نہ ہی ان سکے لئے طبیعیات' انجینیرنگ یا کیمیا کی کتابیں بن جانا درست ہے۔

احصا کے ابتدائی رسالہ سے جو معقول امید کیجا سکتی ہے وہ یہ ہے کہ یہ طالب علم کو احصا کے اصولوں اور اعمال کو آسانی کے ساتھ اپنے ایسے مطالبات میں لگانیکے لئے تیار کرے جن میں احصا عام طور پر استعمال ہوتا ہے۔ اس غرض کو پورا کرنیکے لئے احصا کے مضمون کی توضیح علوم ہندسہ، حیل اور طبیعیات سے ہونی چاہئے جبکہ ان فنون کی ذاتی اور خصوصی مشکلات کو خاص کتب نصاب میں تفصیلی بحث کے لئے جگہ دیجائے اور یہ توضیحات اپنا اصل مقصد صرف عام اصولوں پر روشنی ڈالنے کا پورا کریں اور ذہنی مشکلات کو رفع کرنے کی بجائے انہیں اور پیدا نہ کردیں۔ علم کیمیا کے متعلق یہ کہا جا سکتا ہے کہ احصا کے پختہ علم کی اس میں خاص ضرورت ہے کیونکہ کیمیائی تحقیقات میں ایک سے زیادہ متغیروں کے تفاعلوں کے خواص زیادہ تر استعمال ہوتے ہیں۔

حال میں (Van Laar) کی کتاب [Leherbuch der Mathematischen Chemie] اس قسم کی تصنیفات کا پیش خیمہ ہے جن سے قطع نظر نہیں ہوسکتی۔

اس میں مذکورہ بالا مقاصد کو حاصل کرنے کی کوشش کی گئی ہے، طالب علم کی ریاضی قابلیت کے متعلق صرف اتنا فرض کرلیا گیا ہے کہ وہ اس کتاب کے مطالعہ سے پیشتر ہندسہ کے ان مقالوں سے واقف ہے جو اکثر پڑھے جاتے ہیں۔ نیز اسکی استعداد جبر و مقابلہ میں مسئلہ ثنائی تک ہے اور مستوی علم مثلث میں مسئلہ جمع تک۔ ملتف (خیالی) اعداد کو اس کتاب میں استعمال نہیں کیا گیا اور نہ ہی لاانتناہی سلسلوں کے علم کو پہلے سے تسلیم کرلیا گیا ہے۔ جدید ریاضی کی باریکیوں کو دیدہ دانستہ جگہ نہیں دی گئی کیونکہ نہ تو وہ مبتدی کے لئے مفید ہیں اور نہ ہی اُس کی سمجھ میں آسکتی ہیں ہندسی تخیلات کیطرف متواتر توجہ دلائی گئی ہے اور ساتھ ہی فن کی طبیعی پیدائش کو پیش نظر رکھا گیا ہے۔

شروع کے ابواب میں بہت سا سواد ہے جو نفس مضمون سے تعلق نہیں رکھتا لیکن ترسیموں اور اکائیوں کا نظریہ اسقدر اہمیت رکھتا ہے اور اسقدر نامکمل طور پر پیش کیا جاتا ہے کہ اس کا تذکرہ اس کتاب میں ضروری خیال کیا گیا۔ ہندسہ تحلیلی کے اصولوں کو جہاں تک وہ احصا کے استعمال اور اس کے بنیادی اصولوں کی

تشریح کے لئے حقیقی طور پر کارآمد ہو سکتے ہیں میں نے بہت تامل کے ساتھ اس
کتاب کے متن میں شریک کیا۔ ہندسہ میں احصا کے کثیر استعمال سے اگر قطع نظر
کی جائے تو احصا کی تعلیم میں محددوں کے ہندسہ کے وسیع علم کی چنداں ضرورت
نہیں معلوم ہوتی۔ مجھے امید ہے کہ اس ہندسہ کے ابتدائی اصولوں کی کافی تشریح
کردی گئی ہے جو بہت سے طلبہ کی عملی ضروریات کو پورا کرے گی، اعلیٰ مستوی
منحنیات اور سطحوں کے نظریہ کی بحث کو میں نے اس کتاب میں جگہ نہیں دی
کیونکہ میری رائے میں یہ بحث ابتدائی رسالہ کے موزوں نہیں۔

دوسری جدت اس کتاب میں مساواتوں کے نظریہ کا باب ہے، اس جدت
کی صرف اس لئے ضرورت نہیں محسوس ہوئی کہ اس سے احصا کی علم حساب سے
توضیح ہوتی ہے بلکہ اس لئے بھی کہ عملی نقطۂ نظر سے یہ مضمون بڑی اہمیت رکھتا ہے
اور ماورائی مساواتوں کی بحث پر بہت کم ابتدائی کتابیں موجود ہیں۔

مضمون کی اس عام ترتیب اور ارتقا کو میں نے کئی سالوں سے اپنی جماعتوں
کی تدریس میں استعمال کیا ہے، شرح اور انتہا کے تخیلات کی بحث قدرے طوالانی
ہے لیکن حیلی یا طبیعی سوالات میں احصا کے استعمال کی خاص مشکلات کا مقابلہ
کرنے کے لئے تجربہ کی بنا پر میں نے اس طرز عمل کو نہایت سود مند پایا ہے، اگر یہ تخیلات
پورے طور پر سمجھ میں آجائیں تو بعد کی ترقی زیادہ سریع اور یقینی ہوتی ہے۔ تفرق اور
تکمل کے درمیان کوئی خاص خط فاصل نہیں کھینچا گیا اور تکمل کے کئی ضروری نتائج
اس شاخ کا تفصیلی مطالعہ شروع کرنے سے پہلے حاصل کئے گئے ہیں۔ دسویں باب
میں رقبوں اور مشتق تکملی منحنیات کی جو بحث درج کی گئی ہے اس سے محدود تکملہ کی ہندسی
تعریف کے لئے ایک حد تک تسلی بخش بنیاد پیدا کرنا ہی مقصود نہیں ہے بلکہ ترسیمی تکمل کے
ایک طریقہ کی توضیح کرنا بھی ہے جو انجنیروں کے لئے اہمیت رکھتا ہے اور خالص نظری
بحث میں بھی فائدہ سے خالی نہیں۔

حال کی کتب نصاب کی طرح ٹیلر کے مسئلہ کی بحث بہت بعد میں لائی گئی ہے،
ابتدائی منزلوں میں اوسط قیمت کا مسئلہ کافی ہے۔ سلسلوں کے استدقاق اور
تسلسل کے متعلق ایک حد تک بسیط مسائل اس کتاب کے آخر کی طرف بحث میں

لائے گئے ہیں۔ تاہم مضمون کی بحث ایسی ہے کہ جو اساتذہ معمولی ترتیب کو زیادہ پسند کریں وہ فوراً مسئلہ اوسط قیمت سے لامتناہی سلسلوں اور ٹیلر کے مسئلہ [ابواب پنجم و ششم حصۂ دوم] کا مطالعہ کر سکتے ہیں۔

ایک سے زیادہ متغیروں کے تفاعل اس قدر تفصیل سے بحث میں نہیں لائے گئے جیسے ایک متغیر کے تفاعل۔ تاہم ان کے نظریہ کے وہ حصے منتخب کر کے پیش کرنے کی کوشش کی گئی ہے جو طبیعی عملیات میں خاص اہمیت رکھتے ہیں۔ کتاب کے آخیر میں ایک چھوٹا سا باب معمولی تفرقی مساواتوں پر ہے جن سے مساواتوں کے ایسے نمونوں کی توضیح ہوتی ہے جو اکثر علم حرکت، طبیعیات حیلی اور برقی انجنیرنگ میں پائے جاتے ہیں۔

اکثر حصوں کے ساتھ سادہ مشقیں درج ہیں، مثالوں کے ان مستند مجموعوں میں کئی مسئلے اور نتائج ایسے ملینگے جن کے لئے کتاب کے متن میں جگہ نہیں مل سکتی تھی لیکن اہمیت کے لحاظ سے ان کا بالتصریح بیان کیا جانا ضروری تھا۔ طالب علم کی حوصلہ افزائی کے لئے کہ وہ اپنے تئیں اس مشق و محنت میں ڈالے جو احصا کے استعمال میں سہولت و اعتماد حاصل کرنے کے لئے قطعی طور پر لازمی ہے میں نے زیادہ ضروری امثلہ کے حل کے متعلق بلا تکلف اشارے درج کئے ہیں۔

اس کتاب کی تیاری میں کئی رسالوں کے مطالعہ کرنے کا موقع ہوا اور جہاں کہیں جان بوجھکر کوئی طرز تشریح اختیار کی گئی ہے جو کسی خاص مصنف کے ساتھ مخصوص ہے اس کا احتیاط سے مناسب اعتراف کر دیا گیا ہے، لیکن جب کوئی شخص سالہا سال سے ایک مضمون پڑھا رہا ہو اس کے لئے اپنے علم کے تمام ماخذوں کا شناخت کر لینا دشوار ہے، پس ممکن ہے کہ میں نے زیادہ وسیع طور پر اقتباس کیا ہو جس کا مجھے علم نہ ہو۔ . . . .

. . . .

. . . .

جارج، اے، گبسن
گلاسگو ستمبر سنہ ۱۹۰۱ع

دوسرے ایڈیشن کا دیباچہ

اس ایڈیشن کے لئے کوئی خاص تبدیلیاں پہلے ایڈیشن پر نہیں کی گئیں، تاہم اس میں دو بابوں کا اس غرض سے اضافہ کر دیا گیا ہے کہ یہ کتاب، ریاضی طبعیات کے طلبہ کے لئے زیادہ مفید بن جائے۔ علامت تکمل کے اندر اعمال کی بحث میں میں نے (M Charles J. de la Vallée Poussin) کا طریقہ اختیار کیا ہے جو اُس نے اپنے مکتوب (Etude des intergrals a limites infinies) میں درج کیا ہے، میری رائے میں اس طریقہ کے اندر سادگی اور صحت نمایاں حد تک موجود ہیں۔ یہ اُمید کیجاتی ہے کہ فوریر کے سلسلوں کا باب اس مضمون کے لئے کافی تمہید ثابت ہوگا لیکن اس امر کی کافی زور سے سفارش نہیں کیجاسکتی کہ طالب علم خود اُن دلچسپ صفحات کا مطالعہ کرے اور ان پر پورا عبور حاصل کرے جن میں خود فوریر کسی اختیاری تفاعل کو موسیقی سلسلوں سے تعبیر کرنیکے عمل کو تکمیل تک پہنچاتا ہے۔

جارج، اے، گبسن

گلاسگو نومبر ۱۹۰۵ء

پہلے مطالعہ کیلئے ہدایات

مبتدی احصا کے مطالعہ میں ذیل کی ترتیب اختیار کر سکتے ہیں۔
باب اول تا چہارم۔ پنجم دفعات ۴۴ تا ۴۷، ششم، ہفتم دفعہ ۷۶ (مشق ۱۴ سوالات ۱ تا ۴ اور ۱۱ تا ۱۴)، نہم دفعات ۷۴ تا ۷۶، (مشق ۱۶ ا، ۱۶ ب) دفعہ ۷۸ (مشق ۱۷، سوالات ۱ تا ۶) اس کورس میں جبریہ تفاعلوں کے اساسی خواص معہ اِن کے دلچسپ استعمال کے شامل ہیں۔
باب پنجم دفعات ۴۸۔ ۵۰، ہفتم، ہشتم اور باقی حصہ باب نہم، دہم اور باب اول تا سوم، حصہ دوم۔
ابواب ۱ تا ۱۰ پر پورا ملکہ حاصل کر لینے کے بعد ابواب یازدہم، دوازدہم۔ باب چہارم تا ہفتم حصہ دوم کا مطالعہ کیا جائے جیسے ضرورت محسوس ہو۔ جب تکمل کے اعمال میں کچھ استعداد حاصل ہو جائے تو اِس کے بعد فوراً آٹھواں باب، حصہ دوم شروع کر دیا جا سکتا ہے۔

فہرست مضامین

حصۂ دوم

دفعہ	مضمون	صفحہ
	باب اول	
	تکمل	
۱	تکمل ۔ نامحدود اور محدود تکملہ تکمل کا مشتق	۱
۲	معیاری صورتیں	۴
۳	جبریہ اور مثلثی تحویلیں	۷
	مشق ۱	۱۱
۴	متغیر کی تبدیلی	۱۳
۵	متغیر بدلنے کی مثالیں	۱۵
۶	دوسرے درجہ کے تفاعل	۱۸
۷	مثلثی اور زائدی ابدال	۲۱
۸	مثلثی تکمل	۲۲

	مشق ۲	۲۵
۹	تکمل بالحصص	۲۸
۱۰	متواتر تحویل ـ تکملہ $\int^{\frac{ط}{۲}}$ جب^{م} لا جم^{ن} لا ذ لا	۳۱
	مشق ۳	۳۸
۱۱	جزوی کسور	۴۲
۱۲	منطق تفاعلوں کا تکمل	۴۶
۱۳	غیر منطق تفاعل	۴۷
۱۴	عام مشاہدات	۵۰
	مشق ۴	۵۱
	باب دوم	
	محدود تکملے ـ ہندسی سوالات میں ان کا استعمال	
۱۵	محدود تکملہ ـ مسائل	۵۴
۱۶	مربوط تکملے	۵۹
۱۷	لامتناہی حدود ـ لامتناہی تکمل	۶۲
	مشق ۵	۶۶
۱۸	چند معیاری رقبے اور حجم ـ منحنیات کی ترسیم	۷۰
	مشق ۶	
۱۹	بند منحنی کا رقبہ	۸۱

۲۰	رقبہ جو ایک متحرک خط مستقیم اپنی حرکت میں عبور کرتا ہے	۸۶
۲۱	سطح پیما	۸۹
	مشق ۷	۹۰

باب سوم

تکملہ مجموعہ کی انتہا خیال کیا جا سکتا ہے۔ دوہرے تکملے

۲۲	تکملہ ایک مجموعہ کی انتہا ہے	۹۴
۲۳	مثالیں	۹۸
۲۴	تقربات۔ سمسن کا کلیہ	۱۰۰
	مشق ۸	۱۰۵
۲۵	اوسط قیمتیں	۱۰۸
۲۶	دوہرے تکملے	۱۰۹
۲۷	دوہرے تکملوں کی ترقیم۔ قطبی اجزا	۱۱۳
۲۸	جمود کے مرکز	۱۱۹
۲۹	جمود کا معیار اثر	۱۲۳
۳۰	حجم کا قطبی جزو۔ خطی تکملہ اور سطحی تکملہ کی تعریف	۱۲۷
	مشق ۹	۱۳۰
	گاما اور بیٹا تفاعل	۱۳۳

باب چہارم

انحنا۔ لفاف

۳۱	انحنا۔ اساسی ضابطہ	۱۳۸

۳۲	دائرہ انحنا، نصف قطر، مرکز دائرہ انحنا	۱۴۰
۳۳	انحنا کے لئے اور ضابطے - منحنی کی ذاتی مساوات	۱۴۳
	مشق ۱۰	۱۴۹
۳۴	بر پیچ - در پیچ - متوازی منحنی	۱۵۳
۳۵	لفاف	۱۵۷
۳۶	لفاف کی مساوات - مسئلہ تماس	۱۵۸
۳۷	خط تدویر - بر تدویر - در تدویر	۱۶۲
	مشق ۱۱	
	باب پنجم	
	لامتناہی سلسلے	
۳۸	لامتناہی سلسلے - مستدق، متسع، اہتزازی سلسلے	۱۷۴
۳۹	انتہا کا وجود - مسائل	۱۷۷
۴۰	استدقاق پرکھنے کے طریقے - بنیادی جانچ - مقابلہ کی جانچ جانچ کی نسبت - باقی	۱۸۰
۴۱	استدقاق مطلق - قوتی سلسلے	۱۸۵
۴۲	یکساں استدقاق - سلسلوں کا تسلسل	۱۸۹
	مشق ۱۲	۱۹۴
	باب ششم	
	ٹیلر کا مسئلہ	
۴۳	ٹیلر کا مسئلہ - مکلارن کا مسئلہ - باقی	۱۹۸

۴۴	پھیلاؤ کی مثالیں - جب لا جم لا، قوّ (۱+لا)^م، لوگ (۱+لا)	۲۰۳
۴۵	ن ویں مشتق کا محسوب کرنا - مثالیں	۲۰۹
۴۶	سلسلوں کا تفرق اور تکمل	۲۱۲
۴۷	پھیلاؤ - تقربات - سلسلوں کے تکمل کی مثالیں	۲۱۶

مشق ۱۳

باب ہفتم

دو یا زیادہ متغیروں کے تفاعلوں کے لئے ٹیلر کا مسئلہ اشتمال

۴۸	دو یا زیادہ متغیروں کے تفاعلوں کے لئے ٹیلر کا مسئلہ	۲۲۹
۴۹	مثالیں - مماسی مستوی - متجانس تفاعلوں کے متعلق آئلر کے مسئلے	۲۳۴
۵۰	دو یا زیادہ متغیروں کے تفاعل کی اعظم اور اقل قیمتیں	۲۳۶
۵۱	مثالیں - غیر معین اجزائے ضربی	۲۳۹
	مشق ۱۴	۲۴۴
۵۲	غیر معین صورتیں - ابتدائی طریقے	۲۴۶
۵۳	احصا کا طریقہ	۲۴۹
	مشق ۱۵	۲۵۴

باب ہشتم

تفرقی مساواتیں

۵۴	تفرقی مساواتیں - تعریفات - مثالیں	۲۵۸

۵۵	پورا تکملہ	۲۶۰
	مشق ۱۶	۲۶۲
۵۶	رتبہ اول اور درجہ اول کی مساواتیں۔ متغیر جدائی پذیر۔ متجانس مساواتیں خطی مساواتیں۔ ٹھیک مساواتیں	۲۶۴
۵۷	رتبہ اول کی مساواتیں جو درجہ اول کی نہ ہوں۔ کلیروی مساوات۔ نادر حل۔	۲۷۰
۵۸	دوسرے رتبہ کی مساواتیں۔ سادہ رقاص	۲۷۱
۵۹	خطی مساواتیں۔ عام خاصیت	۲۷۳
۶۰	متمم تفاعل	۲۷۴
۶۱	خاص تکملہ	۲۷۷
۶۲	ہمزاد مساواتیں۔ برقی حلقوں کی مثال	۲۸۰
	مشق ۱۷	۲۸۴

باب نہم

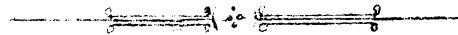
محدود تکملے۔ علامت تکمل کے اندر اعمال

۶۳	تکملہ کا تسلسل	۲۸۹
	غیر واجب تکملہ	۲۹۱
۶۴	لامتناہی حدود	۲۹۱
	مطلق اور مشروط استدقاق	۲۹۳
۶۵	لامتناہی تکمل۔ دوہرے تکملے	۲۹۵
۶۶	دو مشہور تکملے	۲۹۸
۶۷	گاما تفاعل	۳۰۲

۶۸	اوسط قیمت کا دوسرا مسئلہ - یکرنگ تفاعل - ایبل کی لاتساوی	۳۰۴
	مشق ۱۸	۳۰۹
۶۹	علامت تکمل کے اندر اعمال - تفاعل کا یکساں تسلسل	۳۱۲
۷۰	تکملوں کا یکساں استدقاق	۳۱۸
۷۱	تسلسل اور حدود	۳۲۴
۷۲	علامت تکمل کے اندر اعمال - مشہور تکملے	۳۲۶
۷۳	لاانتہا حدود کے لئے تکمل کی ترتیب - یکساں استدقاق بالعموم	۳۳۶
۷۴	دیگر غیر واجب تکملے - مثالیں	۳۴۱
	مشق ۱۹	۳۴۷

باب دہم
فوریر کے سلسلے

۷۵	فوریر کے سلسلے - مثالیں	۳۵۴
۷۶	مسئلہ کا بیان - تفاعل پر قیود	۳۵۷
۷۷	دُہرے سلسلے کا تکملہ	۳۶۰
۷۸	سلسلوں کا جمع کرنا	۳۶۴
۷۹	عدم تسلسل	۳۶۵
۸۰	مبدا اور دور کی تبدیلی	۳۶۶
۸۱	جیب اور جیب التمام کے سلسلے	۳۶۷

۸۲	عام امور کا ذکر۔ فوریر کے سلسلوں کا تکمل اور تفرق	۳۶۹
۸۳	مثالیں	۳۷۰
۸۴	چند معیاری سلسلے	۳۷۲
۸۵	فوریر کا دوسرا تکملہ	۳۷۶
۸۶	آزمایشی تفاعل	۳۸۰
۸۷	حوالے	۳۸۰
	مشق ۲۰	۳۸۱
	ضمیمہ	۳۸۷
	جوابات	۳۹۱

احصا کا ابتدائی رسالہ

حصۂ دوم

باب اول

تکمل

ا۔ تکمل۔ دفعہ ۸۳ حصۂ اول میں تکملی احصا کا اساسی مسئلہ بیان کیا گیا ہے اور وہ یہ ہے
"ایک مسلسل تفاعل فا (لا) معلوم ہے، ایک ایسا تفاعل معلوم کرنا مقصود ہے (۱) جس کا مشتق فا (لا) ہو اور (۲) جو ایک معلومہ قیمت ا اختیار کرے جبکہ لا کو قیمت ا دیجائے۔"

اگر صرف پہلی شرط کی قید ہو تو اس سوال کے بیشمار حل ہونگے، لیکن ہم جانتے ہیں کہ یہ سب حل ایکدوسرے سے صرف بلحاظ ایک مستقل مقدار کے مختلف ہوں گے۔ ایسے کسی ایک حل کو ہم فا (لا) کا نامحدود تکملہ یا تکملی کہینگے اور مذکورہ مستقل تکمل کا مستقل کہلائیگا۔ اس مستقل کو بعض اوقات اختیاری مستقل بھی کہا جائیگا کیونکہ اس کو جو قیمت ہم چاہیں دیسکتے ہیں۔ اگر ف (لا) کوئی ایک تکملہ ہو تو ف (لا) + ج کو ہم عام تکملہ کہینگے جہاں ج اختیاری مستقل ہے۔

مقلوب تفاعلوں کی ترقیم $عف^{ا}_{لا}$ فا (لا) کی بجائے فا (لا) کے

نامحدود تکملہ کو بالعموم علامت

$\int$ فا (لا) فرلا .... (۱)

سے تعبیر کیا جائیگا اور اسے ہم پڑھینگے "فا (لا) کا تکملہ یا تکملی بلحاظ لا کے" یا مختصراً "فا (لا) فرلا کا تکملہ"۔ تفرقی فرلا تکمل کے متغیر یعنی لا کو ظاہر کرتا ہے اور پوری مشترک علامت $\int$ ..... فرلا سے مراد ہے "..... کا تکملہ بلحاظ لا کے"۔
فا (لا) کو متکمل کہا جائیگا۔

دفعہ ۸۲ حصۂ اول میں جو کچھ [عفَ ا فا (لا)]$_{د}^{ب}$ سے تعبیر کیا گیا تھا وہ اب

$\int_{د}^{ب}$ فا (لا) فرلا .... (۲)

سے تعبیر ہوگا اور موخر الذکر کو اس طرح پڑھا جائیگا "فا (لا) فرلا کا تکملہ د سے ب تک"۔ جو تفاعل علامت $\int_{د}^{ب}$ فا (لا) فرلا سے تعبیر ہوتا ہے اُسے ہم محدود تکملہ کہینگے اور د، ب تکملہ کی حدود کہلائینگی: د نچلی حد ہے اور ب اوپر کی۔ واضح ہو کہ یہاں حد سے صرف مراد ہے متغیر کی وہ قیمت جو وقفہ کے ایک سرے پر ہو یعنی سرے پر کی قیمت۔ حد کے کسی اور اصطلاحی مفہوم سے اسے تمیز کیا جائے۔
ہندسی نقطہ نظر سے علامت (۲) اُس رقبہ کو بلحاظ علامت اور مقدار کے تعبیر کرتی ہے جو فا (لا) کی ترسیم کا معین نچلی حد د سے اوپر کی حد ب تک جانے میں عبور کرتا ہے۔ اگر ف (لا)، فا (لا) کا ایک نا محدود تکملہ ہو تو حسب دفعہ ۸۲ حصۂ اول

$\int_{د}^{ب}$ فا (لا) فرلا = [عفَ ا فا (لا)]$_{د}^{ب}$ = ف (ب) - ف (د) .... (۳)

اگر ہم چاہیں تو ف (لا) کی بجائے عام تکملہ ف (لا) + ج استعمال کر سکتے ہیں مگر حاصل نتیجہ دونوں صورتوں میں وہی ہوگا کیونکہ عمل تفریق میں مستقل ج غائب ہو جائیگا۔
ہندسی مفہوم کی بناء پر یا (۳) سے ظاہر ہے کہ

$\int_{ب}^{د}$ فا (لا) فرلا = - $\int_{د}^{ب}$ فا (لا) فرلا = ف (د) - ف (ب) .... (۴)

یعنی حدود د، ب کا باہم تبادلہ ہو سکتا ہے اگر ہم تکملہ کی علامت بدل دیں۔

نیز ہندسی مفہوم سے یا شکل ف (ب) - ف (ا) سے ظاہر ہے کہ محدود تکملہ صرف اپنی حدود کا تفاعل ہے اور متغیر کا تفاعل نہیں ہے۔ پس مج فا (ع) فرع کی بالکل وہی قیمت ہے جو مج فا (لا) فرلا کی۔

شرح کے نقطۂ خیال سے اگر دیکھا جائے تو فا (لا) مشتق ہے ف (لا) کا اس لئے یہ اس شرح کا اندازہ کرتا ہے جس کے موافق کہ ف (لا) بلحاظ لا کے بڑھتا ہے۔ پس اگر لا ، ا سے ب تک بڑھے تو ف (لا) کا کل اضافہ خواہ یہ مثبت ہو یا منفی، ف (ب) - ف (ا) کے مساوی ہوتا ہے۔ اسلئے معلوم ہوا کہ محدود تکملہ (۳) وجہ یا دلیل کے اضافے (ب - ا) کے جواب میں ف (لا) کے کل اضافے کا ناپ ہے جبکہ تفاعل کی شرح تغیر فا (لا) معلوم ہو۔

جس تفاعل کا مشتق فا (لا) ہے اور جو ا کے مساوی ہوتا ہے جبکہ لا ، ا کے مساوی ہو وہ ہے (دفعہ ۸۲، حصۂ اول)

عف$^{-1}$ فا (لا) - [عف$^{-1}$ فا (لا)]$_{ا}$ + ا

اور موجودہ ترقیم کے موافق یہ ہے

مج$^{لا}_{ا}$ فا (لا) فرلا + ا یا مج$^{لا}_{ا}$ فا (ع) فرع + ا ...... (۵)

یہاں اوپر کی حد لا ، وجہ کی وہ خاص قیمت ہے جس کے لئے تفاعل محسوب کیا گیا ہے۔ دفعہ ۸۲ حصۂ اول کی ہندسی تعبیر میں اوپر کی حد لا نقطہ ن کا فصلہ و م ہے، شرح کے نقطہ نظر سے علامت (۵) اس تفاعل کو تعبیر کرتی ہے جو شرح فا (لا) کے حساب سے بدلتا ہے اور جو ا کے مساوی ہوتا ہے جبکہ لا ا کے مساوی ہو۔

محدود تکملوں کا مضمون اگلے باب میں زیادہ تفصیل سے بحث میں آئیگا تاہم جو کچھ اس کے متعلق اس دفعہ میں یا باب دہم حصۂ اول میں دیا گیا ہے وہ اس امر کے لئے کافی ہے کہ طالب علم ترقیموں وغیرہ کے آسان سوالات کو جو اس باب کے آخر میں مشق کے طور پر دئے گئے ہیں آسانی حل کر سکے۔

۲ – معیاری صورتیں - جہاں تک موجودہ بحث کا تعلق ہے تکمل محض عمل تفرق کا الٹ ہے اور کسی تکملہ کو محسوب کرنے کے لئے خواہ یہ محدود ہو یا نا محدود یہ ضروری ہے کہ معلومہ تکملوں کی ایک جدول پہلے سے مرتب کر لی جائے۔ یہ جدول تفرق کے معلومہ نتائج سے جو ہم پہلے حاصل کر چکے ہیں مرتب ہو سکیگی۔ اس لئے سب سے پہلے ہم معیاری صورتوں کی جدول تیار کرینگے۔ اس کے بعد ان تکملوں کو جو جدول میں موجود نہ ہوں ایسی صورتوں میں تحویل کرنے کے طریقے بیان کرینگے جن کے تکملے معیاری صورتوں کی مدد سے معلوم ہو سکیں۔ نا محدود تکملوں کی تمام صورتوں میں اس جانچ کو عمل میں لانا چاہئے کہ تکملہ کا مشتق لازماً مساوی ہو متکمل کے۔

با علامات میں ف (لا) = ∫ فا (لا) فرلا اگر $\frac{\text{فر ف (لا)}}{\text{فرلا}}$ = فا (لا)

پس تکملہ کی تعریف یا تعیین کے لئے حسب ذیل مساوات ہے۔

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left[\int \text{فا (لا) فرلا}\right] = \text{فا (لا)}$$

یعنی اعمال $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ اور ∫ .... فرلا ایک دوسرے کے الٹ ہیں

تفرقوں کے مفہوم کے لحاظ سے فا (لا) فرلا تفرقہ ہے ف (لا) کا جبکہ ف (لا) تکملہ ہو فا (لا) کا۔ ف (لا) کو اکثر اوقات تفرقہ فا (لا) فرلا کا تکملہ کہا جاتا ہے۔ چونکہ

$$\text{فا (لا) فرلا} = \text{فر ف (لا)} = \text{فر}\left[\int \text{فا (لا) فرلا}\right]$$

پس عامل فر اور ∫ ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔

جدول ذیل میں اساسی، معیاری صورتیں دی گئی ہیں، باقی مشہور صورتیں بعد میں دی جائینگی۔ بعض معیاری صورتوں کو دو شکلوں میں دکھایا گیا ہے، دلیل اکثر اوقات اس خطی شکل ا لا + ب میں واقع ہوتی ہے، اس لئے طالب علم کو ابتدا سے ہی اسکے متناظر تکملہ سے مانوس ہو جانا چاہئے۔ ان سب نتائج کی جانچ عمل تفرق سے کر لینی چاہئے۔

(۱)　اگر ن ≠ -۱ تو

$$\int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{فرلا} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}+\text{۱}}}{\text{ن}+\text{۱}}\,،\qquad \int (\text{الا}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{فرلا} = \frac{(\text{الا}+\text{ب})^{\text{ن}+\text{۱}}}{(\text{ن}+\text{۱})\,\text{ا}}$$

(۲)　اگر ن = -۱ تو

$$\int \frac{\text{۱}}{\text{لا}}\,\text{فرلا} = \text{لوک لا}\,،\qquad \int \frac{\text{۱}}{\text{الا}+\text{ب}}\,\text{فرلا} = \frac{\text{۱}}{\text{ا}}\,\text{لوک}\,(\text{الا}+\text{ب})$$

(۳)

$$\int \text{و}^{\text{لا}}\,\text{فرلا} = \text{و}^{\text{لا}}\,،\qquad \int \text{و}^{\text{الا}}\,\text{فرلا} = \frac{\text{۱}}{\text{ا}}\,\text{و}^{\text{الا}}$$

(۴)

$$\int \text{جب لا فرلا} = -\text{جم لا}\,،\qquad \int \text{جب}\,(\text{الا}+\text{ب})\,\text{فرلا} = -\frac{\text{۱}}{\text{ا}}\,\text{جم}\,(\text{الا}+\text{ب})$$

(۵)

$$\int \text{جم لا فرلا} = \text{جب لا}\,،\qquad \int \text{جم}\,(\text{الا}+\text{ب})\,\text{فرلا} = \frac{\text{۱}}{\text{ا}}\,\text{جب}\,(\text{الا}+\text{ب})$$

(۶)

$$\int \text{قط}^{\text{۲}}\,\text{لا فرلا} = \text{مس لا}\,،\qquad \int \text{قط}^{\text{۲}}\,(\text{الا}+\text{ب})\,\text{فرلا} = \frac{\text{۱}}{\text{ا}}\,\text{مس}\,(\text{الا}+\text{ب})$$

(۷)

$$\int \text{قم}^{\text{۲}}\,\text{لا فرلا} = -\text{مم لا}\,،\qquad \int \text{قم}^{\text{۲}}\,(\text{الا}+\text{ب})\,\text{فرلا} = -\frac{\text{۱}}{\text{ا}}\,\text{مم}\,(\text{الا}+\text{ب})$$

(۸)

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}}}} = \text{جب}^{-\text{۱}}\,\text{لا}\,،\qquad \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^{\text{۲}}-\text{لا}^{\text{۲}}}} = \text{جب}^{-\text{۱}}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

$$\text{یا} = -\text{جم}^{-\text{۱}}\,\text{لا}\qquad\qquad \text{یا} = -\text{جم}^{-\text{۱}}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

(۹)

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}\pm\text{۱}}} = \text{لوک}\,(\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}\pm\text{۱}})\,،\qquad \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}\pm\text{ا}^{\text{۲}}}} = \text{لوک}\,(\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}\pm\text{ا}^{\text{۲}}})$$

(۱۰)

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}}} = \text{مس}^{-\text{۱}}\,\text{لا}\,،\qquad \int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}^{\text{۲}}+\text{لا}^{\text{۲}}} = \frac{\text{۱}}{\text{ا}}\,\text{مس}^{-\text{۱}}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

$$\text{یا} = -\text{مم}^{-\text{۱}}\,\text{لا}\qquad\qquad \text{یا} = -\frac{\text{۱}}{\text{ا}}\,\text{مم}^{-\text{۱}}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

(۱۱)

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{\text{۲}}-\text{ا}^{\text{۲}}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲ا}}\,\text{لوک}\left(\frac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{لا}+\text{ا}}\right)\ \text{اگر}\ \text{لا}^{\text{۲}} > \text{ا}^{\text{۲}}$$ (دفعہ ۳، مثال ۲)

$= \frac{1}{2a}$ لوک $\left(\frac{a - x}{a + x}\right)$ اگر $x^2 < a^2$

چونکہ جب$^{-1}$ لا ـ (ـ جم$^{-1}$ لا) = $\frac{\pi}{2}$ اسلئے جب$^{-1}$ لا اور ـ جم$^{-1}$ لا دونوں $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ کے تکملے ہیں، اسی طرح کے مشاہدات $\frac{1}{1 + x^2}$ کے تکملہ کے لئے بھی درست ہیں ـ نامحدود تکملہ اکثر اوقات مختلف شکلوں میں بیان کیا جا سکتا ہے، لیکن ان صورتوں میں سے کوئی دو ایک دوسرے سے صرف بلحاظ ایک مستقل کے مختلف ہونگی ـ مقلوب مثلثی تفاعلوں پر تکملی اعمال احتیاط سے کئے جائیں کیونکہ یہ کثیر القیمت تفاعل ہیں، بالخصوص زاویہ کی حدود کے متعلق جو قیود (دفعہ ۲۸، ۴۲ حصۂ اول) ہیں انکو ہمیشہ پیش نظر رکھا جائے ـ

اگر لا منفی ہو تو $\frac{1}{x}$ کا تکملہ لوک لا نہیں ہے بلکہ لوک (ـ لا) ہے اور اگر لا، ا سے کم ہو تو $\frac{1}{x - a}$ کا تکملہ لوک (ا ـ لا) ہوگا ـ صورت ۱۱ صورت ۱۰ کے ساتھ مقابلہ کی غرض سے درج کی گئی ہے، اسی غرض سے صورتیں ۸ اور ۹ ایک ساتھ جمع کی گئی ہیں ـ

اگر لا منفی ہو تو اس کی تصدیق کی جائے کہ $\frac{1}{\sqrt{x^2 + k}}$ کا تکملہ ـ لوک $\{- x + \sqrt{x^2 + k}\}$ ہے ـ

صورت ۹ میں لوکارتموں کی بجائے مقلوب زائدی تفاعل استعمال ہو سکتے ہیں (دفعہ ۶۶، حصۂ اول)

(۹) ا ـ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ = جبز$^{-1}$ $\left(\frac{x}{a}\right)$، $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ = جمز$^{-1}$ $\left(\frac{x}{a}\right)$

اور یاد رہے کہ جمز$^{-1}$ $\frac{x}{a}$ دو قیمتوں والا تفاعل ہے ـ صورتیں مسز$^{-1}$ لا، ممز$^{-1}$ لا ایسی ضروری نہیں ـ

مشق ۱- ذیل کے تفاعلوں کو بلحاظ لا کے تکمل کرو

$\sqrt{\text{لا}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{\text{لا}}}$ ، $\sqrt{۳\text{لا} - ۴}$ ، $\frac{1}{\sqrt{۳\text{لا}^2 - ۴}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{۳ - \text{لا}^2}}$

مشق ۲- ذیل میں جو تکملے مندرج ہیں ان کی قیمتیں معلوم کرو

$\int_{ب}^{\pi}$ جب لا فرلا ، $\int_{ب}^{\pi}$ جم لا فرلا ، $\int_{ب}^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\text{فرلا}}{\text{جم}^2 \text{لا}}$ ، $\int_{ب_1}^{ب_2} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$ ، $\int_{۳}^{1} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$

۳- جبریہ اور مثلثی تحویلیں - تکملہ کی تعریف کی رو سے اور مسائل ۲، ۳ دفعہ ۸۵ حصہ اول کے استعمال کرنے سے ذیل کے مسئلے بآسانی ثابت ہو سکتے ہیں

(۱) $\int$ ج فا (لا) فرلا = ج $\int$ فا (لا) فرلا جہاں ج مستقل ہے

(۲) $\int$ (ع - و + ... + ی) فرلا = $\int$ ع فرلا - $\int$ و فرلا + ... + $\int$ ی فرلا

جہاں ع، و ..... ی متغیر لا کے تفاعل ہیں یا مستقل ہیں -

(۲) میں دائیں طرف کے تکملہ کا مشتق تعریف کی رو سے ع - و + ... + ی ہے اور مسئلہ ۳ دفعہ ۸۵ حصہ اول کی رو سے بائیں جانب کے مجموعہ کا مشتق رقموں کے مشتقوں کا مجموعہ ہے جو تکملہ کی تعریف کی رو سے ع - و + ... + ی ہے - پس اگر تکمل کے مستقلات سے قطع نظر کی جائے تو مساوات (۲) درست ہے -

مثال $\int$ (۳ لا^2 - ۵ لا^2 + ۱) فرلا = $\int$ ۳ لا^2 فرلا - $\int$ ۵ لا^2 فرلا + $\int$ ۱ فرلا

(۲) کی رو سے

= ۳ $\int$ لا^2 فرلا - ۵ $\int$ لا^2 فرلا + $\int$ فرلا (۱) کی رو سے

= $\frac{۳}{۵}$ لا^5 - $\frac{۵}{۳}$ لا^3 + لا

تکمل در حقیقت آزمائشی عمل ہے، اور اکثر اوقات ایسا ہوتا ہے کہ معلومہ تفاعلوں میں سے کوئی ایسا تفاعل نہیں ملتا جس کا مشتق معلومہ متکمل ہو (دیکھو دفعہ ۸۲ حصہ اول) - دفعات ۴، ۹ میں تکمل کے دو عام طریقے دئے جائیں گے جو تکملوں کی

تلاش میں نہایت کارآمد ثابت ہوتے ہیں، لیکن یاد رہے کہ اکثر اوقات کسی سادہ سی جبریہ یا مثلثی تحویل کی مدد سے متکمل کو ایسی ارقام کے مجموعہ کی شکل میں لا سکنا ممکن ہوتا ہے کہ ہر ایک رقم معیاری صورت میں آجائے تکمیل کے بعض نتائج اسقدر اہم ہیں کہ انہیں معیاری صورتوں میں شریک کرلینا مناسب ہے لیکن طالب علم کو چاہیئے کہ الگ الگ نتائج کو حفظ یاد رکھنے کی بجائے نفس تحویل کے اصل منشا کو ذہن نشین کرے اب ہم ایسی تحویلوں کی چند مثالیں درج کرینگے۔

مثال ۱۔ $\dfrac{\text{۲لا}^{۳} - \text{لا}^{۲} + ۱}{\text{۲لا} - ۱}$ کو تکمیل کرو۔

تقسیم سے $\dfrac{\text{۲لا}^{۳} - \text{لا}^{۲} + ۱}{\text{۲لا} - ۱} = \text{لا}^{۲} - \text{۳لا} - \dfrac{۳}{۲} - \dfrac{۱}{۲} \times \dfrac{۱}{\text{۲لا} - ۱}$

تکملہ ہے $\dfrac{\text{لا}^{۳}}{۳} - \dfrac{\text{۳لا}^{۲}}{۲} - \dfrac{۳}{۲}\text{لا} - \dfrac{۱}{۴}\,\text{لوک}\,(\text{۲لا} - ۱)$

ہر ایک ایسی کسر کا تکمل جس میں شمار کنندہ لا کا کوئی منطق صحیح تفاعل ہو اور نسب نما لا کا خطی تفاعل ہو اسی طرح عمل میں آسکتا ہے۔

مثال ۲۔ $\dfrac{۱}{\text{لا}^{۲} - \text{ا}^{۲}}$ کو تکمل کرو۔

اسکو جزوی کسروں میں تحلیل کرو

$$\frac{۱}{\text{لا}^{۲} - \text{ا}^{۲}} = \frac{۱}{\text{۲ا}}\left(\frac{۱}{\text{لا} - \text{ا}} - \frac{۱}{\text{لا} + \text{ا}}\right)$$

$$\int \frac{\text{فلا}}{\text{لا}^{۲} - \text{ا}^{۲}} = \frac{۱}{\text{۲ا}}\left\{\text{لوک}\,(\text{لا} - \text{ا}) - \text{لوک}\,(\text{لا} + \text{ا})\right\}$$

$$= \frac{۱}{\text{۲ا}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا} - \text{ا}}{\text{لا} + \text{ا}}$$

جبکہ $\text{لا}^{۲} > \text{ا}^{۲}$ کیونکہ صرف اسی صورت میں $\dfrac{\text{لا} - \text{ا}}{\text{لا} + \text{ا}}$ مثبت ہوگا۔ اگر

$\text{لا}^{2} < \text{ا}^{2}$ تو تکملہ $\frac{۱}{۲\text{ا}}$ لوک $\frac{\text{ا} - \text{لا}}{\text{ا} + \text{لا}}$ ہوگا کیونکہ اِس صورت میں $\frac{۱}{\text{لا} - \text{ا}}$ کا تکملہ لوک (ا - لا) ہے۔

یہ تحویل جزوی کسور کے طریقہ کی ایک خاص صورت ہے۔ اس کے تفصیلی مطالعہ کے لئے طالب علم جبر و مقابلہ کی کوئی مستند کتاب دیکھے۔

ملاحظہ ہو دفعہ ۱۱۔

چونکہ $\frac{۳\text{لا} - ۵}{(\text{لا} - ۱)(\text{لا} - ۲)} = \frac{۲}{\text{لا} - ۱} + \frac{۱}{\text{لا} - ۲}$

اس لئے $\int \frac{(۳\text{لا} - ۵)\,\text{فرلا}}{(\text{لا} - ۱)(\text{لا} - ۲)} = ۲\,\text{لوک}\,(\text{لا} - ۱) + \text{لوک}\,(\text{لا} - ۲)$

مثال ۳۔ صورتیں $\frac{۱}{\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{2}}$ اور $\frac{۱}{\sqrt{\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{2}}}$

اگر ا اور ب دونوں مثبت ہوں تو

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{2}} = \frac{۱}{\text{ب}} \int \frac{\text{فرلا}}{\frac{\text{ا}}{\text{ب}} + \text{لا}^{2}} = \frac{۱}{\sqrt{\text{ا}\,\text{ب}}}\ \text{مس}^{-۱}\left(\frac{\sqrt{\text{ب}}\,\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}}}\right)$$

اگر ا منفی اور ب مثبت ہو تو تکمل کو مثال ۲ کی شکل میں لانا چاہئے۔

$$\text{مثلاً}\ \int \frac{\text{فرلا}}{۳\text{لا}^{2} - ۵} = \frac{۱}{۳} \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{2} - \frac{۵}{۳}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۱۵}}\ \text{لوک}\ \frac{\text{لا} - \sqrt{\frac{۵}{۳}}}{\text{لا} + \sqrt{\frac{۵}{۳}}}$$

اسی طرح $\frac{۱}{\sqrt{\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{2}}}$ پر بھی عمل ہو سکتا ہے۔

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۳ - ۲\text{لا}^{2}}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\frac{۳}{۲} - \text{لا}^{2}}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\ \text{جب}^{-۱}\left(\frac{\text{لا}\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}\right)$$

ذرا سی مشق کے بعد طالب علم بہت سے مدارج زبانی کر سکیگا۔ پہلی صورت میں پورا عمل یہ ہے

(۱/ب) ∫ فلا / (لا² + ۱/ب²) = ۱/ب × ۱/(۱/ب) سن⁻¹ (لا/(۱/ب)) = (۱/(۱/ب)) سن⁻¹ (لا ب/۱)

مثال ۴ - جبⁿ لا ، جمⁿ لا ، جب م لا جم ن لا

جس صورت میں ن چھوٹا مثبت صحیح عدد ہو تو جبⁿ لا ، جمⁿ لا بآسانی لا کے اضعاف کی جیوب یا جیوب التمام کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں ، ن کی اور قیمتوں کے لئے مسلسل تحویل (دفعہ ۹) یا دفعہ ۵ مثال ۴ کے طریقہ کو استعمال کرنا زیادہ مناسب ہوگا۔

جب² لا = ۱/۲ (۱ - جم ۲ لا) ، جب³ لا = ۳/۴ جب لا - ۱/۴ جب ۳ لا

∫ جب² لا فلا = ۱/۲ لا - ۱/۴ جب ۲ لا ، ∫ جب³ لا فلا

= - ۳/۴ جم لا + ۱/۱۲ جم ۳ لا

∫ (۰ تا π/۲) جب² لا فلا = π/۴ ، ∫ (۰ تا π/۲) جب³ لا فلا = ۰ - [- ۳/۴ + ۱/۱۲] = ۲/۳

اسی طرح جم لا کی قوتوں پر بھی عمل ہو سکتا ہے۔

جیب اور جیب التمام کے حاصل ضرب کو یا دو جیوب یا دو جیوب التمام کے حاصل ضرب کو جیوب یا جیوب التمام کے حاصل جمع یا حاصل تفریق کی رقوم میں بیان کر کے تکمل کیا جا سکتا ہے - مثلاً

جب م لا جم ن لا = ۱/۲ {جب (م + ن) لا + جب (م - ن) لا}

اس لئے اگر م ≠ ن تو

∫ جب م لا جم ن لا فلا = - جم (م + ن) لا / ۲ (م + ن) - جم (م - ن) لا / ۲ (م - ن)

لیکن اگر م = ن تو تکملہ ہے

- ۱/۴م جم ۲ م لا

مشق ۱

امثلہ ۱ تا ۱۵ کو بلحاظ لا کے تکمل کرو۔

۱۔ $\frac{۳لا^{۴} - ۴لا^{۳} + ۲لا^{۲} - ۳}{لا - ۳}$ ۲۔ $\frac{۲لا + ۱}{۲لا - ۱}$

۳۔ $\frac{۲لا - ۳}{لا^{۲} - ۳لا + ۲}$ ۴۔ $\frac{۳لا - ۷}{(لا - ۱)(لا - ۲)(لا - ۳)}$

۵۔ $\frac{۱}{۷ - ۳لا^{۲}}$ ۶۔ $\frac{۱}{۷ + ۳لا^{۲}}$

۷۔ $\frac{۱}{\sqrt{۳ - ۴لا^{۲}}}$ ۸۔ $\frac{۱}{\sqrt{۳ + ۴لا^{۲}}}$

۹۔ جم^{۲} لا ۱۰۔ جم^{۳} لا ۱۱۔ جم^{۲}(الا+ب)

۱۲۔ جب^{۴} لا ۱۳۔ جب ۳لا جب ۴لا

۱۴۔ جب(۳لا+۲) جم(۴لا+۳) ۱۵۔ جم لا جم ۲لا جم ۳لا

۱۶ سے ۲۱ تک کے سوالوں میں جو تکملے ہیں اُن کی قیمتیں معلوم کرو۔

۱۶۔ $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$ جم^{۲} لا فرلا ۱۷۔ $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$ جب^{۲} ۲لا فرلا

۱۸۔ $\int_{۰}^{۲} \frac{فرلا}{۴ + لا^{۲}}$ ۱۹۔ $\int_{۰}^{۱} \frac{فرلا}{۴ - لا^{۲}}$

۲۰۔ $\int_{۳}^{۴} \frac{فرلا}{۴ - لا^{۲}}$ ۲۱۔ $\int_{۰}^{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \frac{فرلا}{\sqrt{۳ - لا^{۲}}}$

۲۲۔ اگر م، ن نامساوی مثبت صحیح عدد ہوں تو

$$\int_{۰}^{\pi} \text{جم م لا جم ن لا فرلا} = ۰ = \int_{۰}^{\pi} \text{جب م لا جب ن لا فرلا}$$

اور ہر تکملہ کی قیمت معلوم کرو جبکہ م اور ن مساوی مثبت صحیح عدد ہوں۔

۲۳۔ تکملوں کی ترسیموں سے دکھاؤ کہ ذیل کی مساواتیں درست ہیں

(۱) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{\text{ن}}\text{لا}\ \text{فرلا} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{ن}}\text{لا}\ \text{فرلا}$ جہاں ن مثبت ہے

(۲) $\int_{0}^{\pi} \text{جب}^{\text{ن}}\text{لا}\ \text{فرلا} = ۲\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{ن}}\text{لا}\ \text{فرلا}$ جہاں ن مثبت ہے

(۳) $\int_{0}^{\pi} \text{جم}^{\text{ن}}\text{لا}\ \text{فرلا} = ۲\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{\text{ن}}\text{لا}\ \text{فرلا}$ اگر ن جفت صحیح عدد ہو

لیکن　　$= \cdot$　　اگر ن طاق صحیح عدد ہو

۲۴۔ مکافی $\text{ما}^{۲} = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$ اور نقطہ (ب، ج) میں سے گذرنیوالے دوہرے معین کے درمیان جو رقبہ محدود ہے وہ $\frac{۴}{۳}$ ب ج کے مساوی ہے۔

۲۵۔ ا، ب مثبت ہیں اور ا < ب، ثابت کرو کہ جو رقبہ زائد $\text{لا}\,\text{ما} = \text{ج}^{۲}$، محور لا اور ا، ب کے معینوں کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ $\text{ج}^{۲}\ \text{لوک}\left(\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right)$ کے مساوی ہے۔ اگر زائد کی بجائے معلومہ منحنی $\text{ما} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ج}^{\text{ن}-۱}}$ ہو تو رقبہ

$\left(\text{ب}^{\text{ن}+۱} - \text{ا}^{\text{ن}+۱}\right) / (\text{ن}+۱)\,\text{ج}^{\text{ن}-۱}$ ہوگا۔

۲۶۔ ثابت کرو کہ موسیقی منحنی $\text{ما} = \text{ب}\ \text{جب}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)$ کے ایک محراب اور محور لا کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے وہ ۲ ا ب کے مساوی ہے۔

۲۷۔ ناقص اپنے محور اعظم کے گرد گھومتا ہے، ثابت کرو کہ ایک پوری گردش سے جس کرہ نما کی تکوین ہوتی ہے اُس کا حجم $\frac{۴}{۳}\pi\,\text{ا}\,\text{ب}^{۲}$ ہے۔ اگر گردش کا محور محور اصغر ہو تو حجم $\frac{۴}{۳}\pi\,\text{ا}^{۲}\,\text{ب}$ ہوگا۔

۲۸۔ بعض سطحوں کو اگر ایک ایسے نقطہ پر جس کا فصلہ لا ہے محور لا پر عمود اً تراشا جائے تو تراش کا رقبہ $\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}\,\text{لا}^{۲}$ ہوتا ہے جہاں ا، ب، ج مستقل ہیں، ثابت کرو کہ دو مستوی سطحوں کے درمیان جو محور لا پر عمود دار ہیں ان سطحوں کا حجم

$\text{ا}(\text{ب} - \text{ا}) + \frac{۱}{۲}\,\text{ب}\,(\text{ب}^{۲} - \text{ا}^{۲}) + \frac{۱}{۳}\,\text{ج}\,(\text{ب}^{۳} - \text{ا}^{۳})$ منقطع ہوتا ہے۔

جہاں ا، ب ان نقطوں کے فصلے ہیں جہاں مستویات محور لا کو کاٹتی ہیں (ا < ب)
اس نتیجہ کو ذیل کے حجم معلوم کرنے میں استعمال کرو۔
(۱) مخروط کا حجم (۲) قطعہ کرہ کا حجم (۳) ناقص نما کا حجم جس کی مساوات

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} + \frac{ی^2}{ج^2} = 1 \text{ ہے۔}$$

۲۹۔ مثال ۲۸ میں فرض کرو کہ ا، ب اور ان کے درمیانی نقطہ میں سے گذرنیوالی تراشوں کے رقبے بالترتیب ص۱، ص۲ اور م ہیں اور ب - ا = ۲ ھ، ثابت کرو کہ حجم مذکور $\frac{1}{3}$ ھ (ص۱ + ص۲ + ۴ م) ہے۔

۴۔ متغیر کی تبدیلی

۴۔ متغیر کی تبدیلی۔ دفعہ ۵۹ حصہ اول میں تفاعل کے تفاعل کو تفرق کرنیکا کلیہ بتایا گیا ہے۔ اسی کلیہ سے تکمل کا ایک مشہور طریقہ حاصل ہوتا ہے، دفعہ گذشتہ میں جن دو عام طریقوں کا ذکر کیا گیا ہے ان میں سے یہ ایک ہے۔ اس کلیہ کی رو سے تکمل کے متغیر کو بدل کر تکمل عمل میں لاتے ہیں۔ سب سے پہلے سادہ سی مثال لو

$$ما = \int \frac{فرلا}{لا^2 + 2لا + 2}، \quad \frac{فرما}{فرلا} = \frac{1}{لا^2 + 2لا + 2}$$

رکھو لا = ع - ۱ اس طرح ما، ع کا تفاعل بن جاتا ہے۔

$$\frac{فرما}{فرع} = \frac{فرما}{فرلا} \times \frac{فرلا}{فرع} = \frac{1}{لا^2 + 2لا + 2} = \frac{1}{ع^2 + 1}$$

اب اوپر کا تکملہ ع کا تفاعل ہے اور یہ اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$ما = \int \frac{فرع}{ع^2 + 1} = مس^{-1} ع \quad \text{یعنی} \quad ما = مس^{-1} (لا + 1)$$

متغیر کو بدلنے سے ہم تکمل کو ایک معلومہ شکل میں لے آئے ہیں، اس طرح تکمل آسان ہوگیا ہے۔
اب عام صورت پر غور کرو جہاں تکمل فا (لا) ہے۔ فرض کرو کہ ابدال لا = فہ (ع) کی مدد سے ما کو ع کا تفاعل بنایا گیا ہے، تب

$$\frac{فرما}{فرع} = \frac{فرما}{فرلا} \times \frac{فرلا}{فرع} = فا(لا) \frac{فرلا}{فرع} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

مساوات (۱) میں $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}}$ کو لا = فہ(ع) سے معلوم کرو اور پھر نئے متکمل فا(لا) $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}}$ کو اسی مساوات کے ذریعہ ع کی رقوم میں بیان کرو۔ اس طرح مساوات (۱) لا سے پاک ہو جائیگی اور حاصل ہوگا

$$\text{ما} = \int \text{فا(لا)} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}} \text{فرع} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

یہ ممکن ہے کہ نیا متکمل جو اوپر حاصل ہوا ہے معیاری صورت میں ہو یا اگر ایسا نہ ہو تو بہ نسبت پرانے متکمل کے یہ زیادہ آسانی سے ایسی صورت میں تحویل ہو سکے، پس

$$\text{ما} = \int \text{فا(لا)}\ \text{فرلا} = \int \text{فا(لا)} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}} \text{فرع} \quad \ldots\ldots (۳)$$

الفاظ میں متغیر کو بدلنے کا قاعدہ یوں بیان ہو سکتا ہے۔

فرلا کی بجائے $\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}}\right)$ فرع رکھو اور لا اور ع کے درمیان جو مساوات ہے اس کے ذریعہ نئے متکمل فا(لا) $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}}$ کو ع کی رقوم میں بیان کرو۔ اس طرح تکملہ نئے متغیر ع کا تفاعل بن جائیگا۔

جب تکمل کا عمل اس طرح پورا ہو چکے تو تکملی تفاعل کو پرانے متغیر کی رقوم میں واپس لے آنا چاہیے۔

جب، لا = ا تو ع = عہ اور جب، لا = ب تو ع = بہ اور اگر لا، ع کا باہمی ربط ایسا ہو کہ جب، لا، ا سے ب تک مسلسل طور پر بدلے تو ع بھی عہ سے بہ تک مسلسل طور پر بدلتا ہو تو

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا(لا)}\ \text{فرلا} = \int_{\text{عہ}}^{\text{بہ}} \text{فا(لا)} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}} \text{فرع} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

ظاہر ہے کہ اس صورت میں پرانے متغیر کیطرف واپس آنے کی ضرورت نہیں۔

اوپر کے استحالوں (۳) اور (۴) کے استعمال کرنے میں یہ ضروری ہے کہ تکمل کے وقفوں ب۔ا اور ب۔عا کے درمیان لا کی ہر ایک قیمت کے جواب میں ع کی ایک اور صرف ایک قیمت ہو اور اسی طرح ع کی ہر ایک قیمت کے جواب میں لا کی ایک اور صرف ایک قیمت ہو، اگر لا اور ع کا باہمی ربط ایسا ہو کہ اس سے ع، لا کے کثیر القیمت تفاعل کے طور پر حاصل ہو یا لا، ع کے کثیر القیمت تفاعل کے طور پر ملے تو احتیاط سے مناسب قیمت کا انتخاب کرنا چاہئے۔ [ملاحظہ ہو دفعہ ۸، مثال ۳ اور دفعہ ۱۴]

۵۔ متغیر بدلنے کی مثالیں

مثال ۱۔ جب، فا (لا) اس شکل سا (ا لا + ب) کا ہو

فرض کرو کہ $\text{ع} = \text{ا لا} + \text{ب}$، $\text{فرع} = \text{ا فرلا}$، $\text{فرلا} = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{فرع}$

$$\int \text{سا}(\text{ا لا} + \text{ب})\,\text{فرلا} = \frac{1}{\text{ا}} \int \text{سا}(\text{ع})\,\text{فرع}$$

یہ نمونہ اکثر واقع ہوتا ہے۔ مثلاً اگر $\text{ع} = \text{لا} - \frac{1}{4}$ تو

$$\int \frac{\text{فرلا}}{2\,\text{لا}^2 - \text{لا} + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا} - \frac{1}{4})^2 + \frac{7}{16}} = \frac{1}{2} \int \frac{\text{فرع}}{\text{ع}^2 + \frac{7}{16}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{\sqrt{7}}\, \text{مس}^{-1}\left(\frac{4\,\text{ع}}{\sqrt{7}}\right) = \frac{2}{\sqrt{7}}\, \text{مس}^{-1}\left(\frac{4\,\text{لا} - 1}{\sqrt{7}}\right)$$

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{2\,\text{لا}^2 - \text{لا} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{(\text{لا} - \frac{1}{4})^2 + \frac{7}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \text{لوک}\left\{\text{لا} - \frac{1}{4} + \sqrt{\text{لا}^2 - \frac{1}{2}\text{لا} + \frac{1}{2}}\right\}$$

مستقل جزو ضربی مثلاً ۲ حسب ضرورت تکملی علامت کے باہر نکال لیا جا سکتا ہے اسی طرح اگر ضرورت ہو تو مستقل جزو ضربی داخل کر لیا جا سکتا ہے جیسا مثال ۲ میں۔

مثال ۲۔ جب، فا (لا) اس شکل سا $(\text{لا}^{\text{ن}})\,\text{لا}^{\text{ن}-1}$ کا ہو۔

فرض کرو کہ $\text{ع} = \text{لا}^{\text{ن}}$، $\text{فرع} = \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{فرلا}$، $\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{فرلا} = \frac{\text{فرع}}{\text{ن}}$

$$\int \text{سا}(\text{لا}^{\text{ن}})\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{فرلا} = \frac{1}{\text{ن}} \int \text{سا}(\text{ع})\,\text{فرع}$$

پس جب، ع = لا^2

$$\int \text{لا}\sqrt{\text{ا لا}^2+\text{ب}}\ \text{فرلا} = \frac{1}{2}\int\sqrt{\text{ا ع}+\text{ب}}\ \text{فرع} = \frac{1}{3\,\text{ا}}(\text{ا ع}+\text{ب})^{\frac{3}{2}}$$

$$= (\text{ا لا}^2+\text{ب})^{\frac{3}{2}} / 3\,\text{ا}$$

اس تکملہ کی قیمت اس طرح بھی حاصل ہو سکتی ہے اگر رکھا جائے ع = $\sqrt{\text{ا لا}^2+\text{ب}}$

یا ع^2 = ا لا^2 + ب ۔ موخر الذکر ابدال سے

$$\text{لا فرلا} = \frac{1}{\text{ا}}\ \text{ع فرع} \quad \text{اور} \quad \int \text{لا}\sqrt{\text{ا لا}^2+\text{ب}}\ \text{فرلا} = \frac{1}{\text{ا}}\int \text{ع}^2\ \text{فرع} = \frac{\text{ع}^3}{3\,\text{ا}}$$

جو قیمت اوپر معلوم ہوئی ہے۔

مثال ۳۔ جب، فا(لا) اس شکل $[\text{سا(لا)}]^{\text{ن}}$ سا′(لا) کا ہو

فرض کرو کہ ع = سا(لا)، فرع = سا′(لا) فرلا

$$\text{فا(لا) فرلا} = \text{ع}^{\text{ن}}\ \text{فرع}$$

اور تکملہ قوت کی شکل میں ہوگا اگر ن، -۱ کے ساوی نہ ہو اور لوکارتم کی شکل میں ہوگا اگر ن = -۱

$$(\text{۳ ا})\quad \int [\text{سا(لا)}]^{\text{ن}}\ \text{سا}'(\text{لا})\ \text{فرلا} = \frac{1}{\text{ن}+1}[\text{سا(لا)}]^{\text{ن}+1} \quad \text{جبکہ ن} \neq -1$$

$$(\text{۳ ب})\quad \int \frac{\text{سا}'(\text{لا})}{\text{سا(لا)}}\ \text{فرلا} = \text{لوک}\,[\text{سا(لا)}]$$

(۳ ب) سے ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ جب متکمل ایک کسر ہو جس کا شمار کنندہ نسب نما کا مشتق ہے تو اس کا تکملہ نسب نما کا لوکارتم ہوتا ہے۔

بعض اوقات متکمل کو مثال ۳ کی شکل میں لانے کے لئے ایک مستقل جزو ضربی کا شریک کرنا ضروری ہوتا ہے۔ مثلاً ذیل کے سوالوں میں

$$(1)\quad \int \frac{(\text{لا}-1)\ \text{فرلا}}{\sqrt{2\text{لا}^2-4\text{لا}+1}} = \frac{1}{4}\int (2\text{لا}^2-4\text{لا}+1)^{-\frac{1}{2}}(4\text{لا}-4)\ \text{فرلا}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2\text{لا}^2-4\text{لا}+1}$$

(۲) $\int \frac{(\text{لا} + \text{عہ})\,\text{فرلا}}{(\text{لا} + \text{عہ})^2 + \text{یہ}^2} = \frac{1}{2}\,\text{لوک}\left\{(\text{لا} + \text{عہ})^2 + \text{یہ}^2\right\}$

(۳) $\int \text{مس لا فرلا} = -\int \frac{-\text{جب لا}}{\text{جم لا}}\,\text{فرلا} = -\text{لوک جم لا} = \text{لوک قط لا}$

(۴) $\int \text{مس}^3\,\text{لا فرلا} = \int \text{مس لا}\,(\text{قط}^2\,\text{لا} - 1)\,\text{فرلا} = \int \text{مس لا قط}^2\,\text{لا فرلا} - \int \text{مس لا فرلا}$
$= \frac{1}{2}\,\text{مس}^2\,\text{لا} + \text{لوک جم لا}$

مثال ۴۔ $\text{فا(لا)} = \text{جب}^{\text{م}}\,\text{لا جم}^{\text{ن}}\,\text{لا}$

(۱) اگر م، ن میں سے کوئی ایک بھی طاق مثبت صحیح عدد ہو تو تکمل بآسانی عمل میں آسکتا ہے۔ جب م طاق ہو تو رکھو ع = جم لا اور جب ن طاق ہو تو رکھو ع = جب لا۔

مثال کے طور پر فرض کرو کہ $\text{فا(لا)} = \text{جب}^{\frac{1}{2}}\,\text{لا جم}^5\,\text{لا}$

رکھو ع = جب لا، فرع = جم لا فرلا، $\text{جم}^2\,\text{لا} = (1 - \text{ع}^2)$

$\int \text{جب}^{\frac{1}{2}}\,\text{لا جم}^5\,\text{لا فرلا} = \int (\text{ع}^{\frac{1}{2}} - 2\text{ع}^{\frac{5}{2}} + \text{ع}^{\frac{9}{2}})\,\text{فرع} = \frac{2}{3}\text{ع}^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7}\text{ع}^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11}\text{ع}^{\frac{11}{2}}$

$= \text{جب}^{\frac{3}{2}}\,\text{لا}\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7}\,\text{جب}^2\,\text{لا} + \frac{2}{11}\,\text{جب}^4\,\text{لا}\right)$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\frac{1}{2}}\,\text{لا جم}^5\,\text{لا فرلا} = \int_0^1 (\text{ع}^{\frac{1}{2}} - 2\text{ع}^{\frac{5}{2}} + \text{ع}^{\frac{9}{2}})\,\text{فرع} = \frac{2}{3} - \frac{4}{7} + \frac{2}{11} = \frac{64}{(231)}$

اسی طرح سے اگر ع = جم لا، فرع = −جب لا فرلا

$\int \text{جب}^5\,\text{لا فرلا} = -\int (1 - \text{ع}^2)^2\,\text{فرع} = -(\text{ع} - \frac{2}{3}\text{ع}^3 + \frac{1}{5}\text{ع}^5)$
$= -\text{جم لا} + \frac{2}{3}\,\text{جم}^3\,\text{لا} - \frac{1}{5}\,\text{جم}^5\,\text{لا}$

(۲) جب م + ن جفت، منفی صحیح عدد ہو۔ ایسی صورت میں فرض کرو کہ ع = مس لا (یا ظم لا)، نیا تکمل مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلایا جا سکیگا مثلاً

$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب}^5\,\text{لا جم}^3\,\text{لا}} = \int \frac{(1 + \text{ع}^2)^4}{\text{ع}^5}\,\frac{\text{فرع}}{1 + \text{ع}^2} = \int \left(\frac{1}{\text{ع}^5} + \frac{3}{\text{ع}^3} + \frac{3}{\text{ع}} + \text{ع}\right)\text{فرع}$

اور تکملہ بآسانی لا کی رقوم میں حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال ۵ - اگر فا(لا) ، لا اور $\sqrt[\text{ر}]{\text{الا} + \text{ب}}$ کا منطق تفاعل ہو تو تعویض یا ابدال $\text{الا} + \text{ب} = \text{ع}^{\text{ر}}$ سے نیا متکمل ع کا منطق تفاعل بن جائیگا۔

مثلاً اگر $\text{لا} + ۱ = \text{ع}^۲$ تو

$$\int \text{لا}^۲ \sqrt{\text{لا}+۱}\ \text{فلا} = ۲\int (\text{ع}^۲ - ۱)^۲ \text{ع}^۲\ \text{فع} = ۲\left(\tfrac{۱}{۷}\text{ع}^۷ - \tfrac{۲}{۵}\text{ع}^۵ + \tfrac{۱}{۳}\text{ع}^۳\right)$$

اور تھوڑی سی تحویل کے بعد $= ۲\sqrt{\text{لا}+۱}\,(۱۵\,\text{لا}^۳ + ۳\,\text{لا}^۲ - ۴\,\text{لا} + ۸)/۱۰۵$

اوپر کی مثالوں میں متغیر بدلنے کی ابتدائی مشہور صورتیں جو اکثر واقع ہوتی ہیں حل کی گئی ہیں طالب علم ان کا غور سے مطالعہ کرے اور اس کے بعد مشق ۲ کے اوائل کی مثالوں کے حل کرنے کی کوشش کرے۔ کافی مشق بہم پہنچانے سے ہی اسکے لئے ایسی تحویلوں کے استعمال میں سہولت پیدا ہو سکتی ہے۔

۶ - دوسرے درجہ کے تفاعل

- اگر $\text{ر} = \text{الا}^۲ + \text{ب لا} + \text{ج}$ اور ف (لا) ایک منطق صحیح تفاعل ہو تو $\frac{\text{ف (لا)}}{\text{ر}}$ ایک ایسے مجموعہ کی شکل میں بیان ہو سکتا ہے جو ایک منطق صحیح تفاعل اور ایک کسر واجب $\frac{\text{الا} + \text{ب}}{\text{ر}}$ پر مشتمل ہو۔

ہم ان شکلوں $\frac{\text{الا} + \text{ب}}{\text{ر}}$ اور $\frac{\text{الا} + \text{ب}}{\sqrt{\text{ر}}}$ پر بحث کرینگے۔

مبتدیوں کے لئے آسانی اس میں ہوگی کہ ر کو ذیل کی صورت میں لکھا جائے

$$\text{ر} = \text{ا}\left(\text{لا} + \frac{\text{ب}}{۲\text{ا}}\right)^۲ + \frac{۴\text{اج} - \text{ب}^۲}{۴\text{ا}}$$

اگر ا مثبت ہو تو اسے ہم + ۱ کے مساوی لے سکتے ہیں اور اگر ا منفی ہو تو اسے - ۱ کے مساوی لیا جا سکتا ہے، ایسا کرنے میں حل کی عمومیت میں فرق نہیں آتا کیونکہ مستقل جزوِ ضربی ہمیشہ تکملی علامت کے باہر نکال لیا جا سکتا ہے۔

اگر $۴\text{اج} - \text{ب}^۲$ مثبت ہو تو ر کے اجزائے ضربی خیالی ہوں گے اور ر اس شکل کا ہوگا

$$\text{س} = (\text{لا} + \text{عہ})^2 + \text{بہ}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اگر $۴\,\text{ا}\,\text{ج} - \text{ب}^2$ منفی ہو تو س کے اجزائے ضربی حقیقی ہونگے اور اگر

$$\text{ا} = +۱ \text{ تو } \text{س} = (\text{لا} + \text{عہ})^2 - \text{بہ}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

$$\text{ا} = -۱ \text{ تو } \text{س} = \text{بہ}^2 - (\text{لا} + \text{عہ})^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

صورت اول - $\dfrac{\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}}{\text{س}}$

(۱) اگر س کے اجزائے ضربی حقیقی ہوں تو اس کسر کو دفعہ ۳ مثال ۲ کی مانند جزوی کسروں میں تحلیل کیا جائے۔

(۲) اگر س کے اجزائے ضربی خیالی ہوں تو $\text{س} = (\text{لا} + \text{عہ})^2 + \text{بہ}^2$، ہم اس صورت میں کسر کو اس طرح بدل سکتے ہیں کہ دفعہ ۵ مثال ۳ اور مثال ۱ کی طرح متغیر بدلنے سے حل عمل میں آسکے۔

لہ اور مہ ایسے معلوم کرو کہ

$$\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب} = \text{لہ}\,(۲\,\text{لا} + ۲\,\text{عہ}) + \text{مہ}، \quad \text{لہ} = \tfrac{1}{2}\,\text{ا}، \quad \text{مہ} = \text{ب} - \text{عہ}\,\text{ا}$$

اس لئے $$\frac{\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}}{\text{س}} = \text{لہ}\,\frac{۲\,\text{لا} + ۲\,\text{عہ}}{(\text{لا} + \text{عہ})^2 + \text{بہ}^2} + \text{مہ}\,\frac{1}{(\text{لا} + \text{عہ})^2 + \text{بہ}^2}$$

اور $$\int \frac{(\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب})}{\text{س}}\,\text{فرلا} = \text{لہ}\,\text{لوک}\left\{(\text{لا} + \text{عہ})^2 + \text{بہ}^2\right\} + \frac{\text{مہ}}{\text{بہ}}\,\text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{لا} + \text{عہ}}{\text{بہ}}\right)$$

پہلا تکملہ دفعہ ۵ مثال ۳ کی صورت ہے اور دوسرا دفعہ ۵ مثال ۱ کی۔

صورت دوم - $\dfrac{\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}}{\sqrt{\text{س}}}$

(۱) س فرض کرو کہ $(\text{لا} + \text{عہ})^2 + \text{بہ}^2$ ہے یا $(\text{لا} + \text{عہ})^2 - \text{بہ}^2$

$\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}$ کے لئے اوپر کی تحویل عمل میں لاؤ

$$\int \frac{(\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب})\,\text{فرلا}}{\sqrt{\text{س}}} = \text{لہ} \int \frac{(۲\,\text{لا} + ۲\,\text{عہ})\,\text{فرلا}}{\sqrt{(\text{لا} + \text{عہ})^2 \pm \text{بہ}^2}} + \text{مہ} \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{(\text{لا} + \text{عہ})^2 \pm \text{بہ}^2}}$$

$$= ۲\,\text{لہ}\sqrt{\text{س}} + \text{مہ}\,\text{لوک}\left\{(\text{لا} + \text{عہ}) + \sqrt{(\text{لا} + \text{عہ})^2 \pm \text{بہ}^2}\right\}$$

(۲) فرض کرو کہ ر = ہ^{۲} − (لا + ع)^{۲} ، تب

$$\int \frac{(\text{الا} + \text{ب})\,\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ر}}} = -\text{ل}\int \frac{-(\text{۲لا} + \text{۲ع})\,\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ہ}^{۲} - (\text{لا} + \text{ع})^{۲}}} + \text{م}\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ہ}^{۲} - (\text{لا} + \text{ع})^{۲}}}$$

$$= -\text{۲ل}\sqrt{\text{ر}} + \text{م جب}^{-۱}\left(\frac{\text{لا} + \text{ع}}{\text{ہ}}\right)$$

جب ا = ۰ تو ل = ۰ ۔ تو تکملہ دفعہ ۵ مثال ا کے نمونہ کی ہے۔

عددی مثالوں کے حل کرنے میں سب سے پہلے ر کا مشتق معلوم کر لینا چاہئے، اس کے بعد الا + ب کو مطلوبہ شکل میں رکھ لینا آسان ہوگا۔

مثال ۱۔
$$\int \frac{(\text{۳لا} + \text{۱})\,\text{فرلا}}{\text{۲لا}^{۲} + \text{لا} + \text{۳}}$$

$$\text{عف}(\text{۲لا}^{۲} + \text{لا} + \text{۳}) = \text{۴لا} + \text{۱} ، \quad \text{۳لا} + \text{۱} = \frac{\text{۳}}{\text{۴}}(\text{۴لا} + \text{۱}) + \frac{\text{۱}}{\text{۴}}$$

$$\text{۲لا}^{۲} + \text{لا} + \text{۳} = \text{۲}\left\{\left(\text{لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\right)^{۲} + \frac{\text{۲۳}}{\text{۱۶}}\right\}$$

$$\text{تکملہ} = \frac{\text{۳}}{\text{۴}}\int \frac{(\text{۴لا} + \text{۱})\,\text{فرلا}}{\text{۲لا}^{۲} + \text{لا} + \text{۳}} + \frac{\text{۱}}{\text{۸}}\int \frac{\text{فرلا}}{\left(\text{لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\right)^{۲} + \frac{\text{۲۳}}{\text{۱۶}}}$$

$$= \frac{\text{۳}}{\text{۴}}\,\text{لوک}(\text{۲لا}^{۲} + \text{لا} + \text{۳}) + \frac{\text{۱}}{\text{۲}\sqrt{\text{۲۳}}}\,\text{مس}^{-۱}\left(\frac{\text{۴لا} + \text{۱}}{\sqrt{\text{۲۳}}}\right)$$

مثال ۲۔
$$\int \frac{(\text{۳لا} + \text{۱})\,\text{فرلا}}{\sqrt{-\text{۲لا}^{۲} + \text{لا} + \text{۳}}}$$

$$\text{۳لا} + \text{۱} = -\frac{\text{۳}}{\text{۴}}(-\text{۴لا} + \text{۱}) + \frac{\text{۷}}{\text{۴}}$$

$$\sqrt{-\text{۲لا}^{۲} + \text{لا} + \text{۳}} = \sqrt{\text{۲}}\,\sqrt{\frac{\text{۲۵}}{\text{۱۶}} - \left(\text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\right)^{۲}}$$

$$\text{تکملہ} = -\frac{\text{۳}}{\text{۴}}\int \frac{(-\text{۴لا} + \text{۱})\,\text{فرلا}}{\sqrt{-\text{۲لا}^{۲} + \text{لا} + \text{۳}}} + \frac{\text{۷}}{\text{۴}\sqrt{\text{۲}}}\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\frac{\text{۲۵}}{\text{۱۶}} - \left(\text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\right)^{۲}}}$$

$$= -\frac{3}{2}\sqrt{-2x^2+x+3} + \frac{7}{2\sqrt{4}}\,\text{جب}^{-1}\left(\frac{4x-1}{5}\right)$$

یہ نمونے $\frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ، $\frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

اوپر کی صورتوں میں تحویل ہو جائینگے اگر متغیر کو بالترتیب اِن روابط $x = \frac{1}{z}$ اور $mx+n = \frac{1}{z}$ کے ذریعہ بدلا جائے۔ لوکارثمی تفرق سے اِن سے حاصل ہوگا

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dz}{z} \quad \text{اور} \quad \frac{dx}{mx+n} = -\frac{1}{m}\,\frac{dz}{z}$$

x کی بجائے $\frac{1}{z}$ لکھکر متغیر کا بدلنا اور صورتوں میں بھی سودمند ہوتا ہے، مثلاً

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\int \frac{z\,dz}{(a^2z^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2(a^2z^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

x کی رقوم میں بیان کرنے سے $= \frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$

زیادہ عام صورت $\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{\frac{3}{2}}}$ اسی طرح حل ہو سکیگی اگر دو درجی جملہ کو اُس شکل میں بیان کر لیا جائے جو اِس دفعہ کے شروع میں دی گئی ہے۔

۷۔ مثلثی اور زائدی ابدال۔ دوسرے درجہ کے تفاعل کے ساتھ عمل کرنیکا ایک اور طریقہ یہ ہے کہ مثلثی یا زائدی ابدال کے ذریعہ اسے تحویل کیا جائے، تفاعل کی شکل سے مناسب تحویل کا پتہ چلیگا۔

a^2-x^2 ، $\sqrt{a^2-x^2}$ ، $x = a$ جب θ یا $x = a$ جم θ

x^2+a^2 ، $\sqrt{x^2+a^2}$ ، $x = a$ مس θ یا $x = a$ جبز θ

x^2-a^2 ، $\sqrt{x^2-a^2}$ ، $x = a$ قط θ یا $x = a$ جمز θ

$\sqrt{b^2-(x+h)^2}$ ، $x+h = b$ جب θ ، وغیرہ

مثال ۱۔ اگر $x = a$ جب θ ، $dx = a$ جم $\theta\, d\theta$

$$\int \sqrt{\text{ا}^{2}-\text{لا}^{2}}\;\text{فرلا} = \text{ا}^{2}\int \text{جم}^{2}\text{طہ}\;\text{فرطہ} = \frac{\text{ا}^{2}}{۲}\left(\text{طہ} + \text{جب طہ جم طہ}\right)$$

اس لئے $\int \sqrt{\text{ا}^{2}-\text{لا}^{2}}\;\text{فرلا} = \frac{۱}{۲}\,\text{لا}\sqrt{\text{ا}^{2}-\text{لا}^{2}} + \frac{\text{ا}^{2}}{۲}\,\text{جب}^{-۱}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$

مثال ۲ - اگر $\text{لا} = \text{ا جبز طہ}$، $\text{فرلا} = \text{ا جمز طہ فرطہ}$

$$\int \sqrt{\text{لا}^{2}+\text{ا}^{2}}\;\text{فرلا} = \text{ا}^{2}\int \text{جمز}^{2}\text{طہ}\;\text{فرطہ} = \frac{\text{ا}^{2}}{۲}\left(\text{طہ} + \text{جبز طہ جمز طہ}\right)$$

اسلئے $\int \sqrt{\text{لا}^{2}+\text{ا}^{2}}\;\text{فرلا} = \frac{۱}{۲}\,\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{2}+\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ا}^{2}}{۲}\,\text{جبز}^{-۱}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)$

نیز اگر $\text{لا} = \text{ا جمز طہ}$ تو

$$\int \sqrt{\text{لا}^{2}-\text{ا}^{2}}\;\text{فرلا} = \frac{۱}{۲}\,\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{2}-\text{ا}^{2}} - \frac{\text{ا}^{2}}{۲}\,\text{جمز}^{-۱}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)$$

مثال ۳ - اگر $\text{لا} + ۲ = \sqrt{۳}\;\text{مس طہ}$ تو $\text{فرلا} = \sqrt{۳}\;\text{قط}^{2}\text{طہ فرطہ}$

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^{2}+۴\text{لا}+۷)^{2}} = \int \frac{\sqrt{۳}\;\text{قط}^{2}\text{طہ فرطہ}}{(۳\;\text{قط}^{2}\text{طہ})^{2}} = \frac{\sqrt{۳}}{۹}\int \text{جم}^{2}\text{طہ فرطہ}$$

$$= \frac{۱}{۶}\;\frac{\text{لا}+۲}{\text{لا}^{2}+۴\text{لا}+۷} + \frac{\sqrt{۳}}{۱۸}\;\text{مس}^{-۱}\left(\frac{\text{لا}+۲}{\sqrt{۳}}\right)$$

محدود تکملوں کی صورت میں مثلثی ابدال نہایت کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

۸ - مثلثی متکمل - جیب اور جیب التمام کی قوتوں اور حاصل ضربوں کا تکمل دفعہ ۳ مثال ۴، دفعہ ۵ مثال ۴ اور دفعہ ۱۰ امثلہ ۲، ۳ کے طریقوں سے عمل میں آسکتا ہے۔ لیکن ایک اور طریقہ بھی ہے جو اکثر مفید ثابت ہوتا ہے۔ جب متکمل جب لا یا جم لا کا منطق تفاعل ہو تو ابدال $\text{ع} = \text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۲}$ کے ذریعہ تکملہ ع کے منطق جبریہ تفاعل میں تحویل ہوسکیگا۔ کیونکہ

$$\text{جب لا} = \frac{۲\text{ع}}{۱+\text{ع}^{2}}\text{،}\quad \text{جم لا} = \frac{۱-\text{ع}^{2}}{۱+\text{ع}^{2}}\text{،}\quad \text{فرلا} = \frac{۲\;\text{فرع}}{۱+\text{ع}^{2}}$$

ذیل کی مثالوں ۱ تا ۳ کو معیاری صورتوں میں شمار کیا جائے، ہر صورت میں اندراج $\text{ع} = \text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۲}$ ہے۔

مثال ۱۔ $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب لا}} = \int \frac{\text{فرع}}{\text{ع}} = \text{لوک ع} = \text{لوک مس}\,\frac{\text{لا}}{۲}$

مثال ۲۔ $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جم لا}} = \int \frac{۲\,\text{فرع}}{۱-\text{ع}^۲} = \text{لوک}\,\frac{۱+\text{ع}}{۱-\text{ع}} = \text{لوک}\,\frac{۱+\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۲}}{۱-\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۲}}$

یہ تکملہ کئی صورتوں میں بیان ہوسکتا ہے جیسے

$\text{لوک مس}\left(\frac{\text{لا}}{۲}+\frac{\pi}{۴}\right)$ یا $\frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,\frac{۱+\text{جب لا}}{۱-\text{جب لا}}$

ابدال $\text{و} = \frac{\pi}{۲} - \text{لا}$ یا $\text{و} = \text{لا} - \frac{\pi}{۲}$ سے $\frac{۱}{\text{جم لا}}$ کا تکملہ $\frac{۱}{\text{جب لا}}$ کے تکملہ میں تحویل ہوسکیگا۔

مثال ۳۔ $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}+\text{ب جم لا}} = \int \frac{۲\,\text{فرع}}{\text{ا}(۱+\text{ع}^۲)+\text{ب}(۱-\text{ع}^۲)} = ۲\int \frac{\text{فرع}}{(\text{ا}+\text{ب})+(\text{ا}-\text{ب})\text{ع}^۲}$

فرض کرو کہ ا + ب مثبت ہے، تب تین صورتیں ہیں، ب تعداداً کم ہو ا سے یا بڑا ہو ا سے یا برابر ہو ا کے۔

(۱) $\text{ب}^۲ < \text{ا}^۲$ اور اسلئے $\text{ب} < \text{ا}$ تعداداً۔

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}+\text{ب جم لا}} = \frac{۲}{\sqrt{\text{ا}^۲-\text{ب}^۲}}\,\text{مس}^{-۱}\left(\text{ع}\sqrt{\frac{\text{ا}-\text{ب}}{\text{ا}+\text{ب}}}\right),\quad \text{ع} = \text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۲}$$

(۲) $\text{ب}^۲ > \text{ا}^۲$ اور اسلئے ب - ا مثبت ہے

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}+\text{ب جم لا}} = \frac{۱}{\sqrt{\text{ب}^۲-\text{ا}^۲}}\,\text{لوک}\,\frac{\sqrt{\text{ب}+\text{ا}}+\text{ع}\sqrt{\text{ب}-\text{ا}}}{\sqrt{\text{ب}+\text{ا}}-\text{ع}\sqrt{\text{ب}-\text{ا}}}$$

(۳) $\text{ب}^۲ = \text{ا}^۲$، $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}+\text{ا جم لا}} = \frac{۱}{\text{ا}}\,\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۲}$

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}-\text{ا جم لا}} = -\frac{۱}{\text{ا}}\,\text{مم}\,\frac{\text{لا}}{۲}$$

صورت دوم ایسی ضروری نہیں جیسی (۱) ہے تکملہ (۱) کی قیمت ایک اور شکل میں لکھی جا سکتی ہے جسے یاد رکھنا آسان ہے، ملاحظہ ہو حسب ذیل۔

رکھو $\text{ط} = ۲\,\text{مس}^{-۱}\left\{\sqrt{\frac{\text{ا - ب}}{\text{ا + ب}}} \times \text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۲}\right\}$، اس سے

$$\text{جم ط} = \frac{\text{ا جم لا + ب}}{\text{ا + ب جم لا}} \quad \text{یا} \quad (\text{ا - ب جم ط})(\text{ا + ب جم لا}) = \text{ا}^۲ - \text{ب}^۲$$

اگر ایک قطع ناقص ہو جسکا خروج المرکز $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ ہے تو لا اسکا اصلی اور ط خروج المرکز زاویہ بیقاعدگی ہے۔ (ملاحظہ ہو گوڈفرے کی کتاب علم ہیئت دفعہ ۱۸۶، گرے کا رسالہ طبیعیات دفعہ ۵۲۰)

ا + ب جم لا، اپنی قیمتوں کی پوری وسعت میں سے گذر جاتا ہے جبکہ لا، صفر سے π تک بدلتا ہے یا $-\pi$ سے صفر تک منفی قیمتوں میں سے ہوتا ہوا بدلتا ہے۔ اگر لا صفر اور π کے درمیان رہے تو ط مثبت ہوتا ہے اور صفر تا π کے درمیان واقع ہوتا ہے لیکن اگر لا، $-\pi$ اور صفر کے درمیان واقع ہو تو ط منفی ہوتا ہے اور $-\pi$ اور صفر کے درمیان واقع ہوتا ہے اسلئے مقلوب جیب التمام پر جو قید (دفعات ۲۸، ۱۴) میں لگائی گئی ہے اسکو ملحوظ رکھتے ہوئے

$$\int \frac{\text{فلا}}{\text{ا + ب جم لا}} = \frac{۱}{\sqrt{\text{ا}^۲ - \text{ب}^۲}}\,\text{جم}^{-۱}\left(\frac{\text{ا جم لا + ب}}{\text{ا + ب جم لا}}\right) \quad \text{اگر } ۰ \leqq \text{لا} \leqq \pi$$

$$\text{لیکن} = \frac{-۱}{\sqrt{\text{ا}^۲ - \text{ب}^۲}}\,\text{جم}^{-۱}\left(\frac{\text{ا جم لا + ب}}{\text{ا + ب جم لا}}\right) \quad \text{اگر } -\pi \leqq \text{لا} \leqq ۰$$

جب تکملہ کو ماس مقلوب کی رقوم میں بیان کیا جائے تو ایسا اشتباہ واقع نہیں ہوتا۔

مثال ۴۔ $\int \frac{\text{فلا}}{\text{ا + ب جب لا}}$، ا مثبت، $-\frac{\pi}{۲} < \text{لا} < \frac{\pi}{۲}$

$$\text{تکملہ} = \int \frac{۲\,\text{فع}}{\text{ا} + ۲\text{ب ع} + \text{ا ع}^۲}$$

اگر $\text{ب}^۲ < \text{ا}^۲$ تو ربط $\text{لا} = \frac{\pi}{۲} - \text{و}$ یا $\text{لا} = \frac{\pi}{۲} + \text{و}$ سے تکملہ مثال ۳ (۱) میں تحویل ہو جائیگا۔ طالب علم کو یہ دونوں ابدال عمل میں لانا چاہئیں۔ اس طرح اسے معلوم ہوگا کہ ط کی صرف ایک قیمت کو ہی جو جم ط سے حاصل ہوتی ہے ملحوظ رکھنا کافی نہیں

یہ ابدال اس امر کی اچھی مثال ہے کہ مقلوب تفاعلوں کے ساتھ عمل کرنے میں نہایت احتیاط سے کام لینا چاہئے۔ کوئی اشتباہ واقع نہیں ہوتا اگر مثال ۳ (ا) کا تکملہ مقلوب مماس کی رقوم میں استعمال کیا جائے۔

مثال ۵۔ $\displaystyle\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا} + \text{ب جم لا} + \text{ج جب لا}}$ ، ا مثبت

اگر $\text{ب}^{۲} + \text{ج}^{۲} = \text{ک}^{۲}$ تو ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{ا} + \text{ب جم لا} + \text{ج جب لا} = \text{ا} + \text{ک جم}\,(\text{لا} - \text{عہ})$$

اور تکملہ مثال (۳) کی شکل میں آجاتا ہے۔

اگر $\text{ک}^{۲} < \text{ا}^{۲}$ تو تکملہ ہے

$$\frac{\pm ۱}{\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{ب}^{۲} - \text{ج}^{۲}}}\ \text{جم}^{-۱}\left[\frac{\text{ا جم}\,(\text{لا} - \text{عہ}) + \text{ک}}{\text{ا} + \text{ک جم}\,(\text{لا} - \text{عہ})}\right]$$

علامت مثبت ہوگی اگر $\text{لا} - \text{عہ}$ ، صفر اور π کے درمیان واقع ہو اور منفی ہوگی اگر یہ $-\pi$ اور صفر کے درمیان واقع ہو۔

مشق ۲

امثلہ ۱ تا ۲۲ کو بلحاظ لا کے تکمل کرو

۱۔ $\dfrac{۱}{۲\text{لا}^{۲} + ۳\text{لا} + ۴}$　　۲۔ $\dfrac{۱}{\sqrt{\text{ا لا} - \text{لا}^{۲}}}$　　۳۔ $\dfrac{۱}{\sqrt{\text{لا}^{۲} - \text{ا لا}}}$

۴۔ $\dfrac{۱}{\sqrt{(\text{لا} - \text{ا})(\text{ب} - \text{لا})}}$　　۵۔ $\dfrac{\text{لا}}{\text{ا}^{۲} + \text{لا}^{۲}}$　　۶۔ $\dfrac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{لا}^{۲}}}$

۷۔ $\dfrac{\text{لا}^{۲}}{\text{لا}^{۶} - ۱}$　　۸۔ $\dfrac{\text{لا}}{\text{لا}^{۴} + \text{لا}^{۲} + ۱}$　　۹۔ $\dfrac{\text{لا} + ۱}{\sqrt{\text{لا}^{۲} + ۲\text{لا} - ۳}}$

۱۰۔ مم لا　　۱۱۔ $\dfrac{\text{جم لا}}{۱ + \text{جب لا}}$　　۱۲۔ $\dfrac{۱ + \text{جم لا}}{\text{لا} + \text{جب لا}}$

۱۳- $\text{مس}^{۳}\,\text{لا}$　　۱۴- $\text{مم}^{۵}\,\text{لا}$　　۱۵- $\dfrac{۱}{\text{ا}^{۲}\,\text{جم}^{۲}\,\text{لا} + \text{ب}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{لا}}$

۱۶- $\text{جب}^{۷}\,\text{لا}$　　۱۷- $\text{جب}^{۵}\,\text{لا}\;\text{جم}^{۴}\,\text{لا}$　　۱۸- $\dfrac{۱}{\text{جب}^{۲}\,\text{لا}\;\text{جم}^{۲}\,\text{لا}}$

۱۹- $\dfrac{\text{جب لا}}{\text{جم}^{۵}\,\text{لا}}$　　۲۰- $\text{لا}\sqrt{\text{ا} - \text{لا}}$　　۲۱- $\dfrac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ا} - \text{لا}}}$

۲۲- $\dfrac{۱}{\sqrt{\text{لا} + \sqrt{\text{لا} - \text{ا}}}}$

۲۳- ذیل کے تکملوں کی قیمتیں دریافت کرو

(۱) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{۵}\,\text{لا}\;\text{فر لا}$　(۲) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{۴}\,\text{لا}\;\text{جم}^{۵}\,\text{لا}\;\text{فر لا}$　(۳) $\int_{۰}^{\pi} \dfrac{\text{فر لا}}{\text{ا}^{۲}\,\text{جم}^{۲}\,\text{لا} + \text{ب}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{لا}}$

(۴) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \dfrac{\text{جم لا فر لا}}{۴ - \text{جب}^{۲}\,\text{لا}}$　(۵) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \text{مس لا فر لا}$　(۶) $\int_{۰}^{۱} \dfrac{\text{فر لا}}{۱ + \text{لا} + \text{لا}^{۲}}$

(۷) $\int_{۰}^{۱} \dfrac{\text{فر لا}}{۱ - \text{لا} + \text{لا}^{۲}}$　(۸) $\int_{۰}^{\pi} \dfrac{\text{جب لا فر لا}}{۱ + \text{جم}^{۲}\,\text{لا}}$

امثلہ ۲۴ تا ۴۱ کو بلحاظ لا کے تکمل کرو۔

۲۴- $\dfrac{\text{لا} + ۱}{\text{لا}^{۲} + \text{لا} + ۱}$　　۲۵- $\dfrac{\text{لا}^{۲} - ۱}{\text{لا}^{۲} + ۱}$　　۲۶- $\dfrac{\text{لا}^{۴} + ۷}{\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{لا} + ۳}$

۲۷- $\dfrac{\text{لا}^{۳} + \text{لا}}{\text{لا}^{۴} - ۴}$　　۲۸- $\dfrac{(\text{لا} + ۱)^{۲}}{(\text{لا} - ۱)^{۲}}$　　۲۹- $\sqrt{\dfrac{۱ + \text{لا}}{۱ - \text{لا}}}$

۳۰- $\sqrt{\dfrac{\text{لا} + ۱}{\text{لا} - ۱}}$　　۳۱- $\sqrt{\dfrac{\text{ا} + \text{لا}}{\text{لا}}}$　　۳۲- $\sqrt{\dfrac{\text{ا} - \text{لا}}{\text{لا}}}$

۳۳- $\dfrac{۱}{\text{لا}\sqrt{۸\,\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{لا} - ۱}}$　　۳۴- $\dfrac{۱}{(\text{لا} + ۱)\sqrt{\text{لا}^{۲} - ۱}}$　　۳۵- $\dfrac{۱}{(\text{لا} - ۱)\sqrt{\text{لا}^{۲} - ۱}}$

۳۶- $\frac{1}{(\text{لا}+1)\sqrt{1-\text{لا}^2}}$ ۳۷- $\frac{1}{(\text{لا}-1)\sqrt{1-\text{لا}^2}}$ ۳۸- $\frac{1}{\text{لا}\,(\text{لا}^{\text{ن}}+1)}$

۳۹- $\frac{1}{(\text{لا}^2+2\text{لا}+3)^{\frac{3}{2}}}$ ۴۰- $\frac{1}{1+\text{مس لا}}$ ۴۱- $\frac{\text{جم لا}+\text{جب لا}}{\text{جب لا}+2\,\text{جم لا}}$

۴۲- ذیل کے تکملوں کی قیمتیں دریافت کرو

(۱) $\int_0^{\pi} \frac{\text{فرلا}}{5+3\,\text{جم لا}}$ (۲) $\int_0^{2\pi} \frac{\text{فرلا}}{5+3\,\text{جم لا}}$ (۳) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{فرلا}}{5+3\,\text{جب لا}}$

(۴) $\int_0^{\pi} \frac{\text{فرلا}}{1-2\text{ر}\,\text{جم لا}+\text{ر}^2}$ $(\text{ر}^2 \neq 1)$ (۵) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{فرلا}}{1+\text{جم عہ}\,\text{جم لا}}$ $(0<\text{عہ}<\pi)$

(۶) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{فرلا}}{1-\text{ک}^2\,\text{جب}^2\text{لا}}$ $(\text{ک}^2<1)$ (۷) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{فرلا}}{3+5\,\text{جم لا}}$

۴۳- $\int_{-1}^{+1} \frac{\text{جب عہ}\,\text{فرلا}}{1-2\text{لا}\,\text{جم عہ}+\text{لا}^2}$ کی قیمت دریافت کرو

(۱) جبکہ $0<\text{عہ}<\pi$ (۲) جبکہ $\pi<\text{عہ}<2\pi$

۴۴- اگر ا مثبت ہو اور ب تعداداً کم ہو ا سے تو ابدال $\text{جم طہ} = \frac{\text{ا جم لا}+\text{ب}}{\text{ا}+\text{ب جم لا}}$ کے ذریعہ ثابت کرو کہ

$$\int_0^{\pi} \frac{\text{فرلا}}{(\text{ا}+\text{ب جم لا})^{\text{ن}}} = \frac{1}{(\text{ا}^2-\text{ب}^2)^{\text{ن}-\frac{1}{2}}} \int_0^{\pi} (\text{ا}-\text{ب جم طہ})^{\text{ن}-1}\,\text{فرطہ}$$

۴۵- جو منحنی مساوات $\text{ا ما}^2 = \text{لا}^2(\text{ا}-\text{لا})$ سے تعبیر ہوتا ہے اُسے مرتسم کرو اور اس کے حلقہ کا رقبہ دریافت کرو۔

۴۶- جو منحنی مساوات $\text{ا}^2\text{ما}^2 = \text{لا}^2(\text{ا}^2-\text{لا}^2)$ سے تعبیر ہوتا ہے اُسے مرتسم کرو اور اُسکے دونوں حلقوں کا رقبہ دریافت کرو۔

۴۷- جس منحنی کی قطبی مساوات $\text{ر} = \text{ا}+\text{ب جم طہ}$ ہے اُسے مرتسم کرو $\text{ا} > \text{ب}$۔ اور جو رقبہ یہ گھیرتا ہے اُسے محسوب کرو۔

۴۸- ایک قطع ناقص کی کارتیسزی مساوات $\text{ا لا}^2+2\text{ھ لا ما}+\text{ب ما}^2=1$ ہے،

اسکو قطبی محددوں میں تحویل کرکے اس کا رقبہ دریافت کرو ۔

$$\text{رقبہ ہے} \; ۲\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \tfrac{۱}{۲}\,\text{ر}^{۲}\,\text{فرطہ} = \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{فرطہ}}{\text{ا جم}^{۲}\text{طہ} + ۲\,\text{ھ جب طہ جم طہ} + \text{ب جب}^{۲}\text{طہ}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\text{اب} - \text{ھ}^{۲}}}$$

۹ ـ تکمل بالحصص

ـ تکمل کا دوسرا عام طریقہ ہے جسے ہم "تکمل بالحصص" کہینگے ـ یہ مسئلہ حاصل ضرب کے تفرق کے مسئلہ کے مماثل ہے اگر ہم تکمل کو لاحقہ سے اور تفرق کو زیرے سے تعبیر کریں، مثلاً

$$\text{ع}_{۱} = \int \text{ع فرلا} \;،\; \text{ع}' = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$$

تو حاصل ضرب کو تفرق کرنے کے قاعدہ کے موافق

$$\frac{\text{فر(ع}_{۱}\text{و)}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرع}_{۱}}{\text{فرلا}}\,\text{و} + \text{ع}_{۱}\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$$

یعنی $\frac{\text{فر(ع}_{۱}\text{و)}}{\text{فرلا}} = \text{ع و} + \text{ع}_{۱}\text{و}'$ چونکہ $\frac{\text{فرع}_{۱}}{\text{فرلا}} = \text{ع}$

$$\text{پس} \;\; \text{ع}_{۱}\text{و} = \int (\text{ع و} + \text{ع}_{۱}\text{و}')\,\text{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$= \int \text{ع و فرلا} + \int \text{ع}_{۱}\text{و}'\,\text{فرلا}$$

$$\text{اس لئے} \;\; \int \text{ع و فرلا} = \text{ع}_{۱}\text{و} - \int \text{ع}_{۱}\text{و}'\,\text{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

مساوات (۲) سے مسئلہ مطلوب حاصل ہوتا ہے، ایسا ممکن ہے کہ $\text{ع}_{۱}\text{و}'$ کا تکملہ ع و کے تکملہ کی نسبت زیادہ آسانی سے معلوم ہو سکے۔

محدود تکملہ کی صورت میں جبکہ نچلی حد ا ہو اور اوپر کی ب، (۱) کے جواب میں حاصل ہوگا

$$\left[\text{ع}_{۱}\text{و}\right]_{\text{ا}}^{\text{ب}} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} (\text{ع و} + \text{ع}_{۱}\text{و}')\,\text{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

اور (۲) کی بجائے

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ع و فرلا} = \left[\text{ع}_1\ \text{و}\right]_{\text{ا}}^{\text{ب}} - \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ع}_1\ \text{وَ فرلا} \quad \text{......(۴)}$$

جہاں علامت $\left[\text{ع}_1\ \text{و}\right]_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ سے مراد ہے کہ پہلے لا کی بجائے ب رکھا جائے پھر ا اور دوسرے نتیجہ کو پہلے سے تفریق کیا جائے۔

امثلہ ذیل سے مسئلہ کی اہمیت معلوم ہوگی۔

مثال ۱۔ $\int \text{لا جم لا فرلا}$ معلوم کرو

یہاں ہر دو لا اور جم لا کا تکمل معلوم ہو سکتا ہے، لیکن ہم فرض کرتے ہیں $\text{و} = \text{لا}$ چونکہ $\text{وَ} = 1$، پس

$$\int \text{لا جم لا فرلا} = \text{لا جب لا} - \int 1 \times \text{جب لا فرلا}$$
$$= \text{لا جب لا} + \text{جم لا}$$

مثال ۲۔ $\int \text{لا}^2\ \text{جم لا فرلا}$ معلوم کرو

یہاں بھی ہم فرض کرتے ہیں $\text{و} = \text{لا}^2$، چونکہ $\text{وَ} = 2\,\text{لا}$، نیا تکمل پرانے سے زیادہ سہل ہوگا

$$\int \text{لا}^2\ \text{جم لا فرلا} = \text{لا}^2\ \text{جب لا} - \int 2\,\text{لا جب لا فرلا}$$

مسئلہ پھر استعمال ہو سکتا ہے

$$\int 2\,\text{لا جب لا فرلا} = 2\,\text{لا}\,(-\text{جم لا}) - \int 2\,(-\text{جم لا})\ \text{فرلا}$$
$$= -2\,\text{لا جم لا} + 2\int \text{جم لا فرلا}$$
$$= -2\,\text{لا جم لا} + 2\ \text{جب لا}$$

اس لئے $\int \text{لا}^2\ \text{جم لا فرلا} = \text{لا}^2\ \text{جب لا} + 2\,\text{لا جم لا} - 2\ \text{جب لا}$

مثال ۳۔ $\int \text{ق}^{\text{الا}}\ \text{جم}\,(\text{ب لا} + \text{ج})\ \text{فرلا}$ اور $\int \text{ق}^{\text{الا}}\ \text{جب}\,(\text{ب لا} + \text{ج})\ \text{فرلا}$ معلوم کرو

ایک تکملہ کے دریافت کرنے کے عمل میں ہم دوسرے تکملہ کو بھی معلوم کر لیتے ہیں۔

فرض کرو کہ

$$\text{ف} = \int \text{و}^{\text{الا}}\,\text{جم}(\text{ب لا} + \text{ج})\,\text{فرلا}\text{، }\quad \text{ق} = \int \text{و}^{\text{الا}}\,\text{جب}(\text{ب لا} + \text{ج})\,\text{فرلا}$$

اِس صورت میں ہم و کو کسی ایک جزو ضربی کے مساوی لے سکتے ہیں

$$\text{ف} = \frac{\text{و}^{\text{الا}}}{\text{ا}}\,\text{جم}(\text{ب لا} + \text{ج}) - \int \frac{\text{و}^{\text{الا}}}{\text{ا}} \times \left[-\text{ب جب}(\text{ب لا} + \text{ج})\right]\text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{و}^{\text{الا}}\,\text{جم}(\text{ب لا} + \text{ج})}{\text{ا}} + \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\int \text{و}^{\text{الا}}\,\text{جب}(\text{ب لا} + \text{ج})\,\text{فرلا}\text{۔}$$

$$= \frac{\text{و}^{\text{الا}}\,\text{جم}(\text{ب لا} + \text{ج})}{\text{ا}} + \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{ق}$$

اس لئے $\text{ا ف} - \text{ب ق} = \text{و}^{\text{الا}}\,\text{جم}(\text{ب لا} + \text{ج})$ ....(۱)

اسی طرح ق پر عمل کرنے سے حاصل ہوگا

$\text{ب ف} + \text{ا ق} = \text{و}^{\text{الا}}\,\text{جب}(\text{ب لا} + \text{ج})$ ....(۲)

(۱) اور (۲) کو ف، ق کے لئے حل کرنے سے

$$\text{ف} = \int \text{و}^{\text{الا}}\,\text{جم}(\text{ب لا} + \text{ج})\,\text{فرلا} = \frac{\text{و}^{\text{الا}}\left[\text{ا جم}(\text{ب لا} + \text{ج}) + \text{ب جب}(\text{ب لا} + \text{ج})\right]}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}$$

$$\text{ق} = \int \text{و}^{\text{الا}}\,\text{جب}(\text{ب لا} + \text{ج})\,\text{فرلا} = \frac{\text{و}^{\text{الا}}\left[\text{ا جب}(\text{ب لا} + \text{ج}) - \text{ب جم}(\text{ب لا} + \text{ج})\right]}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}$$

یہ دو تکملے ریاضی طبیعیات میں خاص اہمیت رکھتے ہیں۔

مثال (۴) $\int \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\,\text{فرلا}$ اور $\int \sqrt{\text{لا}^2 \pm \text{ا}^2}\,\text{فرلا}$ معلوم کرو

یہاں متکمل میں صرف ایک جزو ضربی ہے، لیکن ہم اکائی کو دوسرا جزو ضربی قرار دیکر اسے ع کے مساوی رکھہ سکتے ہیں، فرض کرو کہ ع = ۱

اسلئے $\int \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\,\text{فرلا} = \text{لا}\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2} - \int \text{لا} \times \frac{-\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}}\,\text{فرلا}$

$= \text{لا}\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2} - \int \frac{-\text{لا}^2}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}}\,\text{فرلا}$ .....(۱)

اب ہم لکھتے ہیں $\frac{-\text{لا}^2}{\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}} = \frac{(\text{ا}^2-\text{لا}^2)-\text{ا}^2}{\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}}$

$$= \sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2} - \frac{\text{ا}^2}{\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}}$$

اس میں بائیں جانب کی پہلی رقم خود دیا ہوا تکمل ہے اور دوسری رقم کا تکملہ $\text{ا}^2\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ ہے
(۱) میں درج کرو اور تکملہ کو دائیں طرف لے آؤ، ۲ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوگا

$$\int\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}\;\text{فرلا} = \frac{1}{2}\,\text{لا}\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2} + \frac{1}{2}\,\text{ا}^2\,\text{جب}^{-1}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)$$

یہی نتیجہ دفعہ ۷ مثال (۱) میں حاصل کیا گیا تھا۔

اسی طرح سے یہ ثابت ہوسکتا ہے کہ

$$\int\sqrt{\text{لا}^2\pm\text{ا}^2}\;\text{فرلا} = \frac{1}{2}\,\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2\pm\text{ا}^2} \pm \frac{1}{2}\,\text{ا}^2\,\text{لوک}\left(\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^2\pm\text{ا}^2}\right)$$

مقابلہ کرو دفعہ ۷، مثال ۲ کے ساتھ۔

اوپر کی جبروی تحویل اکثر کارآمد ثابت ہوتی ہے، اسی طرح کی تحویل مثلثی تفاعلوں کو تکمل کرنے میں استعمال کی جاتی ہے، (دفعہ ۱۰، مثال ۲، ۳)

جملہ درجہ دوم $\sqrt{\text{ا}\,\text{لا}^2+\text{ب}\,\text{لا}+\text{ج}}$ کو مثل دفعہ ۶ تحویل کرنے اور $\text{لا}+\text{ا}=\text{ع}$ رکھنے سے ہم تکمل کرسکتے ہیں۔

مثال ۵- $\int \text{لوک}\,\text{لا}\;\text{فرلا}$ معلوم کرو

$$\int \text{لوک}\,\text{لا}\;\text{فرلا} = \text{لا}\,\text{لوک}\,\text{لا} - \int \text{لا}\,\frac{1}{\text{لا}}\;\text{فرلا} = \text{لا}\,\text{لوک}\,\text{لا} - \text{لا}$$

۱۰- متواتر تحویل۔

مثال ۱- فرض کرو کہ $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{و}^{\text{لا}}\;\text{فرلا}$، تکمل بالحصص سے

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{و}^{\text{لا}}\;\text{فرلا} = \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{و}^{\text{لا}} - \int \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{و}^{\text{لا}}\;\text{فرلا} = \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{و}^{\text{لا}} - \text{ن}\int \text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{و}^{\text{لا}}\;\text{فرلا}$$

یعنی $\text{ع}_{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{و}^{\text{لا}} - \text{ن}\,\text{ع}_{\text{ن}-۱}$

ن کی بجائے ن − ۱ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ع}_{\text{ن}-۱} = \text{لا}^{\text{ن}-۱}\,\text{و}^{\text{لا}} - (\text{ن}-۱)\,\text{ع}_{\text{ن}-۲}$$

$$\text{پس}\ \text{ع}_{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{و}^{\text{لا}} - \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{ن}(\text{ن}-۱)\,\text{ع}_{\text{ن}-۲}$$

اسی طرح عمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو تکمل $\text{ع}_{\text{ن}}$ بالآخر ع یعنی $\int \text{و}^{\text{لا}}\,\text{فرلا}$ پر یا $\text{و}^{\text{لا}}$ پر آکے منحصر ہوتا ہے۔ اگر ن مثبت صحیح عدد نہ ہو لیکن مثبت ہو تو $\text{ع}_{\text{ن}}$ ایک ایسے تکملہ پر آکے منحصر ہوتا ہے جس میں لا کا قوت نما مثبت کسر واجب ہے۔ اس صورت میں تکملہ معلومہ تفاعلوں کے ذریعہ محدود رقوم میں بیان نہیں ہوسکتا، لیکن آیندہ تحقیق کے لئے نہایت موزوں شکل میں آجاتا ہے۔

تکمل کے مندرجہ بالا طریقہ کو جس میں ایک تکملہ اسی قسم کے ایک اور تکملہ پر لا کے منحصر کیا جاتا ہے **متواتر تحویل** کا طریقہ کہتے ہیں۔

$\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جب}\,\text{لا}$، $\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم}\,\text{لا}$ کے تکملوں پر اسی طرح کا عمل ہوسکتا ہے۔

مثال ۲ − $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{جب}^{\text{ن}}\,\text{لا}\ \text{فرلا}$

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{جب}^{\text{ن}}\,\text{لا}\ \text{فرلا} = \int \text{جب}^{\text{ن}-۱}\,\text{لا} \times \text{جب}\,\text{لا}\ \text{فرلا}$$

$$= \text{جب}^{\text{ن}-۱}\,\text{لا}\,(-\text{جم}\,\text{لا}) - \int (\text{ن}-۱)\,\text{جب}^{\text{ن}-۲}\,\text{لا}\ \text{جم}\,\text{لا}\,(-\text{جم}\,\text{لا})\ \text{فرلا}$$

$$= -\text{جب}^{\text{ن}-۱}\,\text{لا}\ \text{جم}\,\text{لا} + (\text{ن}-۱)\int \text{جب}^{\text{ن}-۲}\,\text{لا}\ \text{جم}^{۲}\,\text{لا}\ \text{فرلا}$$

اب $\text{جم}^{۲}\,\text{لا} = ۱ - \text{جب}^{۲}\,\text{لا}$، $\text{جب}^{\text{ن}-۲}\,\text{لا}\ \text{جم}^{۲}\,\text{لا} = \text{جب}^{\text{ن}-۲}\,\text{لا} - \text{جب}^{\text{ن}}\,\text{لا}$

اسلئے $\text{ع}_{\text{ن}} = -\text{جب}^{\text{ن}-۱}\,\text{لا}\ \text{جم}\,\text{لا} + (\text{ن}-۱)\,\text{ع}_{\text{ن}-۲} - (\text{ن}-۱)\,\text{ع}_{\text{ن}}$

پس $\text{ع}_{\text{ن}} = -\frac{\text{جب}^{\text{ن}-1}\text{لا}\ \text{جم لا}}{\text{ن}} + \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\ \text{ع}_{\text{ن}-2}$ ...... (۱)

قوت نما ن بقدر ۲ کے کم ہو گیا ہے، ن کی بجائے ن - ۲ لکھنے سے

$$\text{ع}_{\text{ن}-2} = -\frac{\text{جب}^{\text{ن}-3}\text{لا}\ \text{جم لا}}{\text{ن}-2} + \frac{\text{ن}-3}{\text{ن}-2}\ \text{ع}_{\text{ن}-4}$$

پس $\text{ع}_{\text{ن}} = -\frac{\text{جب}^{\text{ن}-1}\text{لا}\ \text{جم لا}}{\text{ن}} - \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\ \frac{\text{جب}^{\text{ن}-3}\text{لا}\ \text{جم لا}}{\text{ن}-2} + \frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)}{\text{ن}(\text{ن}-2)}\ \text{ع}_{\text{ن}-4}$

اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو اسی طرح تحویل کو جاری رکھنے سے ہم قوت نما کو ایک بنا سکتے جبکہ ن طاق ہو اور صفر بنا سکتے ہیں جبکہ ن جفت ہو۔

$$\text{ع}_1 = \int \text{جب لا فر لا} = -\text{جم لا} \quad \text{اور} \quad \text{ع}_0 = \int \text{جب}^0\text{لا فر لا} = \text{لا}$$

اگر ن مثبت ہے لیکن صحیح عدد نہیں ہے تو $\text{ع}_{\text{ن}}$ کو یہاں تک تحویل کیا جا سکتا ہے کہ قوت نما ن مثبت یا منفی کسر واجب ہو جائے۔ ن کی منفی قیمتوں کے لئے دیکھو مثال ۴۔

ضابطہ (۱) کی نہایت کارآمد صورت اُس وقت پیدا ہوتی ہے جبکہ تکملہ کو حدود صفر اور $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان لیا جائے، اِس صورت میں (۱) ہو جاتا ہے

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{ن}}\text{لا فر لا} = \left[\text{ع}_{\text{ن}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[-\frac{\text{جب}^{\text{ن}-1}\text{لا}\ \text{جم لا}}{\text{ن}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\left[\text{ع}_{\text{ن}-2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{ن}-2}\text{لا فر لا}$$

چونکہ دوسری رقم دونوں حدود پر صفر ہوتی ہے۔

جس صورت میں ن طاق ہو $\text{ع}_{\text{ن}}$ کی آخری رقم ہوگی

$$\frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)\ldots\ldots 4\times 2}{\text{ن}(\text{ن}-2)\ldots\ldots 5\times 3}\ (-\text{جم لا})$$

اور جس صورت میں ن جفت ہو آخری رقم ہوگی

$$\frac{(ن-۱)(ن-۳)(ن-۵)......۳\times۱}{ن(ن-۲)(ن-۴)......۴\times۲}\ \pi$$

پس $\int_{ب}^{\pi/۲}$ جب^{ن} لا فرلا $= \frac{(ن-۱)(ن-۳)......۴\times۲}{ن(ن-۲)......۵\times۳}\times۱$ (ن طاق صحیح عدد)

$\int_{ب}^{\pi/۲}$ جب^{ن} لا فرلا $= \frac{(ن-۱)(ن-۳)......۳\times۱}{ن(ن-۲)......۴\times۲}\times\frac{\pi}{۲}$ (ن جفت صحیح عدد)

اگر $و_{ن} = \int$ جم^{ن} لا فرلا

تو $و_{ن} = \frac{جم^{ن-۱}لا\ جب\ لا}{ن} + \frac{ن-۱}{ن}\ و_{ن-۲}$

ضابطہ سے ثابت کرنا آسان ہے یا بالواسطہ محدود تکملہ کے مفہوم سے ظاہر ہے کہ

$\int_{ب}^{\pi/۲}$ جم^{ن} لا فرلا $= \int_{ب}^{\pi/۲}$ جب^{ن} لا فرلا

جب^{ن} لا اور جم^{ن} لا کی ترسیموں کو دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ

$\int_{ب}^{\pi}$ جب^{ن} لا فرلا $= ۲\int_{ب}^{\pi/۲}$ جب^{ن} لا فرلا

$\int_{ب}^{\pi}$ جم^{ن} لا فرلا $= ۲\int_{ب}^{\pi/۲}$ جم^{ن} لا فرلا [جبکہ ن جفت صحیح عدد ہو]

$= ۰$ [جبکہ ن طاق صحیح عدد ہو]

اسی طرح نتائج ذیل یا اسی طرح کے اور نتائج بآسانی ثابت ہو سکتے ہیں۔

$\int_{ب}^{۲\pi}$ جب^{۳} لا فرلا $= ۰$، $\int_{ب}^{۲\pi}$ جم^{۶} لا فرلا $= ۴\int_{ب}^{\pi/۲}$ جم^{۶} لا فرلا

نیز ملاحظہ ہو قاعدہ جو مثال ۳ میں دیا گیا ہے۔

مثال ۳۔ ف(م، ن) $= \int_{ب}$ جب^{م} لا جم^{ن} لا فرلا

ملاحظہ ہو کہ ف (م، ن) میں پہلا حرف جب لا کا قوت نما ہے اور دوسرا جم لا کا۔ اختصار کی خاطر جب لا کو س سے اور جم لا کو ص سے تعبیر کرو تب

$$\text{ف}(\text{م، ن}) = \int \text{س}^{\text{م}}\,\text{ص}^{\text{ن}}\,\text{ولا} = \int \text{س}^{\text{م}}\,\text{ص} \times \text{ص}^{\text{ن}-۱}\,\text{ولا}$$

چونکہ ص مشتق ہے س کا، $\text{س}^{\text{م}}\,\text{ص}$ کا تکملہ $\frac{\text{س}^{\text{م}+۱}}{\text{م}+۱}$ ہے پس

$$\text{ف}(\text{م، ن}) = \text{ص}^{\text{ن}-۱}\,\frac{\text{س}^{\text{م}+۱}}{\text{م}+۱} + \frac{\text{ن}-۱}{\text{م}+۱}\int \text{س}^{\text{م}+۲}\,\text{ص}^{\text{ن}-۲}\,\text{ولا} \quad\text{.....(ا)}$$

لیکن $\text{س}^{\text{م}+۲}\,\text{ص}^{\text{ن}-۲} = \text{س}^{\text{م}}(۱-\text{ص}^۲)\,\text{ص}^{\text{ن}-۲} = \text{س}^{\text{م}}\,\text{ص}^{\text{ن}-۲} - \text{س}^{\text{م}}\,\text{ص}^{\text{ن}}$

اس جملہ میں پہلی رقم ف (م، ن - ۲) کا تکمل ہے اور دوسری ف (م، ن) کا۔ (ا) میں مندرج کرو، ف (م، ن) کو دائیں جانب لے جاؤ اور $\frac{\text{م}+۱}{\text{م}+\text{ن}}$ سے ضرب دو، اس طرح حاصل ہوگا

$$\text{ف}(\text{م، ن}) = \frac{\text{س}^{\text{م}+۱}\,\text{ص}^{\text{ن}-۱}}{\text{م}+\text{ن}} + \frac{\text{ن}-۱}{\text{م}+\text{ن}}\,\text{ف}(\text{م، ن}-۲) \quad\text{......(ا)}$$

پس معلومہ تکملہ ایک اور ایسے تکملہ کے حل پر موقوف ہوتا ہے جس میں قوت نما م وہی رہتا ہے لیکن دوسرا قوت نما بقدر ۲ کے کم ہو جاتا ہے۔

اگر ہم تکمل کو اس طرح $\text{س}^{\text{م}-۱} \times \text{س}\,\text{ص}^{\text{ن}}$ لکھتے اور حسب التمام کو تکمل کرتے تو ہمیں یہ ملتا

$$\text{ف}(\text{م، ن}) = -\frac{\text{س}^{\text{م}-۱}\,\text{ص}^{\text{ن}+۱}}{\text{م}+\text{ن}} + \frac{\text{م}-۱}{\text{م}+\text{ن}}\,\text{ف}(\text{م}-۲\text{، ن}) \quad\text{...(ب)}$$

اس میں م بقدر ۲ کے کم ہو گیا ہے اور ن نہیں بدلا۔

اب ہم تحویل کو اس صورت میں جاری رکھیں گے جبکہ م، ن مثبت صحیح عدد ہوں اور اس طرح محدود تکملہ کی قیمت صفر سے $\frac{\pi}{۲}$ تک معلوم کریں گے۔

اگر ن طاق ہو تو (ا) سے ف (م، ن) تکملہ ف (م، ۱) پر منحصر ہوتا ہے، (ب) کے ذریعہ ف (م، ۱) تکملہ ف (۱، ۱) پر منحصر ہوتا ہے اگر م طاق ہو اور

ف (۰، ۱) پر اگر م جفت ہو۔

اگر ن جفت ہو تو (۱) سے ف (م، ن) تکملہ ف (م، ۰) پر موقوف ہوتا ہے لیکن ف (م، ۰) مثال ۲ کا تکملہ ہے جبکہ ن کی بجائے م لکھا جائے، پس مثال ۲ (۱) سے، ف (م، ۰) تکملہ ف (۱، ۰) پر منحصر ہوتا ہے اگر م طاق ہو اور ف (۰، ۰) پر منحصر ہوتا ہے اگر م جفت ہو۔

پس ف (م، ن) تحویل کے بعد ذیل کے چار تکملوں میں سے کسی ایک پر موقوف ہو سکتا ہے۔

$$\text{ف}(۱،۱) = \int \text{س ص فرلا} = \tfrac{۱}{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{لا} \quad،\quad \text{ف}(۰،۱) = \int \text{ص فرلا} = \text{جب لا}$$

$$\text{ف}(۱،۰) = \int \text{س فرلا} = -\,\text{جم لا} \quad،\quad \text{ف}(۰،۰) = \int ۱\ \text{فرلا} = \text{لا}$$

اگر تکملہ کو حدود صفر اور $\frac{\pi}{۲}$ کے درمیان محسوب کیا جائے تو مندرجہ بالا چار تکملوں کی قیمتیں بالترتیب ہوتی ہیں $\frac{۱}{۲}$، ۱، ۱، $\frac{\pi}{۲}$

طالب علم اب ثابت کرے کہ ذیل کا قاعدہ درست ہے

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{م}}\,\text{لا}\ \text{جم}^{\text{ن}}\,\text{لا فرلا} = \frac{(\text{م}-۱)(\text{م}-۳)(\text{م}-۵)\ldots(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۳)(\text{ن}-۵)\ldots}{(\text{م}+\text{ن})(\text{م}+\text{ن}-۲)(\text{م}+\text{ن}-۴)\ldots} \times \text{عہ}$$

جہاں عہ = ۱ سوائے اُس صورت کے جبکہ م اور ن دونوں جفت صحیح عدد ہیں، مؤخر الذکر صورت میں عہ = $\frac{\pi}{۲}$، مخفی نہ رہے کہ اوپر اور نیچے کے تینوں سلسلوں کے اجزائے ضربی کو اُس حد تک جاری رکھنا چاہئے جب تک کہ مثبت رہیں۔ یہ بھی دیکھا جائے کہ ہر سلسلہ کے اجزا بقدر ۲ کے کم ہوتے ہیں۔ اس قاعدہ میں مثال ۲ کے تکملے بھی شامل ہیں جو م (یا ن) کو صفر بنانے اور منفی اجزائے ضربی کو حذف کرنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{۲}\,\text{لا}\ \text{جم}^{۴}\,\text{لا فرلا} = \frac{۱\times۳\times۱}{۲\times۴\times۶} \times \frac{\pi}{۲} = \frac{\pi}{۳۲}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{۲}\,\text{لا}\ \text{جم}^{۴}\,\text{لا فرلا} = \frac{۱\times۳\times۱\times۳\times۵}{۲\times۴\times۶\times۸\times۱۰} \times \frac{\pi}{۲} = \frac{۳\pi}{۵۱۲}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{6}\text{لا}\ \text{جم}^{5}\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{۲\times۴\times۲\times۴\times۶}{۲\times۴\times۶\times۸\times۱۰\times۱۲}\times ۱ = \frac{۱}{۱۲۰}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{8}\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{۱\times۳\times۵\times۷}{۲\times۴\times۶\times۸}\times\frac{\pi}{۲} = \frac{۳۵\pi}{۲۵۶}$$

امثلہ ۲ اور ۳ کی خاص اہمیت اس وجہ سے ہے کہ کئی تکملے مناسب ابدال کے بعد اس شکل میں لائے جا سکتے ہیں، مثلاً اگر ہم ذیل کے تکملہ میں رکھیں لا = ا جب طہ جس سے

طہ = ۰ جبکہ لا = ۰ اور طہ = $\frac{\pi}{۲}$ جبکہ لا = ا تو حاصل ہوتا ہے

$$\int_{0}^{\text{ا}} \text{لا}^{2}(\text{ا}^{2}-\text{لا}^{2})^{\frac{3}{2}}\text{فرلا} = \text{ا}^{6}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\text{جب}^{2}\text{طہ}\ \text{جم}^{4}\text{طہ}\ \text{فرطہ} = \text{ا}^{6}\ \frac{۱\times۳\times۱}{۲\times۴\times۶}\cdot\frac{\pi}{۲} = \frac{\pi}{۳۲}\text{ا}^{6}$$

اگر ہم رکھیں لا = ا جب^{2} طہ ذیل کے سوال میں تو

$$\int_{0}^{\text{ا}} \text{لا}^{2}(\text{ا}-\text{لا})^{\frac{3}{2}}\text{فرلا} = ۲\,\text{ا}^{\frac{9}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\text{جب}^{5}\text{طہ}\ \text{جم}^{4}\text{طہ}\ \text{فرطہ} = ۲\,\text{ا}^{\frac{9}{2}}\ \frac{۱\times۳\times۲\times۴}{۱\times۳\times۵\times۷\times۹}$$

$$= \frac{۱۶}{۳۱۵}\text{ا}^{\frac{9}{2}}$$

مثال ۴ ۔ اگر ن منفی ہو تو $\text{ع}_{\text{ن}-2}$ میں قوت نما تعدادا ن سے بڑا ہوگا ۔
مثال ۲ (۱) میں فرض کرو کہ ن = − م جہاں م مثبت ہے، تب

$$\int\frac{\text{فرلا}}{\text{س}^{\text{م}}} = \frac{\text{ص}}{\text{م}\ \text{س}^{\text{م}+1}} + \frac{\text{م}+۱}{\text{م}}\int\frac{\text{فرلا}}{\text{س}^{\text{م}+2}}$$

اس لئے
$$\int\frac{\text{فرلا}}{\text{س}^{\text{م}+2}} = -\frac{\text{ص}}{(\text{م}+۱)\,\text{س}^{\text{م}+1}} + \frac{\text{م}}{\text{م}+۱}\int\frac{\text{فرلا}}{\text{س}^{\text{م}}}$$

اب رکھو م + ۲ = ن جہاں ن مثبت ہے اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$\int\frac{\text{فرلا}}{\text{جب}^{\text{ن}}\text{لا}} = -\frac{\text{جم لا}}{(\text{ن}-۱)\,\text{جب}^{\text{ن}-1}\text{لا}} + \frac{\text{ن}-۲}{\text{ن}-۱}\int\frac{\text{فرلا}}{\text{جب}^{\text{ن}-2}\text{لا}}$$

کئی صورتوں میں تکمل کا عمل ذیل کی تحویل سے آسان ہوجائیگا ۔

$$\frac{1}{\text{جب}^{\text{ن}}\text{لا}} = \frac{\text{جب}^2\text{لا} + \text{جم}^2\text{لا}}{\text{جب}^{\text{ن}}\text{لا}} = \frac{1}{\text{جب}^{\text{ن}-2}\text{لا}} + \frac{\text{جم لا}}{\text{جب}^{\text{ن}}\text{لا}} \times \text{جم لا}$$

لیکن ایسے تکملے ابتدائی حسابات میں چنداں ضروری نہیں۔ ایسی تحویلوں کا خاص منشا یہ ہے کہ ایک دفعہ تکمل بالحصص کا عمل کرنے کے بعد نیا قوت نما پرانے کی نسبت بقدر ۲ کے متفاوت ہو جائے۔ جب قوت نما منفی ہو تو اس میں زیادہ سہولت ہوتی ہے کہ تکمل سے قوت نما کو کم کرکے اس پر عمل تکمل کیا جائے۔

مثال ۵۔ $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{مس}^{\text{ن}}\text{لا}\ \text{فرلا}$

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{مس}^{\text{ن}-2}\text{لا}\,(\text{قط}^2\text{لا} - 1)\,\text{فرلا} = \int \text{مس}^{\text{ن}-2}\text{لا}\ \text{قط}^2\text{لا}\ \text{فرلا} - \text{ع}_{\text{ن}-2}$$

$$\text{پس}\quad \text{ع}_{\text{ن}} = \frac{\text{مس}^{\text{ن}-1}\text{لا}}{\text{ن}-1} - \text{ع}_{\text{ن}-2}$$

تحویلی ضابطوں کی اور مثالیں مشقوں میں دی گئی ہیں لیکن کئی صورتوں میں مثلثی ابدال سے اکثر تکملے اوپر کی کسی نہ کسی ایک شکل میں لائے جا سکینگے۔

مشق ۳

امثلہ ۱ تا ۲۴ کو بلحاظ لا کے تکمل کرو

۱۔ $\text{لا و}^{\text{لا}}$ ۲۔ $\text{لا}^2\text{ و}^{\text{لا}}$ ۳۔ لا جب لا

۴۔ لا جم لا ۵۔ لا جب لا جم لا ۶۔ $\text{لا}^2\text{ جب لا}$

۷۔ $\text{لا}^{\text{ن}}\text{ لوک لا}\ (\text{ن} \neq -1)$ ۸۔ $\frac{1}{\text{لا}}\text{ لوک لا}$

۹۔ $\text{و}^{\text{لا}}\text{ جب}^2\text{لا}$ ۱۰۔ $\frac{\text{لا و}^{\text{لا}}}{(1+\text{لا})^2}$ ۱۱۔ $\text{لا و}^{-\text{لا}^2}$

۱۲۔ $\text{جب}^{-1}\text{لا}$ ۱۳۔ $\text{مس}^{-1}\text{لا}$ ۱۴۔ $\text{لا جب}^{-1}\text{لا}$

۱۵۔ $\text{لا مس}^{-1}\text{لا}$ ۱۶۔ $\sqrt{3 + 2\text{لا} - \text{لا}^2}$

۱۷- $\sqrt{\text{۳} + \text{۲}\text{لا} + \text{لا}^{2}}$ ۱۸- $\sqrt{\text{۲ا لا} - \text{لا}^{2}}$ ۱۹- $\sqrt{\text{۲ا لا} + \text{لا}^{2}}$

۲۰- $\dfrac{\text{لا}^{2}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{2}}}$ ۲۱- $\dfrac{\text{لا} + \text{جب لا}}{\text{۱} + \text{جم لا}}$

۲۲- $\text{قو}^{\text{۳لا}}\ \text{جم ۴لا}$ ۲۳- جمز لا جم لا ۲۴- جبز لا جب لا

۲۵- ذیل کے تکملوں کو محسوب کرو

(۱) $\int_{0}^{\pi/2} \text{جم}^{5}\ \text{لا فرلا}$ (۲) $\int_{0}^{\pi} \text{جب}^{6}\ \text{لا فرلا}$

(۳) $\int_{0}^{\pi/2} \text{جب}^{2}\ \text{لا جم}^{4}\ \text{لا فرلا}$ (۴) $\int_{0}^{\pi} \text{جب}^{3}\ \text{لا جم}^{4}\ \text{لا فرلا}$

(۵) $\int_{0}^{\pi/4} \text{جب}^{5}\ \text{لا جم}^{4}\ \text{لا فرلا}$ (۶) $\int_{0}^{\pi/4} \text{سر}^{6}\ \text{لا فرلا}$

۲۶- مثلثی ابدال سے ذیل کے تکملوں کی قیمتیں محسوب کرو

(۱) $\int_{0}^{\text{ا}} \text{لا}^{2} \sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}\ \text{فرلا}$ (۲) $\int_{0}^{\text{۲ا}} \text{لا} \sqrt{\text{۲ا لا} - \text{لا}^{2}}\ \text{فرلا}$

(۳) $\int_{0}^{\text{۲ا}} \text{لا}^{2} \sqrt{\text{۲ا لا} - \text{لا}^{2}}\ \text{فرلا}$

۲۷- $\int_{0}^{\text{ا}} \text{لا} \sqrt{\dfrac{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2} + \text{لا}^{2}}}\ \text{فرلا}$ کو تکمل کرو۔ درج کرو $\text{لا}^{2} = \text{ا}^{2}\ \text{جم ۲طہ}$

۲۸- اگر $\text{ف(م، ن)} = \int \text{لا}^{\text{م}} (\text{۱} - \text{لا})^{\text{ن}}\ \text{فرلا}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{ف(م، ن)} = \frac{\text{لا}^{\text{م}+1} (\text{۱} - \text{لا})^{\text{ن}}}{\text{م} + \text{ن} + \text{۱}} + \frac{\text{ن}}{\text{م} + \text{ن} + \text{۱}}\ \text{ف(م، ن} - \text{۱)}$$

اس طرح ابدال $\text{لا} = \text{جب}^{2}\ \text{طہ}$ سے تکملہ

$$\int_{0}^{1} \text{لا}^{\text{م}} (\text{۱} - \text{لا})^{\text{ن}}\ \text{فرلا}$$

کی قیمت معلوم کرو جہاں م، ن دونوں مثبت صحیح عدد ہیں۔

۲۹۔ اگر $ع_ن = \int \frac{فرلا}{(ا^۲+لا^۲)^ن}$ تو ثابت کرو کہ

$$ع_ن = \frac{لا}{(۲ن-۲)ا^۲(ا^۲+لا^۲)^{ن-۱}} + \frac{۲ن-۳}{(۲ن-۲)ا^۲} ع_{ن-۱}$$

۳۰۔ اگر $ع_ن = \int لا^ن \sqrt{ا^۲-لا^۲}\, فرلا$ تو ثابت کرو کہ

$$ع_ن = -\frac{لا^{ن-۱}(ا^۲-لا^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{ن+۲} + \frac{ن-۱}{ن+۲} ا^۲ ع_{ن-۲}$$

۳۱۔ اگر $ع_ن = \int لا^ن \sqrt{۲ا لا-لا^۲}\, فرلا$ تو ثابت کرو کہ

$$ع_ن = -\frac{لا^{ن-۱}(۲ا لا-لا^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{ن+۲} + \frac{۲ن+۱}{ن+۲} ا ع_{ن-۱}$$

لکھو $ع_ن = \int لا^{ن-۱}\{ا-(ا-لا)\} ر^{\frac{۱}{۲}} فرلا = ا ع_{ن-۱} - \frac{۱}{۲}\int لا^{ن-۱} \frac{فرر}{فرلا} ر^{\frac{۱}{۲}} فرلا$

جہاں $ر = ۲ا لا-لا^۲$ اور پھر حصوں سے تکمل کرو۔

۳۲۔ اگر $ع_ن = \int \frac{لا^ن فرلا}{\sqrt{۲ا لا-لا^۲}}$ تو ثابت کرو کہ

$$ع_ن = -\frac{لا^{ن-۱}\sqrt{۲ا لا-لا^۲}}{ن} + \frac{۲ن-۱}{ن} ا ع_{ن-۱}$$

۳۳۔ اگر م، ن مثبت صحیح عدد ہوں تو تکملہ

$$\int^{۱} (۱-لا^{\frac{۱}{ن}})^م فرلا$$

کی قیمت دریافت کرو۔

۳۴۔ مفصلہ ذیل کی قیمتیں معلوم کرو

(۱) $\int_{0}^{\text{ا}} \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\ \text{فرلا}$ (۲) $\int_{0}^{\text{ا}} \sqrt{2\text{الا} - \text{لا}^2}\ \text{فرلا}$

۳۵۔ زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ پر ایک نقطہ ن (ضا، ما) ہے،

اس کا نصف و مر اور معین مت ہے اور ضا، ما دونوں مثبت ہیں، اگر ن کے قریب کا راس ا ہو تو ثابت کرو کہ رقبہ ا م ن

$$= \frac{1}{2}\text{ضا ما} - \frac{1}{2}\text{اب لوک}\left(\frac{\text{ضا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)$$

اور قطاع و ا ن کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{2}\text{اب لوک}\left(\frac{\text{ضا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)$$

۳۶۔ منحنی $\text{ما}^2 = (\text{لا} - 1)(\text{لا} - 3)^2$ کو مرتسم کرو اور اس کے بند حلقے کا رقبہ دریافت کرو۔

۳۷۔ منحنی $\text{ا}^2\text{ما}^2 = \text{لا}^3(2\text{ا} - \text{لا})$ کو مرتسم کرو جہاں ا مثبت ہے اور تمام رقبہ جو اس سے گھرا ہوا ہے اُسے معلوم کرو۔

۳۸۔ زنجیرہ $\text{ما} = \frac{1}{2}\text{ا}\left(\text{قو}^{\frac{\text{لا}}{\text{ا}}} + \text{قو}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ا}}}\right)$ کی قوس کا طول معلوم کرو جبکہ قوس کو منحنی پر کے نقطہ ج سے ناپنا شروع کیا جائے جہاں لا = ۰ ثابت کرو کہ جو رقبہ دونوں محوروں، منحنی اور ن پر کے معین کے درمیان گھر جاتا ہے وہ قوس ج ن کا ا گنا ہے۔

۳۹۔ خط صنوبری (قلب نما) $\text{ر} = \text{ا}(1 - \text{جم طہ})$ کی قوس کا طول معلوم کرو جبکہ قوس کو مبدأ سے ناپا جائے۔

۴۰۔ لولبی $\text{ر} = \text{ا طہ}$ کی قوس کا طول معلوم کرو اس شرط کے ماتحت کہ اس = ۰ جبکہ ر = ۰

۴۱ - ہولی $\text{ر} = ۱$ تو طہ م عمل کی قوس کا طول معلوم کرو
جبکہ $\text{س} = ۰$ اگر $\text{ط} = ۰$

۱۱ - جزوی کسور - کسی منطق کسر کو جزوی کسور میں تحلیل کرنے کے طریقوں کے

متعلق بحث جبر و مقابلہ کی اکثر کتب نصاب میں ملے گی، اس نظریہ کی مفصل بحث کے لئے طالب علم کرسٹل کے جبر و مقابلہ حصہ اول، باب ہشتم کی طرف رجوع کرے یہاں ہم صرف چند مثالیں حل کر دینگے - مجوزہ کسر کو کسر واجب فرض کیا جائیگا یعنی یہ فرض کیا جائیگا کہ اس کے شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجہ کی نسبت کم ہے، نیز یہ بھی فرض کیا جائیگا کہ کسر مفرد ترین رقوم میں بیان کرلی گئی ہے -

فرض کرو کہ مجوزہ کسر $\frac{\text{فا}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})}$ ہے جہاں $\text{فا}(\text{لا})$ اور $\text{ف}(\text{لا})$ لا کے منطق صحیح تفاعل ہیں - $\text{ف}(\text{لا})$ کو حقیقی مفرد اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں تحلیل کرلیا جا سکتا ہے جہاں ہر ایک جزو ضربی لا کا خطی تفاعل ہو یا دو درجی لیکن خواہ یہ خطی ہو یا دو درجی یہ اس حاصل ضرب میں کئی مرتبہ تکرار پا سکتا ہے -

$\frac{\text{فا}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})}$ کو جزوی کسور کے مجموعہ میں ایک اور صرف ایک طرح تحلیل کرسکتے ہیں، یہ جزوی کسریں ذیل کے نمونوں پر مشتمل ہونگی -

(۱) $\text{ف}(\text{لا})$ کے ہر ایسے خطی جزو ضربی $\text{لا} - \text{عہا}$ کے مماثل جو تکرار نہیں پاتا جزوی کسر اس شکل $\frac{۱}{\text{لا} - \text{عہا}}$ کی ہوگی -

(۲) $\text{ف}(\text{لا})$ کے ہر ایسے خطی جزو ضربی $(\text{لا} - \text{بہا})$ کے مماثل جو ر مرتبہ تکرار پاتا ہے ر جزوی کسریں ذیل کی شکلوں پر مشتمل ہونگی

$$\frac{\text{ب}_۱}{(\text{لا} - \text{بہا})} + \frac{\text{ب}_۲}{(\text{لا} - \text{بہا})^۲} + \ldots\ldots + \frac{\text{ب}_{\text{ر}-۱}}{(\text{لا} - \text{بہا})^{\text{ر}-۱}} + \frac{\text{ب}_\text{ر}}{(\text{لا} - \text{بہا})^\text{ر}}$$

(۳) $\text{ف}(\text{لا})$ کے ہر ایسے ثنائی جزو ضربی $\text{لا}^۲ + \text{جہ}\,\text{لا} + \text{ل}$ کے مماثل جو تکرار

نہیں پاتا جزوی کسر اس شکل $\frac{\text{ج}\,\text{لا} + \text{د}}{\text{لا}^2 + \text{جہ}\,\text{لا} + \text{لہ}}$ کی ہوگی۔

(۳) ف (لا) کے ہر ایسے ثنائی جزو ضربی $(\text{لا}^2 + \text{جہ}\,\text{لا} + \text{لہ})^{\text{ر}}$ کے مماثل جو ر مرتبہ تکرار پاتا ہے، جزوی کسریں ذیل کی شکلوں پر مشتمل ہونگی

$$\frac{\text{ج}_{\text{ر}}\,\text{لا} + \text{د}_{\text{ر}}}{(\text{لا}^2 + \text{جہ}\,\text{لا} + \text{لہ})^{\text{ر}}} + \frac{\text{ج}_{\text{ر}-1}\,\text{لا} + \text{د}_{\text{ر}-1}}{(\text{لا}^2 + \text{جہ}\,\text{لا} + \text{لہ})^{\text{ر}-1}} + \dots + \frac{\text{ج}_1\,\text{لا} + \text{د}_1}{\text{لا}^2 + \text{جہ}\,\text{لا} + \text{لہ}}$$

ہروں ا، ب، ج … وغیرہ کے دریافت کرنے کا طریقہ ذیل کی مثالوں سے معلوم ہوگا۔

مثال ۱۔ $\frac{\text{لا}^2}{(\text{لا}^2 - 1)(\text{لا} - 2)}$، نسب نما میں کوئی جزو ضربی تکرار نہیں پاتا، اسلئے

$$\frac{\text{لا}^2}{(\text{لا} + 1)(\text{لا} - 1)(\text{لا} - 2)} = \frac{\text{ا}}{\text{لا} + 1} + \frac{\text{ب}}{\text{لا} - 1} + \frac{\text{ج}}{\text{لا} - 2}$$

کسروں سے خالی کرو۔ اس طرح

$$\text{لا}^2 = \text{ا}(\text{لا} - 1)(\text{لا} - 2) + \text{ب}(\text{لا} + 1)(\text{لا} - 2) + \text{ج}(\text{لا} + 1)(\text{لا} - 1)$$

یہ مساوات متطابقہ ہے، یہ لا کی ہر ایسی قیمت کے لئے پوری ہوگی جسے ہم مساوات میں درج کریں۔ رکھو $\text{لا} + 1 = 0$ یعنی $\text{لا} = -1$، اس طرح ب اور ج والی رقمیں صفر ہو جاتی ہیں اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$1 = \text{ا}(-1-1)(-1-2) \quad \text{یا} \quad \text{ا} = \frac{1}{6}$$

اسی طرح رکھو $\text{لا} = 1$، اس سے $\text{ب} = -\frac{1}{2}$ اور رکھو $\text{لا} = 2$ تو $\text{ج} = \frac{4}{3}$ اور

$$\frac{\text{لا}^2}{(\text{لا}^2 - 1)(\text{لا} - 2)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\text{لا} + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\text{لا} - 1} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\text{لا} - 2}$$

یا ا معلوم کرنے کے لئے اس کے نسب نما کے ساتھ دونوں طرف ضرب دے جاؤ اور پھر رکھو $\text{لا} + 1 = 0$، اس طرح

$$\text{ا} = \left[\frac{\text{لا}^{۲}}{(\text{لا}-۱)(\text{لا}-۲)}\right]_{\text{لا}=۱}$$

اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگر (لا - عہ)، ف (لا) کا ایک جزو ضربی ہو جو تکرار نہیں پاتا اور اسکے مماثل جزوی کسر $\frac{\text{ا}}{\text{لا}-\text{عہ}}$ ہو تو

$$\text{ا} = \left[\frac{\text{فا}(\text{لا})(\text{لا}-\text{عہ})}{\text{ف}(\text{لا})}\right]_{\text{لا}=\text{عہ}}$$

اگر ف (لا) = (لا - عہ) فہ (لا)

$$\text{فَ}(\text{لا}) = \text{فہ}(\text{لا}) + (\text{لا}-\text{عہ})\,\text{فَہ}(\text{لا})،\ \text{فَ}(\text{عہ}) = \text{فہ}(\text{عہ})$$

پس
$$\text{ا} = \left[\frac{(\text{لا}-\text{عہ})\,\text{فا}(\text{لا})}{(\text{لا}-\text{عہ})\,\text{فہ}(\text{لا})}\right]_{\text{لا}=\text{عہ}} = \frac{\text{فا}(\text{عہ})}{\text{فہ}(\text{عہ})} = \frac{\text{فا}(\text{عہ})}{\text{فَ}(\text{عہ})}$$

مثال ۲ - $\frac{\text{لا}^{۲}+\text{لا}+۲}{(\text{لا}-۱)^{۲}(\text{لا}^{۲}-\text{لا}+۱)}$، مکرر جزو ضربی $(\text{لا}-۱)^{۲}$ کے مماثل دو جزوی کسریں ہونگی اور چونکہ $\text{لا}^{۲}-\text{لا}+۱$ کے دو حقیقی جزو ضربی نہیں حاصل ہوسکتے، اس لئے اس کے مماثل نمونہ (۳) کی کسر ہوگی۔ پس

$$\frac{\text{لا}^{۲}+\text{لا}+۲}{(\text{لا}-۱)^{۲}(\text{لا}^{۲}-\text{لا}+۱)} = \frac{\text{ا}}{(\text{لا}-۱)^{۲}} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}-۱} + \frac{\text{ج}\,\text{لا}+\text{د}}{\text{لا}^{۲}-\text{لا}+۱}$$

، کسروں سے خالی کرنے سے حاصل ہوگا

$$\text{لا}^{۲}+\text{لا}+۲ = \text{ا}(\text{لا}^{۲}-\text{لا}+۱) + \text{ب}(\text{لا}-۱)(\text{لا}^{۲}-\text{لا}+۱) + (\text{ج}\,\text{لا}+\text{د})(\text{لا}-۱)^{۲}$$

رکھو لا = ۱، حاصل ہوتا ہے ا = ۴، ا والی رقم کو دائیں جانب لاؤ اور ا کو ۴ کے مساوی کہنے سے تحویل کرو۔ اب بائیں جانب (لا - ۱) جزو ضربی ہے اور چونکہ یہ مساوات متطابقہ ہے اسلئے (لا - ۱) دائیں جانب کے تحویل شدہ جملہ کا جزو ضربی ہونا چاہئے۔ اگر ایسا نہیں ہے تو عمل میں کوئی غلطی ہے۔ پس

$$-(۳\,\text{لا}-۲)(\text{لا}-۱) = \text{ب}(\text{لا}-۱)(\text{لا}^{۲}-\text{لا}+۱) + (\text{ج}\,\text{لا}+\text{د})(\text{لا}-۱)^{۲}$$

(لا - ۱) پہ تقسیم کرو اور رکھو لا = ۱، اس طرح ب = -۱، اب ب والی رقم کو دائیں

جانب لے جاؤ اور پھر (لا - ۱) پر تقسیم کرو۔

تب لا - ۳ = ج لا + د

چونکہ یہ مساوات متطابقہ ہے اسلئے ج = ۱، د = -۳، اسلئے

(لا² + لا + ۲) / ((لا - ۱)² (لا² - لا + ۱)) = ۴ / (لا - ۱)² - ۱ / (لا - ۱) + (لا - ۳) / (لا² - لا + ۱)

مثال ۳- (لا³ - ۲) / ((لا² + لا + ۲)² (لا² + لا + ۱))، چونکہ نسب نما کے حقیقی اجزا نہیں ہیں، اسلئے
نمونوں (۳) اور (۴) کی رو سے

(لا³ - ۲) / ((لا² + لا + ۲)² (لا² + لا + ۱)) = (ا لا + ب) / (لا² + لا + ۲)² + (ج لا + د) / (لا² + لا + ۲) + (ع لا + ف) / (لا² + لا + ۱)

کسروں سے خالی کرنے سے لا³ - ۲ = (ا لا + ب)(لا² + لا + ۱) + (ج لا + د)(لا² + لا + ۲)(لا² + لا + ۱)

+ (ع لا + ف)(لا² + لا + ۲)²

رکھو لا² + لا + ۲ = ۰، اور لا²، لا³ کو اس مساوات کے ذریعہ خطی تفاعلوں میں تحویل کرو۔

لا² + لا + ۱ = -۱، لا² = -لا - ۲، لا³ = -لا² - ۲لا = -لا + ۲ اور اسلئے -لا = -ا لا - ب
جس سے ا = ۱، ب = ۰۔ اب ا اور ب والی رقم کو دائیں جانب لے جاؤ اور
لا² + لا + ۲ پر تقسیم کرو جسے لازماً جزو ضربی ہونا چاہئے۔ اسلئے

-۱ = (ج لا + د)(لا² + لا + ۱) + (ع لا + ف)(لا² + لا + ۲)

رکھو لا² + لا + ۲ = ۰۔ اور پہلے کی طرح عمل کرو۔ اس طرح حاصل ہوتا ہے ج = ۰، د = ۱
اسلئے لا² + لا + ۲ پر تقسیم کرنے سے -۱ = ع لا + ف، ع = ۰، ف = -۱

اور کسر مجوزہ = لا / (لا² + لا + ۲)² + ۱ / (لا² + لا + ۲) - ۱ / (لا² + لا + ۱)

ان مثالوں سے سر ا، ب، ج وغیرہ معلوم کرنے کا طریقہ کافی طور پر واضح ہو گیا ہوگا نیز اور کئی طریقے طالب علم کو خود بخود سوجھینگے۔ جزوی کسور کے متعلق پوری بحث

کرسٹل کے جبر و مقابلہ میں ملیگی - اسکا حوالہ اوپر دیا گیا ہے -

۱۲- منطق تفاعلوں کا تکمل - اگر $\frac{\text{فا}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})}$ کسر واجب نہ ہو تو عمل تقسیم سے اس کو ایک منطق صحیح تفاعل اور ایک منطق کسر واجب کے مجموعہ کے مساوی لکھا جا سکتا ہے -

منطق صحیح تفاعل کا تکملہ ایک منطق صحیح تفاعل ہوگا -

$\frac{1}{(\text{لا}-\text{عہ})}$ کا تکملہ $\text{لوک}\,(\text{لا}-\text{عہ})$ ہے -

$\frac{\text{ب}}{(\text{لا}-\text{بہ})^{\text{ر}}}$ کا تکملہ جہاں ر ایک سے مختلف ہے $\frac{-\text{ب}}{(\text{ر}-1)(\text{لا}-\text{بہ})^{\text{ر}-1}}$ ہے -

$\frac{\text{ج لا}+\text{د}}{\text{لا}^2+\text{جہ لا}+\text{لہ}}$ کے تکملہ پر دفعہ ۸ میں بحث ہو چکی ہے، یہ اس شکل کا ہوگا

$$\text{لہ}_1\,\text{لوک}\,(\text{لا}^2+\text{جہ لا}+\text{لہ})+\text{مہ}_1\,\text{مس}^{-1}\frac{2\text{لا}+\text{جہ}}{\sqrt{4\text{لہ}-\text{جہ}^2}}$$

اس لئے اب ہم صرف $\frac{\text{ج لا}+\text{د}}{(\text{لا}^2+\text{جہ لا}+\text{لہ})^{\text{ر}}}$ پر غور کرینگے -

درجہ دوم کے جملہ کو اس شکل $\text{ی}=(\text{لا}+\text{عہ})^2+\text{یہ}^2$ میں لکھنے سے تکملہ ہوگا

$$\frac{1}{2}\,\text{ج}\int\frac{2(\text{لا}+\text{عہ})\,\text{ف لا}}{\text{ی}^{\text{ر}}}+(\text{د}-\text{عہ ج})\int\frac{\text{ف لا}}{\text{ی}^{\text{ر}}}$$

$$=\frac{-\text{ج}}{2(\text{ر}-1)\,\text{ی}^{\text{ر}-1}}+(\text{د}-\text{عہ ج})\int\frac{\text{ف لا}}{\text{ی}^{\text{ر}}}$$

عملی طور پر یہ زیادہ آسان ہے کہ $\frac{1}{\text{ی}^{\text{ر}}}$ کو ابدال $\text{لا}+\text{عہ}=\text{یہ مس طہ}$ سے تکمل کیا جائے لیکن نظری نقطہ نظر سے تحویلی ضابطہ حاصل کرنا موجب دلچسپی ہوگا -

اگر ہم $\frac{\text{لا} + \text{عہ}}{\text{ر}^{\text{ں}-۱}}$ کو تفرق کریں تو حاصل ہوگا

$$\frac{\text{ف}}{\text{فلا}}\left(\frac{\text{لا}+\text{عہ}}{\text{ر}^{\text{ں}-۱}}\right) = \frac{۱}{\text{ر}^{\text{ں}-۱}} - \frac{۲(\text{ں}-۱)(\text{لا}+\text{عہ})^{۲}}{\text{ر}^{\text{ں}}}$$

$$= \frac{-(۲\text{ں}-۳)}{\text{ر}^{\text{ں}-۱}} + \frac{۲(\text{ں}-۱)\text{بہ}^{۲}}{\text{ر}^{\text{ں}}}$$

جہاں $(\text{لا}+\text{عہ})^{۲}$ مساوی $\text{ر} - \text{بہ}^{۲}$ کے لکھا گیا ہے۔
تکمل کرنے اور ترتیب بدلنے سے

$$\int \frac{\text{فلا}}{\text{ر}^{\text{ں}}} = \frac{\text{لا}+\text{عہ}}{۲(\text{ں}-۱)\text{بہ}^{۲}\text{ر}^{\text{ں}-۱}} + \frac{۲\text{ں}-۳}{۲(\text{ں}-۱)\text{بہ}^{۲}}\int \frac{\text{فلا}}{\text{ر}^{\text{ں}-۱}}$$

اسلئے $\frac{\text{ج}\,\text{لا}+\text{د}}{\text{ر}^{\text{ں}}}$ کا تکملہ $\frac{۱}{\text{ر}}$ کے تکملہ پر جو مقلوب مثلثی تفاعل ہے منحصر ہوسکتا ہے۔

پس لا کے کسی منطق تفاعل کا تکملہ منطق تفاعلوں، لوکارتموں اور مقلوب مستدیر تفاعلوں کی رقوم میں بیان ہوسکتا ہے۔

جزوی کسور کے طریقہ سے تکمل کرنے میں بہت محنت اور طول عمل ہوتا ہے، جزوی کسوروں میں تحلیل کرنے سے پہلے طالب علم کو یہ دیکھ لینا چاہئے کہ آیا تکملہ کسی طرح کے ابدال سے سادہ شکل میں لایا جاسکتا ہے یا نہیں۔

مثلاً $\int \frac{\text{لا}^{۳}\,\text{فلا}}{\text{لا}^{۴} - \text{لا}^{۲} + ۱} = \frac{۱}{۲}\int \frac{\text{ع}\,\text{فع}}{\text{ع}^{۲} - \text{ع} + ۱}$ جہاں $\text{ع} = \text{لا}^{۲}$

اور ع والی کسر کے ساتھ عمل کرنا لا والی کسر کی نسبت زیادہ آسان ہے۔

۱۳ — غیر منطق تفاعل

اب ہم ایک دو ایسی صورتوں پر غور کرینگے جن میں متکمل غیر منطق تفاعل ہے۔

(۱) جب متکمل میں صرف لا کی کسور قوتیں شریک ہوں تو فرض کرو کہ ان کسروں کے

نسبت نماؤں کا ذو اضعاف اقل ن ہے۔ پس اگر متکمل میں لا = ع^ن لکھا جائے تو اس ابدال سے نیا متکمل ع میں منطق ہو جائیگا۔

پس اگر لا = ع^٦ تو

$$\int \frac{لا^{\frac{1}{2}} \, فر لا}{1+لا^{\frac{1}{3}}} = \int \frac{ع^3 \times ٦ ع^5 فر ع}{1+ع^2} = ٦\int \frac{ع^8 فر ع}{1+ع^2}$$

$$= ٦\int \left(ع^6 - ع^4 + ع^2 - 1 + \frac{1}{1+ع^2}\right) فر ع$$

$$= ٦\left(\frac{ع^7}{7} - \frac{ع^5}{5} + \frac{ع^3}{3} - ع + مس^{-1} ع\right)$$

$$= ٦\left(\frac{1}{7} لا^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{5} لا^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{3} لا^{\frac{1}{2}} - لا^{\frac{1}{6}} + مس^{-1}(لا^{\frac{1}{6}})\right)$$

(٢) جب متکمل میں $\sqrt{ا لا + ب}$ شریک ہو لیکن کسی طرح کا اور اصم شامل نہ ہو تو ابدال ا لا + ب = ع^٢ سے نیا متکمل ع میں منطق ہو جائے گا۔

(٣) جب متکمل میں صرف $\sqrt{ا لا^2 + ب لا + ج}$ شریک ہو لیکن کسی طرح کا اور اصم شامل نہ ہو تو تکملہ ایک منطق تفاعل کے تکملہ میں اس طرح تحویل ہو سکتا ہے

صورت اول۔ فرض کرو کہ ا مثبت ہے، اصم کو اس شکل میں لکھو

$$\sqrt{ا}\,\sqrt{لا^2 + ف لا + ق}، \quad ف = \frac{ب}{ا}، \quad ق = \frac{ج}{ا}$$

فرض کرو کہ $\sqrt{لا^2 + ف لا + ق} = ع - لا$، پس مربع اٹھانے اور لا کے لئے حل کرنے سے

$$لا = \frac{ع^2 - ق}{٢ع + ف}، \quad \frac{فر لا}{فر ع} = \frac{٢ع(٢ع+ف) - ٢(ع^2 - ق)}{(٢ع+ف)^2}$$

$$= \frac{٢(ع^2 + ف ع + ق)}{(٢ع + ف)^2}$$

نیا تکمل صریحاً ع میں منطق ہوگا۔

صورت دوم ۔ فرض کرو کہ ا منفی ہے، ما کے حقیقی ہونے کے لئے ضروری ہے کہ $\text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}$ کے خطی اجزائے ضربی حقیقی ہوں کیونکہ اگر یہ حقیقی نہ ہوں تو جملہ درجہ دوم لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے منفی ہوگا اور اس لئے ما خیالی ہوگا۔
اب چونکہ (-ا) مثبت ہے، اس لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{ما} = \sqrt{-\text{ا}}\,\sqrt{(\text{لا} - \text{عہ})(\text{بہ} - \text{لا})}$$

تخصیص کی خاطر فرض کرو کہ بہ > عہ (جبریہ لحاظ سے) اور فرض کرو کہ

$$\text{ع} = +\sqrt{\frac{\text{لا} - \text{عہ}}{\text{بہ} - \text{لا}}}$$

$$\text{تب}\quad \text{ع}^2 = \frac{\text{لا} - \text{عہ}}{\text{بہ} - \text{لا}}$$

$$\text{لا} = \frac{\text{عہ} + \text{بہ}\,\text{ع}^2}{1 + \text{ع}^2}\text{،}\quad \text{بہ} - \text{لا} = \frac{\text{بہ} - \text{عہ}}{1 + \text{ع}^2}\text{،}\quad \text{لا} - \text{عہ} = \frac{(\text{بہ} - \text{عہ})\,\text{ع}^2}{\text{ع}^2 + 1}$$

$$\text{ما} = \sqrt{-\text{ا}}\,(\text{بہ} - \text{عہ})\frac{\text{ع}}{1 + \text{ع}^2}\text{،}\quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}} = \frac{2(\text{بہ} - \text{عہ})\,\text{ع}}{(1 + \text{ع}^2)^2}$$

نیا تکمل صریحاً ع میں منطق ہوگا۔

صورت (۲) اور (۳) میں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ سب اصلیں مثبت ہیں (دیکھو دفعہ ۱۴)

اوپر کی تحلیل سے ظاہر ہے کہ اگر ما، $\sqrt{\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}}$ کے مساوی ہو یا $\sqrt{\text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}}$ کے اور تکمل ف (لا، ما) ہر دو لا، ما کا منطق تفاعل ہو تو ف (لا، ما) کا تکمل ہر صورت میں ایک منطق تفاعل کے تکمل میں تحویل ہو سکتا ہے اس لئے (دفعہ ۱۱) اس کے تکمل میں صرف منطق تفاعلوں کو لارتھموں یا مقلوب مستدیر تفاعلوں کی ضرورت ہوتی ہے۔

(۴) فرض کرو کہ تکمل $\text{لا}^{\text{م}}\,(\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}$ ہے۔

(ا) اگر ف مثبت صحیح عدد ہو تو $(ا + ب\, لا^{ن})^{ف}$ کو پھیلاؤ۔

(ب) یہ اندراج کر کے دیکھو $ع = ا + ب\, لا^{ن}$ جس سے حاصل ہوتا ہے

$$لا = \frac{1}{ب^{\frac{1}{ن}}} (ع - ا)^{\frac{1}{ن}} ، \quad \frac{ف لا}{ف ع} = \frac{(ع - ا)^{\frac{1}{ن} - 1}}{ن\, ب^{\frac{1}{ن}}}$$

اور تکمل ہو جاتا ہے

$$\frac{1}{ن\, ب^{\frac{م+1}{ن}}} \int ع^{ف} (ع - ا)^{\frac{م+1}{ن} - 1} ف ع$$

پس اگر $\frac{م+1}{ن}$ مثبت صحیح عدد ہو تو جملہ ثنائی کو پھیلایا جا سکتا ہے اور تکمل محدود ارقام میں حاصل ہو سکتا ہے۔

(ج) اگر $\frac{م+1}{ن}$ مثبت صحیح عدد نہ ہو تو فرض کرو کہ $لا = \frac{1}{و}$، تکمل ہو جاتا ہے

$$- \int و^{-م - ن ف - 2} (ب + ا و^{ن})^{ف} ف و$$

یہاں م کی بجائے $-(م + ن ف + 2)$ ہے، اسلئے اگر

$\frac{-(م + ن ف + 1)}{ن}$ مثبت صحیح عدد ہو یعنی $\frac{م+1}{ن} + ف$ منفی صحیح عدد ہو تو تکمل محدود ارقام میں حاصل ہو سکتا ہے۔ ابدال اس صورت میں ہوگا

$$ع = ب + ا و^{ن} = ب + ا لا^{-ن}$$

۲۱۔ اس بحث سے معلوم ہوگا کہ تکمل ایک حد تک اتفاقی عمل ہے، عام نتائج بذریعہ دفعات ۱۲ اور ۱۳ میں حاصل کئے گئے ہیں۔ ہم نے دیکھا ہے کہ تکمل جب کبھی عمل پذیر ہو سکتا ہے تو ہمیں معلومہ تکمل کو مختلف طریقوں سے چند معیاری صورتوں میں تحویل کرنا پڑتا ہے۔ دفعہ ۱۳ کی صورتوں کے لئے بھی اکثر اوقات یہ زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے کہ عام مسئلہ کو استعمال کرنے کی بجائے ہم کوئی خاص طریقہ اختیار کریں۔ بندیوں کو تکمل میں زیادہ دقت اس وجہ سے ہوتی ہے کہ انہیں جبریہ اور مثلثی

اعمال میں پوری مشق اور مہارت نہیں ہوتی، معیاری صورتوں کو یاد کر لینے کے بعد متغیر کی تبدیلی اور تکمیل بالخصوص کے دو اصولوں پر حاوی ہو جانا چاہیئے، لیکن یاد رہے کہ جو طالب علم ابتدائی قسم کی مثلثی اور جبریہ تحویلوں پر پوری قوت اور عبور نہیں رکھتا وہ خاص خاص صورتوں میں خاص خاص ترکیبیں اختیار کرنے کی وجوہات کو سمجھنے سے قاصر رہیگا، علاوہ اس کے اُسے ہر قدم پر ایسی مشکلات کا سامنا ہوگا جو احصا (کیلکولس) کی ذات سے تعلق نہیں رکھتیں بلکہ اُس کی جبریہ تعلیم کی کمی اور کوتاہی کی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں۔

تکملہ جبکہ منحصر ہو متغیر کی سعت پر۔ ایک اور طرح کی مشکل قابل توجہ ہے اور وہ یہ ہے کہ تکمل ایک سعت کے لئے ایک شکل رکھتا ہے اور دوسری وسعت کے لئے دوسری شکل مثلاً $\frac{1}{\text{لا}}$ کا تکملہ لوک لا ہے اگر لا مثبت ہو اور لوک (- لا) ہے اگر لا منفی ہو، اس صورت میں ہم تکملہ کو اس شکل $\frac{1}{2}$ لوک لا^2 میں لکھ سکتے ہیں جو دونوں صورتوں پر مشتمل ہے دیکھو دفعہ ۸ مثال ۳ ایک اور صورت کے لئے۔

نیز جذر کی دوہری علامت تکلیف کا باعث ہو سکتی ہے، ہم نے دیکھا ہے کہ $\frac{1}{\text{ا} + \text{ب جم لا}}$ کے تکملہ کی دو شکلیں اسی دوہری علامت کی وجہ سے ہیں جو وقوع پذیر ہوتی ہے جبکہ مقلوب جیب التمام کو مماس مقلوب سے حاصل کیا جاتا ہے۔ اگر یہ مان لیا جائے کہ علامت جذر کے پہلے ہمیشہ مثبت علامت متصور کی جائیگی تو تحویل $\text{ف}\sqrt{\text{ق}} = \sqrt{\text{ف}^2\text{ق}}$ صرف اُسی صورت میں درست ہوگی جبکہ ف مثبت ہو، لیکن اگر ف منفی ہو تو لازماً $\text{ف}\sqrt{\text{ق}} = -\sqrt{\text{ف}^2\text{ق}}$

مشق ۴

امثلہ ۱ تا ۴ کو بلحاظ لا کے تکمل کرو۔

۱- $\frac{\text{لا}^2 - ۶\,\text{لا} - ۴}{(۲\text{لا}+۱)(\text{لا}+۲)(۳\text{لا}+۲)}$

۲- $\frac{۳۰\,\text{لا}^5}{(\text{لا}^2-۱)(\text{لا}^2-۴)}$

۳- $\frac{\text{لا}^2}{(\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{ج})}$

۴- $\frac{\text{لا}}{(\text{لا}+۱)^2(\text{لا}-۱)}$

۵- $\frac{۱}{لا^{۳}(لا-۱)}$ ۶- $\frac{۱}{(لا^{۲}-۱)^{۳}}$

۷- $\frac{لا}{(لا^{۲}-۱)^{۳}}$ ۸- $\frac{لا^{۲}+۱}{لا^{۳}+۱}$

۹- $\frac{لا^{۸}}{لا^{۲}+۱}$ ۱۰- $\frac{لا^{۲}+لا+۱}{لا^{۲}-لا+۱}$

۱۱- $\frac{لا^{۲}}{لا^{۴}+لا^{۲}-۲}$ ۱۲- $\frac{۱}{(لا^{۲}+ا^{۲})(لا^{۲}+ب^{۲})}$

۱۳- $\frac{لا}{(لا^{۲}+ا^{۲})(لا+ب^{۲})}$ ۱۴- $\frac{لا^{۲}}{(لا^{۲}+ا^{۲})(لا^{۲}+ب^{۲})}$

۱۵- $\frac{۱}{(لا-۱)(لا^{۲}+۱)^{۲}}$ ۱۶- $\frac{۱}{لا^{۴}+۱}$

۱۷- $\frac{لا^{۲}}{(لا^{۲}+۲لا+۵)^{۲}}$ ۱۸- $\frac{۱}{لا^{۴}(ا لا+ب)}$

۱۹- $\frac{جم\, لا}{۱۶+۹\, جب^{۲} لا}$ ۲۰- $\frac{۱}{۳\, جب\, لا+جب^{۳} لا}$

۲۱- $\frac{لا+۱}{(لا^{۲}+۴لا+۶)^{۳}}$ ۲۲- $\frac{لا^{۲}-ا^{۲}}{لا^{۴}+ا^{۲}لا^{۲}+ا^{۴}}$

۲۳- $\frac{۱}{(لا+۱)(۴لا^{۴}+۱۷لا^{۲}+۴)}$ ۲۴- $\frac{۱}{لا^{۲}(۱+لا^{۲})^{۲}}$

۲۵- تکملہ $\int \frac{فرلا}{(لا-ا)^{م}(لا-ب)^{ن}}$ کو تحویل کرو ذیل کے ابدال کی مدد سے

$ع=\frac{لا-ا}{لا-ب}$ اور اسکی قیمت معلوم کرو جبکہ م = ۳ اور ن = ۲

امثلہ ۲۶ تا ۳۷ کو بلحاظ لا کے تکمل کرو

۲۶- $\dfrac{\sqrt{\text{لا}}}{\text{۱} + \text{لا}}$

۲۷- $\dfrac{\text{۱}}{\sqrt{\text{لا}} + \sqrt[\text{۳}]{\text{لا}}}$

۲۸- $\dfrac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\sqrt{\text{لا} - \text{۱}}}$

۲۹- $\dfrac{\text{لا}}{(\text{ا} + \text{ب لا})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}}$

۳۰- $\dfrac{\text{۱}}{(\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}})\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}}$

۳۱- $\dfrac{\text{۱}}{(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}})\sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}}$

۳۲- $\dfrac{\text{۱}}{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{ا}}}$

۳۳- $\text{لا}^{\text{۳}}\sqrt{\text{ا} + \text{ب لا}^{\text{۲}}}$

۳۴- $\text{لا}^{\text{۲}}(\text{۱} + \text{لا}^{\frac{\text{۵}}{\text{۲}}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}$

۳۵- $\dfrac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۲}}\sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}}$

۳۶- $\dfrac{\text{۲ا} + \text{لا}}{\text{ا} + \text{لا}}\sqrt{\dfrac{\text{ا} - \text{لا}}{\text{ا} + \text{لا}}}$

۳۷- $\sqrt{\text{جس لا}}$

باب دوم

محدود تکملے ہندسی سوالات میں ان کا استعمال

۱۵- محدود تکملہ - اس دفعہ میں اور اگلی دو دفعات میں محدود تکملوں کے متعلق ہم چند ضروری مسائل بیان کرینگے -

مسئلہ ۱- محدود تکملہ صرف اپنی حدود کا تفاعل ہوتا ہے اور یہ تکمل کے متغیر کا تفاعل نہیں ہوتا -

تکملہ کے ہندسی مفہوم پر غور کرنے سے یہ مسئلہ ظاہر ہے - جب تک کہ علامت فا ایک ہی تفاعل کو تعبیر کرتی ہے فا(لا) کی ترسیم جبکہ لا فصلہ ہو وہی ہوگی جو فا(ع) کی ترسیم ہے جبکہ ع کو فصلہ مانا جائے - اس لئے

$$\int_{ا}^{ب} فا(لا)\, فرلا = \int_{ا}^{ب} فا(ع)\, فرع$$

نیز اگر $فا(لا) = عف_{لا}\, ف(لا)$ تو $فا(ع) = عف_{ع}\, ف(ع)$

اور ہر دو علامات ایک ہی جملہ $ف(ب) - ف(ا)$ کو تعبیر کرتی ہیں -

مسئلہ ۲- $\int_{ا}^{ب} فا(لا)\, فرلا = - \int_{ب}^{ا} فا(لا)\, فرلا$ ملاحظہ ہو دفعہ ۱

مسئلہ ۳- اگر $ا < ب$ اور فا(لا) تکمل کی سعت کے اندر لا کی ہر قیمت کے لئے مثبت ہو تو تکملہ $\int_{ا}^{ب} فا(لا)\, فرلا$ لازماً مثبت ہوگا اور صفر نہیں ہوگا - اگر فا(لا) منفی ہو تو تکملہ منفی ہوگا -

صریحاً پہلی صورت میں تکملہ جس رقبہ کو تعبیر کرتا ہے وہ مثبت ہے اور دوسری صورت میں

منفی ۔ اگر فا (لا) وقفہ (ا، ب) میں لا کی بعض قیمتوں کے لئے صفر ہو لیکن سب قیمتوں کے لئے صفر نہ ہو تو بھی ظاہر ہے کہ یہ مسئلہ درست رہیگا۔ اسی طرح کا مشاہدہ مسائل ۵، ۶، ۷ کی صورت میں صادق آئیگا۔
مثلاً اس طرح کی مساوات

$$\int_{0}^{2} \frac{فرلا}{(لا-1)^2} = \left[\frac{-1}{لا-1}\right]_{0}^{2} = -2$$

مہمل ہے ۔ اس اختلاف کی وجہ یہ ہے کہ مثبت متکمل لا کی قیمت ۱ کے لئے جو وقفہ (۰، ۲) کے اندر واقع ہے غیر مسلسل ہے ۔

مسئلہ ۴۔ $\int_{ا}^{ب} فا(لا)\,فرلا = \int_{ا}^{ج} فا(لا)\,فرلا + \int_{ج}^{ب} فا(لا)\,فرلا$

کیونکہ دائیں جانب کے تکملہ سے جو رقبہ تعبیر ہوتا ہے وہ بلحاظ مقدار اور علامت بائیں جانب کے تکملوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔
اسی طرح

$$\int_{ا}^{ب} فا(لا)\,فرلا = \int_{ا}^{ج} فا(لا)\,فرلا + \int_{ج}^{گ} فا(لا)\,فرلا + \int_{گ}^{ب} فا(لا)\,فرلا$$

اور ایسے ہی وقفہ (ا، ب) کے حصوں کی کسی تعداد کے لئے ۔
واضح ہو کہ درمیانی اعداد ج، گ ...... میں سے کوئی ایک یا زیادہ عدد وقفہ کے اعداد ا، ب میں سے جو بڑا ہے اس سے بڑے اور جو چھوٹا ہے اس سے چھوٹے ہو سکتے ہیں بشرطیکہ فا (لا) متغیر متبوع لا کی ان سب قیمتوں کے لئے بھی جو اس طرح زیر بحث آجاتی ہیں مسلسل ہو۔
مسئلہ ۵۔ اگر ا $<$ ب اور وقفہ (ا، ب) میں فا (لا) کی بڑی سے بڑی قیمت (جبریہ لحاظ سے) ع ہو اور چھوٹی سے چھوٹی ق تو

$$\int_{ا}^{ب} فا(لا)\,فرلا < ع(ب-ا) \text{ لیکن } > ق(ب-ا)۔$$

ع - فا (لا) اور فا (لا) - ق دونوں مثبت ہیں ۔ اسلئے

مسئلہ ۳ کی رو سے تکملے

$\int_{ا}^{ب}$ [ع - فا(لا)] فرلا اور $\int_{ا}^{ب}$ [فا(لا) - ق] فرلا -

یعنی $\int_{ا}^{ب}$ ع فرلا - $\int_{ا}^{ب}$ فا(لا) فرلا اور $\int_{ا}^{ب}$ فا(لا) فرلا - $\int_{ا}^{ب}$ ق فرلا

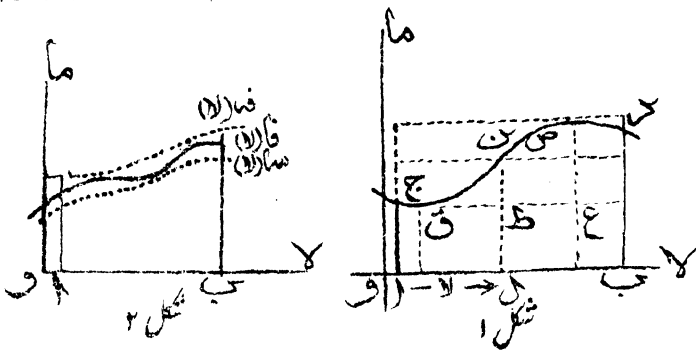
یا ع(ب-ا) - $\int_{ا}^{ب}$ فا(لا) فرلا اور $\int_{ا}^{ب}$ فا(لا) فرلا - ق(ب-ا)

دونوں مثبت ہیں۔ پس تکملہ ع(ب-ا) سے کم ہے اور ق(ب-ا) سے زیادہ ہے۔

تکملہ ط(ب-ا) کے مساوی ہوگا جہاں ط ایک ایسا عدد ہے جو ع سے کم ہے اور ق سے بڑا ہے۔ اب چونکہ فا(لا) مسلسل ہے اسلئے یہ لا کی ایک قیمت لا کے لئے جو ا، ب کے درمیان ہے ط کے مساوی ہوگا۔ اب قیمت لا اس شکل کی ہے ا + طہ(ب-ا) جہاں ۰ < طہ < ۱ (دفعہ ۳۷، حصۂ اول) اسلئے

$\int_{ا}^{ب}$ فا(لا) فرلا = فا(لا) (ب-ا) = فا{ا + طہ(ب-ا)} (ب-ا)

یہ مسئلہ ذیل کی شکل (۱) سے واضح ہوتا ہے۔ رقبہ ا ب کر ص ج سطح ع × ا ب سے کم ہے اور ق × ا ب سے زیادہ ہے یعنی یہ سطح ط × ا ب یا ن ل × ا ب کے مساوی ہے جہاں معیّن ل ن، ع سے کم ہے اور ق سے زیادہ ہے۔

ط یا فا(لا) کو بعض اوقات سعت (ب-ا) میں فا(لا) کی اوسط قیمت کہتے ہیں [ملاحظہ ہو دفعہ ۲۵]

مسئلہ ۶۔ اگر ا < ب اور وقفہ (ا، ب) میں لا کی ہر ایک قیمت کے لئے فا(لا) جبریہ لحاظ سے فہ(لا) سے کم ہو اور سا(لا) سے بڑا ہو تو

$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ فا(لا) فرلا < $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ فہ(لا) فرلا لیکن > $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ سا(لا) فرلا

اس مسئلہ کو مسئلہ ۵ کی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے چونکہ

فہ(لا) - فا(لا) اور فا(لا) - سا(لا)

دونوں مثبت ہیں۔ ہندسی ثبوت کے لئے دیکھو شکل (۲)

مسئلہ ۷۔ ا < ب اور فا(لا) دو تفاعلوں فہ(لا)، سا(لا) کے حاصل ضرب کے مساوی ہے، ان تفاعلوں میں سے ایک یعنی فہ(لا) وقفہ (ا، ب) میں لا کی ہر ایک قیمت کے لئے مثبت ہے۔ ثابت کرو کہ

$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ فہ(لا) × سا(لا) فرلا < ع $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ فہ(لا) فرلا

لیکن > ق $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ فہ(لا) فرلا

جہاں ع اور ق وقفہ (ا، ب) میں سا(لا) کی (جبریہ لحاظ سے) بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں ہیں۔

یہ مسئلہ اسی طرح ثابت ہوتا ہے جیسے مسئلہ ۵، کیونکہ ع - سا(لا) اور سا(لا) - ق اور اسلئے فہ(لا)[ع - سا(لا)] اور

فہ (لا) [سا (لا) - ق] مثبت ہیں

اگر وقفہ (ا، ب) کے اندر لا کی ہر قیمت کے لئے فہ (لا) منفی ہو تو

$$\int_{ا}^{ب} فہ(لا)\, سا(لا)\, فرلا > ع \int_{ا}^{ب} فہ(لا)\, فرلا$$

$$لیکن < ق \int_{ا}^{ب} فہ(لا)\, فرلا$$

چونکہ سا (لا) مسلسل ہے اسلئے دونوں صورتوں میں مسئلہ ۵ کی مانند لکھہ سکتے ہیں

$$\int_{ا}^{ب} فا(لا)\, سا(لا)\, فرلا = سا(لا_1) \int_{ا}^{ب} فہ(لا)\, فرلا \quad .....(۱)$$

جہاں $ا < لا_1 < ب$

مسئلہ بالا کو جو مساوات (۱) کی صورت میں بیان ہوا ہے اوسط قیمت کا پہلا (تکملی) مسئلہ کہتے ہیں۔ [ملاحظہ ہو مشق ۵ سوالات ۲۹ تا ۳۱]

مثال۔ اگر ن > ۲ تو ثابت کرو کہ تکملہ

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{فرلا}{\sqrt{1 - لا^{ن}}}$$ بڑا ہے ۵، سے اور چھوٹا ہے ۵۲۴، سے۔

تکمل کی سعت میں لا کی ہر قیمت کے لئے (سوائے قیمت صفر کے)

$$لا^2 > لا^{ن} > 0 \;،\; 1 - لا^2 < 1 - لا^{ن} < 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - لا^2}} > \frac{1}{\sqrt{1 - لا^{ن}}} > 1$$

پس تکملہ کم ہے $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{فرلا}{\sqrt{1 - لا^2}} = جب^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = ...۵۲۳،$ سے

لیکن بڑا ہے $\int_{0}^{\frac{1}{2}} 1\, فرلا = ۵،$ سے

۱۶ - مربوط تکملے

مسئلہ ۱۔ $\int_{۰}^{ا}$ فا(لا) فرلا = $\int_{۰}^{ا}$ فا(ا - لا) فرلا

فرض کرو کہ لا = ا - ع، تب فرلا = - فرع اور اگر لا = ۰ تو ع = ا
اور اگر لا = ا تو ع = ۰.

$\int_{۰}^{ا}$ فا(لا) فرلا = - $\int_{ا}^{۰}$ فا(ا - ع) فرع = $\int_{۰}^{ا}$ فا(ا - ع) فرع

اس آخری تکملہ میں ہم ع کی بجائے لا لکھ سکتے ہیں [دفعہ ۱۵، مسئلہ ۱]

اسکی کارآمد صورت یہ ہے $\int_{۰}^{\pi/۲}$ ف(جب لا) فرلا = $\int_{۰}^{\pi/۲}$ ف(جب[$\frac{\pi}{۲}$ - لا]) فرلا

= $\int_{۰}^{\pi/۲}$ ف(جم لا) فرلا

مسئلہ ۲۔ $\int_{-ا}^{ا}$ فا(لا) فرلا = $\int_{۰}^{ا}$ {فا(- لا) + فا(لا)} فرلا

کیونکہ $\int_{-ا}^{ا}$ فا(لا) فرلا = $\int_{-ا}^{۰}$ فا(لا) فرلا + $\int_{۰}^{ا}$ فا(لا) فرلا

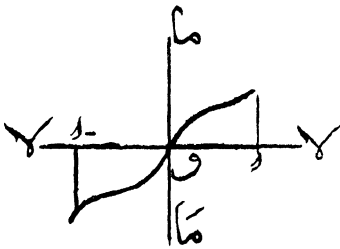
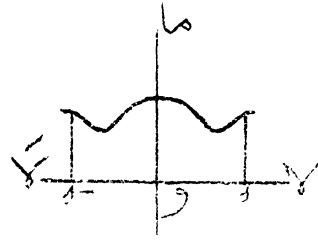
پہلے تکملہ میں فرض کرو کہ لا = - ع، اور یہ ہو جاتا ہے

- $\int_{ا}^{۰}$ فا(- ع) فرع = $\int_{۰}^{ا}$ فا(- ع) فرع = $\int_{۰}^{ا}$ فا(- لا) فرلا

جس سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

ظاہر ہے کہ $\int_{-ا}^{ا}$ فا(لا) فرلا = ۲ $\int_{۰}^{ا}$ فا(لا) فرلا اگر فا(- لا) = فا(لا)

اور $\int_{-ا}^{ا}$ فا(لا) فرلا = ۰ اگر فا(- لا) = - فا(لا)

شکل ۳، ا شکل ۳، ب

مذکورہ بالا نتائج ہندسی طریق پر اشکال بالا سے واضح ہوتے ہیں۔

مسئلہ ۳۔ $\int_{ب}^{ا}$ فا (لا) فرلا = $\int_{ب}^{\frac{ا}{۲}}$ {فا (لا) + فا (ا - لا)} فرلا

جس سے $\int_{ب}^{ا}$ فا (لا) فرلا = ۲ $\int_{ب}^{\frac{ا}{۲}}$ فا (لا) فرلا اگر فا (ا - لا) = فا (لا)

اور = اگر فا (ا - لا) = - فا (لا)

ثبوت اسی طرح کا ہے جیسے مسئلہ ۲ کے لئے۔ وقفہ کو حصوں (۰، $\frac{۱}{۲}$ ا) اور ($\frac{۱}{۲}$ ا، ا) میں تقسیم کرو اور دوسرے تکملہ میں رکھو لا = ا - ع

اس نتیجہ کی ایک خاص صورت یہ ہے

$\int_{ب}^{\pi}$ ف (جب لا) فرلا = ۲ $\int_{ب}^{\frac{\pi}{۲}}$ ف (جب لا) فرلا

مسئلہ ۴۔ فا (لا) ایک دوری تفاعل ہے اور اس کا دور ا ہے یعنی

فا (لا + ن ا)، ن کی تمام صحیح قیمتوں کے لئے فا (لا) کے مساوی ہے،

ثابت کرو کہ

$\int_{ب}^{د ا}$ فا (لا) فرلا = د $\int_{ب}^{ا}$ فا (لا) فرلا

جہاں د کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

شکل ۴

فرض کرو کہ و ب = ا = ب ج = ج ص۔
ترسیم کی نوعیت سے ظاہر ہے کہ رقبے و ب ک ھ، ب ج ل ک، ج ص م ل
سب مساوی ہیں پس اگر و ص = د × و ب تو رقبہ
و ص م ھ، و ب ک ھ کا د گنا ہوگا۔
باسعت د ا کو د حصوں میں تقسیم کرو جہاں ہر حصہ کا طول ا ہو۔ اس طرح

$$\int_{\text{ب}}^{\text{دا}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا} + \dots + \int_{\text{کا}}^{(\text{ک}+1)\text{ا}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا}$$

$$+ \dots + \int_{(\text{د}-1)\text{ا}}^{\text{دا}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا}$$

جس تکملہ میں حدود ک ا، (ک + ۱) ا ہیں اس میں فرض کرو کہ لا = ع + ک ا
تب فرلا = فرع اور جب، لا = ک ا، ع = ٠۔ اور جب، لا = (ک + ۱) ا
تو ع = ا، پس

$$\int_{\text{کا}}^{(\text{ک}+1)\text{ا}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \text{فا}(\text{ع}+\text{کا})\,\text{فرع} = \int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \text{فا}(\text{ع})\,\text{فرع}$$

$$= \int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا}$$ کیونکہ فا(ع + ک ا) = فا(ع)

اسی طرح مندرجہ بالا د تکملوں میں سے ہر ایک کی یہی قیمت ہے۔ پس نتیجہ ثابت ہوا۔
اگر د منفی ہو تو بھی نتیجہ اسی طرح کے استدلال سے ثابت ہو سکتا ہے۔
خاص صورت میں

$$\int_{\text{ب}}^{\text{۲دط}} \text{ف}(\text{جب لا})\,\text{فرلا} = \text{د}\int_{\text{ب}}^{\text{۲ط}} \text{ف}(\text{جب لا})\,\text{فرلا}$$

تکملوں کی قیمت معلوم کرنے میں یہ مسائل بہت کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

۱۷۔ لامتناہی حدود۔ لامتناہی متکمل۔ اب تک ہم نے یہ مانا ہے کہ تکملہ کی حدود محدود ہیں اور متکمل سعت مفروضہ میں متغیر کی ہر قیمت کے لئے مسلسل ہے اور اس لئے محدود ہے، لیکن بعض صورتوں میں انتہاؤں کے استعمال سے ان قیود کا ہٹا دینا ممکن ہے۔

(۱) لامتناہی حدود۔ اگر کسی تکملہ کی ایک حد لامتناہی ہو تو اسکی ہم یہ تعریف اختیار کرتے ہیں۔

$$\int_{\text{ا}}^{\infty} \text{فا(لا) فرلا} = \text{نہا}_{\text{ب}\to\infty} \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا(لا) فرلا}$$

$$\int_{-\infty}^{\text{ب}} \text{فا(لا) فرلا} = \text{نہا}_{\text{ا}\to-\infty} \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا(لا) فرلا}$$

بشرطیکہ ہر صورت میں انتہائیں $\text{ب}\to\infty$ اور $\text{ا}\to-\infty$ کے لئے محدود مقداریں ہوں۔

مثال ۱۔ $\int_{1}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2} = \text{نہا}_{\text{ب}\to\infty} \int_{1}^{\text{ب}} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2} = \text{نہا}_{\text{ب}\to\infty} \left(1-\frac{1}{\text{ب}}\right) = 1$

مثال ۲۔ $\int_{1}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \text{نہا}_{\text{ب}\to\infty} \int_{1}^{\text{ب}} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \text{نہا}_{\text{ب}\to\infty} \text{لوک ب}$

اس صورت میں لوک ب کی انتہا محدود نہیں ہے، اسلئے تکملہ بے معنی ہے۔

مثال ۳۔ $\int_{0}^{\infty} \text{قو}^{-\text{لا}}\ \text{جم لا فرلا}$

دفعہ ۹ مثال ۳ کی رو سے اوپر کا نامحدود تکملہ $\frac{1}{2}\text{قو}^{-\text{لا}}(-\text{جم لا}+\text{جب لا})$ کے مساوی ہے۔ اب ہمیں $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{قو}^{-\text{ب}}(-\text{جم ب}+\text{جب ب})$ کی انتہا $\text{ب}\to\infty$ کے لئے معلوم کرنا ہے۔ جم ب، جب ب ہمیشہ ایک سے کم رہتے ہیں اور $\text{قو}^{-\text{ب}}$ کی انتہا صفر ہے۔ پس تکملہ $\frac{1}{2}$ کے مساوی ہے۔

اپنے تکملوں میں $\text{لا}^{ن}\ \text{قو}^{-\text{الا}}$ کی انتہا معلوم کرنے کی اکثر ضرورت پڑتی ہے جبکہ $\text{لا} \to \infty$ اور ا مثبت ہو۔ دفعہ ۴۹ حصہ اول کی مدد سے یہ دیکھنا آسان ہے کہ

$$\text{نہا}_{\text{لا} \to \infty}\ \text{لا}^{ن}\ \text{قو}^{-\text{الا}} = ۰$$

نیز دیکھو مشق ۷ مثال ۹ حصہ اول۔

(ب) لامتناہی تکمل۔ فرض کرو کہ فا(لا)، ا اور ب کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لئے مسلسل ہے سوائے قیمت لا = ا کے جس کے لئے یہ لامتناہی ہوجاتا ہے ہم حدود ا اور ب کے درمیان فا(لا) کے تکملہ کی یہ تعریف اختیار کرتے ہیں۔

اگر ا کم ہو ب سے اور صہ مثبت ہو تو

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا(لا) فرلا} = \text{نہا}_{\text{صہ} \to ۰} \int_{\text{ا}+\text{صہ}}^{\text{ب}} \text{فا(لا) فرلا}$$

بشرطیکہ انتہا محدود مقدار ہو۔

اگر فا(لا) مسلسل ہو سوائے لا = ب پر اور صہ مثبت ہو تو

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا(لا) فرلا} = \text{نہا}_{\text{صہ} \to ۰} \int_{\text{ا}}^{\text{ب}-\text{صہ}} \text{فا(لا) فرلا}$$

مثال ۱۔ $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}}} = \text{نہا}_{\text{صہ} \to ۰} \int_{\text{صہ}}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}}} = \text{نہا}_{\text{صہ} \to ۰} (۲ - ۲\sqrt{\text{صہ}}) = ۲$

مثال ۲۔ $\int_{۰}^{\text{ا}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^۲ - \text{لا}^۲}} = \text{نہا}_{\text{صہ} \to ۰} \int_{۰}^{\text{ا}-\text{صہ}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^۲ - \text{لا}^۲}} = \text{نہا}_{\text{صہ} \to ۰}\ \text{جیب}^{-۱}\left(۱ - \frac{\text{صہ}}{\text{ا}}\right)$

اسکی انتہا صریحاً $\text{جیب}^{-۱}\ ۱$ یعنی $\frac{\pi}{۲}$ ہے۔

مثال ۳۔ $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^۲} = \text{نہا}_{\text{صہ} \to ۰} \int_{\text{صہ}}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^۲} = \text{نہا}_{\text{صہ} \to ۰} \left(\frac{۱}{\text{صہ}} - ۱\right)$

اس صورت میں انتہا محدود نہیں ہے اور تکملہ بے معنی ہے۔
اگر ا < ج < ب اور فا (لا) مسلسل ہو سوائے لا = ج کے لئے تو ا اور ب کے درمیان تکملہ مذکور کی تعریف یہ ہوگی۔
صہ اور صَہ دونوں مثبت ہیں

$$\int_{ا}^{ب} فا(لا)\,فرلا = \text{نہا}_{صہ \to ۰} \int_{ا}^{ج-صہ} فا(لا)\,فرلا + \text{نہا}_{صَہ \to ۰} \int_{ج+صَہ}^{ب} فا(لا)\,فرلا$$

بشرطیکہ دونوں انتہائیں الگ الگ محدود ہوں۔

مثال ۴۔ $\int_{۱}^{۲} \frac{فرلا}{\sqrt[۳]{لا^۲}} = \text{نہا}_{صہ \to ۰} (-۳\sqrt[۳]{صہ}+۳) + \text{نہا}_{صَہ \to ۰} (۳-۳\sqrt[۳]{صَہ})$

اس جگہ پہلی انتہا ۳ ہے اور دوسری بھی ۳ ہے۔ اسلئے تکملہ کی قیمت ۶ ہے۔

مثال ۵۔ $\int_{۰}^{۲} \frac{فرلا}{(لا-۱)^۲} = \text{نہا}_{صہ \to ۰} (\frac{۱}{صہ} - ۱) + \text{نہا}_{صَہ \to ۰} (-۱ + \frac{۱}{صَہ})$

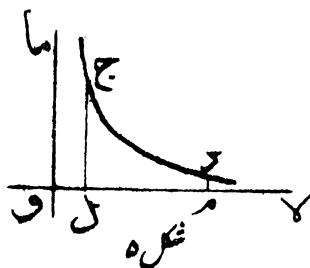
اس صورت میں انتہا محدود نہیں ہے اور تکملہ بے معنی ہے۔
لا متناہی تکمل یا لا متناہی حدود کی وجہ سے جو مشکلات پیدا ہوتی ہیں وہ اکثر اوقات متغیر کی مناسب تبدیلی سے رفع ہو جاتی ہیں۔ مثلاً مثال ۴ میں رکھو لا = اجب طہ۔ وغیرہ، کی صورجبریہ میں متغیر کی تبدیلی بالخصوص کارگر ثابت ہوگی۔

فا (لا) کی ترسیم کے ذریعہ تکملوں کی ان مستثنیٰ صورتوں کی ہندسی توضیح ہو سکتی ہے۔ فرض کرو کہ فا (لا) = $\frac{۱}{لا^ن}$ جہاں ن مثبت ہے۔

اس صورت میں محور لا متقارب ہے اور رقبہ ل م د ج (ن = ۱)

$$\int_{ا}^{ب} \frac{فرلا}{لا^ن} = \frac{۱}{ن-۱} \left(\frac{۱}{ا^{ن-۱}} - \frac{۱}{ب^{ن-۱}} \right)$$

جہاں و ل = ا اور و م = ب

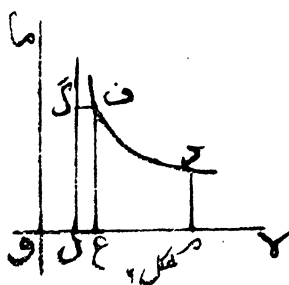
شکل ۵

اگر ن > ا تو رقبہ ل م ح ج مائل بہ $\frac{1}{(ن-1)\,ا^{ن-1}}$ ہوتا ہے جبکہ ب مائل بہ ∞ ہو لیکن اگر ۰ < ن < ا تو رقبہ مائل بہ ∞ ہوتا ہے کیونکہ $\frac{1}{ب^{ن-1}}$ یعنی $ب^{1-ن}$ مائل بہ ∞ ہوتا ہے۔ اگر ن = ا تو رقبہ ل م ح ج لوک $(\frac{ب}{ا})$ کے مساوی ہے اور اس لئے ب کے ساتھ مائل بہ ∞ ہوتا ہے

بخلاف اسکے فا (لا) = $\frac{1}{(لا-ا)^{ن}}$ پر غور کرو جہاں ن مثبت ہے۔

شکل ۶

اگر و ل = ا، ل ع = صہ، و م = ب

تو رقبہ ع م ح ف (ن ≠ ۱)

$$\int_{ا+صہ}^{ب} \frac{د لا}{(لا-ا)^{ن}} = \frac{1}{1-ن}\left\{(ب-ا)^{1-ن} - صہ^{1-ن}\right\}$$

اب اگر ۰ < ن < ۱ تو یہ رقبہ مائل بہ $\frac{(ب - ا)^{۱-ن}}{۱-ن}$ ہوتا ہے جبکہ صہ مائل بہ صفر ہو، لیکن اگر ن > ۱ تو رقبہ مائل بہ ∞ ہوتا ہے کیونکہ صہ$^{۱-ن}$ یعنی $\frac{۱}{صہ^{ن-۱}}$ مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے جبکہ صہ مائل بہ صفر ہو۔ اگر ن = ۱ تو رقبہ لوگ $\left(\frac{ب-ا}{صہ}\right)$ کے مساوی ہوتا ہے اور اس لئے یہ مائل بہ ∞ ہوتا ہے جبکہ صہ مائل بہ صفر ہو۔

مسئلہ ۲ دفعہ ۵۱ کی مدد سے یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ اگر د کے نزدیک فا (لا) کی شکل $\frac{فہ (لا)}{(لا - د)^{ن}}$ ہو جہاں فہ (لا) مسلسل ہے تو رقبہ ع م ر ف اور متناظر تکملہ دونوں ایک محدود انتہا رکھتے ہیں جبکہ ن مثبت کسر واجب ہو لیکن اگر فہ (د) صفر نہ ہو تو یہ انتہا لاتناہی ہوتی ہے جبکہ ن ایک کے مساوی یا ایک سے بڑا ہو۔

مستثنیٰ صورتوں کی مزید بحث اس کتاب کی حدود سے باہر ہے۔

مشق ۵

ذیل کے تکملوں کی قیمتیں معلوم کرو

۱- $\int_{۰}^{\infty} و^{-د لا}\, جم\, ب لا\, د لا \quad (د > ۰)$

۲- $\int_{۰}^{\infty} و^{-ا لا}\, جب\, ب لا\, د لا \quad (ا > ۰)$

۳- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{د لا}{لا^{۲} + ۲ لا + ۲}$ ۴- $\int_{۰}^{\infty} \frac{د لا}{(لا^{۲} + ا^{۲})^{۲}}$

۵- $\int_{۰}^{ا} \frac{لا^{۵}\, د لا}{\sqrt{ا^{۲} - لا^{۲}}}$ ۶- $\int_{۰}^{۲ا} \frac{لا\, د لا}{\sqrt{۲ ا لا - لا^{۲}}}$

۷- $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{(\text{لا}-\text{ا})(\text{ب}-\text{لا})}}$ [رکھو $\text{لا} = \text{ا}\,\text{جم}^2\,\text{طہ} + \text{ب}\,\text{جب}^2\,\text{طہ}$]

۸- $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \sqrt{(\text{لا}-\text{ا})(\text{ب}-\text{لا})}\ \text{فرلا}$ ۹- $\int_{-۱}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{(\text{ا}-\text{ب}\,\text{لا})\sqrt{۱-\text{لا}^2}}$ ، $(\text{ا} > \text{ب} >)$

۱۰- $\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{لا} + \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{لا}}$ ۱۱- $\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{فرلا}}{(\text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{لا} + \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{لا})^2}$

۱۲- $\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{جم}^2\,\text{لا}\ \text{جب}\,\text{لا}\ \text{فرلا}}{۱+\text{ز}^2\,\text{جم}^2\,\text{لا}}$ ۱۳- $\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{جم}^2\,\text{لا}\ \text{جب}\,\text{لا}\ \text{فرلا}}{\sqrt{۱+\text{ز}^2\,\text{جم}^2\,\text{لا}}}$

۱۴- $\int_{0}^{\frac{\pi}{۴}} \text{مس}\,\text{لا}\ \text{فرلا}$ ۱۵- $\int_{0}^{۱} \text{لوک}\,\text{لا}\ \text{فرلا}$

۱۶- $\int_{0}^{۱} \text{لا}^2\,\text{لوک}\,\text{لا}\ \text{فرلا}$

۱۷- اگر م اور ن مثبت ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\int_{0}^{۱} \text{لا}^{\text{م}}(۱-\text{لا})^{\text{ن}}\ \text{فرلا} = \int_{0}^{۱} \text{لا}^{\text{ن}}(۱-\text{لا})^{\text{م}}\ \text{فرلا}$$

۱۸- اگر ن مثبت ہو تو ثابت کرو کہ

$$\int_{0}^{\infty} \text{تو}^{-\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}}\ \text{فرلا} = \text{ن}\int_{0}^{\infty} \text{تو}^{-\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}\ \text{فرلا}$$

اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو اس تکملہ کی قیمت معلوم کرو

۱۹- اگر $\text{ع} = \int_{0}^{\pi} \frac{\text{لا}\ \text{جب}\,\text{لا}\ \text{فرلا}}{۱+\text{جم}^2\,\text{لا}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{ع} = \int_{0}^{\pi} \frac{\pi\ \text{جب}\,\text{لا}\ \text{فرلا}}{۱+\text{جم}^2\,\text{لا}} - \text{ع}$$

اس طرح ع کی قیمت معلوم کرو۔

۲۰۔ اگر $\text{ع} = \int_{۰}^{\pi} \frac{\text{لا فرلا}}{۱ + \text{ز جب لا}}$ جہاں $۰ < \text{ز} < ۱$

تو ثابت کرو کہ $\text{ع} = \int_{۰}^{\pi} \frac{\pi\ \text{فرلا}}{۱ + \text{ز جب لا}} - \text{ع}$

اس طرح ع کی قیمت معلوم کرو۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا(لا) فرلا} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا(ا + ب − لا) فرلا}$

۲۲۔ اگر ن مثبت صحیح ہو تو ثابت کرو کہ

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{\text{ن}}\,\text{لا فرلا} > \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{\text{ن}+۱}\,\text{لا فرلا}$$

اس سے ثابت کرو کہ $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{۲\times۲\times۴\times۴\times۶\times۶\times\ldots\ldots\times۲\text{ن}\times۲\text{ن}}{۱\times۳\times۳\times۵\times۵\times۷\times\ldots\ldots\times(۲\text{ن}-۱)(۲\text{ن}+۱)}$

اور اس کسر کے درمیان واقع ہوتا ہے جو شمار کنندہ اور نسب نما دونوں سے آخری جزو ضربی حذف کرنے سے حاصل ہو (یہ π کی قیمت والس کے نام کے ساتھ منسوب ہے)

۲۳۔ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$$\int_{۰}^{\text{ن}\pi} \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}\,\text{فرلا} = \text{ع}_{۰} - \text{ع}_{۱} + \text{ع}_{۲} - \text{ع}_{۳} + \ldots\ldots + (-۱)^{\text{ک}}\,\text{ع}_{\text{ک}} + \ldots\ldots \pm \text{ع}_{\text{ن}-۱}$$

جہاں $\text{ع}_{\text{ک}} = \int_{۰}^{\pi} \frac{\text{جب ع فرع}}{\text{ع} + \text{ک}\pi}$

ثابت کرو کہ $\text{ع}_{۰}$، $\text{ع}_{۱}$، $\text{ع}_{۲}$ ..... مثبت ہیں اور اگر ک ایک کے مساوی ہو یا ایک سے بڑا ہو تو $\text{ع}_{\text{ک}}$ کم ہوگا $\frac{۱}{\text{ک}}$ سے، $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ کی ترسیم کے ذریعہ ان نتائج کی تعبیر معلوم کرو۔ اور ثابت کرو کہ $\text{ن} \to \infty$ کے تکملہ کی انتہا محدود ہے۔

یہ انتہا $\frac{\pi}{۲}$ ہے لیکن اس کا ثبوت یہاں نہیں دیا جا سکتا۔

۲۴- ثابت کرو کہ $\int_{۰}^{۱} \frac{فرلا}{(۴-لا^{۲}+لا^{۳})^{\frac{۱}{۲}}} > \frac{۱}{۲}$ لیکن $< \frac{\pi}{۶}$

۲۵- ثابت کرو کہ $\int_{۰}^{۱} \frac{فرلا}{(۴-۳لا+لا^{۳})^{\frac{۱}{۲}}} < \int_{۰}^{۱} \frac{فرلا}{(۴-۳لا)^{\frac{۱}{۲}}} < \int_{۰}^{۱} \frac{۳لا+۸}{۱۶} فرلا$

یعنی $< \frac{۲}{۳}$ لیکن $> \frac{۱۹}{۳۲}$

۲۶- ثابت کرو کہ $\int_{۱}^{۲} \frac{فرلا}{(۴-۳لا+لا^{۳})^{\frac{۱}{۲}}} > ۰٫۵۳$ لیکن $< ۰٫۵۹۵$

رکھو لا = ۱ + ع، پھر $ع^{۳}+۳ع^{۲}+۲$ کی بجائے $۴ع^{۲}+۲$ اور $۳ع^{۲}+۲$ رکھو

۲۷- اگر عہ اور فہ دو مثبت حادے زاویے ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\int_{۰}^{فہ} \frac{فرلا}{(۱-جب^{۲}عہ\, جب^{۲}لا)^{\frac{۱}{۲}}} > فہ \text{ لیکن } < \frac{فہ}{(۱-جب^{۲}عہ\, جب^{۲}فہ)^{\frac{۱}{۲}}}$$

اگر عہ = فہ = $\frac{\pi}{۶}$ تو ثابت کرو کہ تکملہ ۰٫۵۲۳ اور ۰٫۵۴۱ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

اور طریقوں سے جن میں زیادہ صحت ممکن ہے اس تکملہ کی تقریبی قیمت ۰٫۵۲۹۴۳ حاصل ہوتی ہے۔

۲۸- ثابت کرو کہ

(۱) $\int_{۱}^{\infty} تو^{-لا^{۲}} فرلا < \int_{۱}^{\infty} لا\, تو^{-لا^{۲}} فرلا$ (۲) $\int_{۰}^{\infty} تو^{-لا^{۲}} فرلا < ۱ + \frac{۱}{۲تو}$

۲۹- اُس مجسم کے حجم پر غور کرنے سے جو محددوں کی سطحوں، مستویات لا = ا اور لا = ب اور اسطوانوں حا = فہ(لا) اور ی = سا(لا) کے درمیان گھرا ہوا ہے دفعہ ۱۵، مسئلہ ، کی ہندسی تعبیر معلوم کرو۔

۳۰- اگر سا(لا) مثبت ہو اور وقفہ (ا، ب) میں فہ(لا) مثبت گھٹنے والا

تفاعل ہو تو مثال ۲۹ کا جو مجسم ہے اسکے حجم پر غور کرنے سے ثابت کرو کہ

(۱) $\int_{ا}^{ب}$ فا(لا) سا(لا) فرلا = فا(ا) $\int_{ا}^{ضا}$ سا(لا) فرلا جہاں ا < ضا < ب

لیکن اگر فا(لا) مثبت، بڑھنے والا تفاعل ہو تو

(۲) $\int_{ا}^{ب}$ فا(لا) سا(لا) فرلا = فا(ب) $\int_{ضا}^{ب}$ سا(لا) فرلا جہاں ا < ضا < ب

۳- اگر لا کے ا سے ب تک بڑھنے سے فا(لا) بڑھے (جبریہ لحاظ سے) تو ثابت کرو کہ مثال ۳۰ (۱) میں فا(لا) کی بجائے فا(ب) - فا(لا) رکھا جا سکتا ہے لیکن اگر فا(لا) جبریہ لحاظ سے گھٹے تو مثال ۳۰ (۲) میں فا(لا) کی بجائے فا(ا) - فا(لا) رکھا جا سکتا ہے - ثابت کرو کہ اگر یہ ابدال عمل میں لائے جائیں تو ہر دو (۱) اور (۲) ہو جاتے ہیں

$\int_{ا}^{ب}$ فا(لا) سا(لا) فرلا = فا(ا) $\int_{ا}^{ضا}$ سا(لا) فرلا + فا(ب) $\int_{ضا}^{ب}$ سا(لا) فرلا

اس صورت میں فا(لا) مثبت ہو سکتا ہے یا منفی - اوپر کی مساوات میں جو مسئلہ بیان ہوا ہے اُسے اوسط قیمت کا دوسرا مسئلہ (تکملی) کہتے ہیں - یہ مسئلہ درست رہیگا اگر سا(لا) ہر دو مثبت اور منفی قیمتیں اختیار کرے اگرچہ اس صورت میں مسئلہ کی توضیح کے لئے مزید تشریح کی ضرورت ہوگی -

رقبہ سے توضیح کرو جبکہ سا(لا) = ۱

دفعہ ۱۸ - چند معیاری رقبے اور حجم -

اس دفعہ میں ہم چند مشہور نتائج جو اس سے قبل حاصل کئے جا چکے ہیں یا بآسانی ثابت ہو سکتے ہیں جمع کرینگے -

(۱) قائم مستدیر اسطوانہ - فرض کرو کہ قاعدہ کا نصف قطر ا ہے اور ارتفاع ف،

حجم = π ا^{2} ف، منحنی سطح = ۲ π ا ف

(۲) قائم مستدیر مخروط - فرض کرو کہ قاعدہ کا نصف قطر ا ہے، ارتفاع ف،

ضلع مائل = ل = $\sqrt{ا^2 + ف^2}$

$$حجم = \frac{1}{3}\pi ا^2 ف \text{، منحنی سطح} = \pi ا ل$$

مخروط ناقص کے لئے جس کا ارتفاع ف ہے، مائل ضلع ل اور سروں کے نصف قطر ا اور ب، حجم = $\frac{1}{3}\pi(ا^2 + اب + ب^2)ف$،
منحنی سطح = $\pi(ا + ب)ل$

فرض کرو کہ اسی مخروط کے قاعدہ کا رقبہ ق ہے، ارتفاع ف اور راس سے فاصلہ لا پر قاعدہ کے متوازی جو مخروطی تراش ہے اسکا رقبہ لا ہے

$$\text{تب } لا : ق = لا^2 : ف^2$$

کیونکہ متوازی تراشیں متشابہ ہوتی ہیں۔ فرض کرو کہ اس حصہ کا حجم ح ہے جس کا قاعدہ لا ہے اور ارتفاع لا۔ پہلے رتبہ کے صغاریات تک مف ح = لا مف لا اور $عف_{لا}\, ح = لا$، اس لئے کل مخروط کا حجم ہے

$$\int_0^{ف} لا\, ز لا = \frac{ق}{ف^2}\int_0^{ف} لا^2\, ز لا = \frac{1}{3} ق ف$$

مخروط ناقص کے لئے جس کا ارتفاع ف ہو اور سروں کے رقبے ا اور ب

$$حجم = \frac{1}{3}\left\{ا + \sqrt{اب} + ب\right\}ف$$

(۳) کرہ — فرض کرو کہ کرہ کا نصف قطر ر ہے۔ دفعہ ۵۸، مثال ۲ حصہ اول کی رو سے اس کروی ٹوپی کا حجم جس کا ارتفاع ف ہو = $\pi ف^2 (ر - \frac{1}{3} ف)$ اور ٹوپی کی کروی سطح = $2\pi ر ف$۔ اگر ان نتائج میں ف کو ۲ ر کے مساوی رکھا جائے تو کرہ کا حجم اور سطح بالترتیب $\frac{4}{3}\pi ر^3$ اور $4\pi ر^2$ حاصل ہوتے ہیں۔
یہ توجہ کے قابل ہے کہ کروی ٹوپی کی منحنی سطح اس اسطوانہ کی منحنی سطح کے مساوی ہے جس کا ارتفاع وہی ہے جو ٹوپی کا ہے اور جس کا قاعدہ کرہ کے بڑے دائرے کے مساوی ہے
اگر کروی قطاع کا حجم معلوم کرنا ہو تو ٹوپی کے حجم میں اس مخروط کا حجم جمع کیا جا سکتا ہے

جس کا راس کرہ کے مرکز پر ہو اور جس کا ارتفاع ر - ف ہو۔ پس حجم مطلوبہ ہے

$$\pi\, ف^2 (ر - \tfrac{1}{3} ف) + \tfrac{1}{3}\pi (2 ر ف - ف^2)(ر - ف)$$

$$= \tfrac{2}{3}\pi\, ر^2 ف = \tfrac{1}{3}\, س\, ر$$

جہاں س ٹوپی کی سطح ہے۔ یہ نتیجہ زیادہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے اگر ٹوپی کی سطح کو چھوٹے رقبوں کی بڑی تعداد میں تقسیم کیا ہوا فرض کریں۔ اس طرح قطاع کرہ ایسے مخروطوں کی ایک بڑی تعداد سے بنا ہوا متصور ہوگا جن میں سے ہر ایک کا ارتفاع ر ہے، پس قطاع کا حجم اس طرح بھی $\tfrac{1}{3}$ س ر ہوگا۔

(۴) ناقص۔ ناقص کے محور ۲ا، ۲ب ہیں، اس کا رقبہ

$$= 4\int_0^{ا} ما\, فرلا = \frac{4ب}{ا}\int_0^{ا}\sqrt{ا^2 - لا^2}\, فرلا = \pi\, ا\, ب$$

اس کرہ نما کا حجم جو ناقص کو محور اعظم ۲ا کے گرد پھرانے سے حاصل ہو

$$= 2\int_0^{ا}\pi\, ما^2\, فرلا = 2\pi\frac{ب^2}{ا^2}\int_0^{ا}(ا^2 - لا^2)\, فرلا = \tfrac{4}{3}\pi\, ا\, ب^2$$

اس کرہ نما کو انگوری یا لمبوترا کرہ نما کہا جا سکتا ہے۔ جب گردش کا محور محور اصغر ۲ب ہو تو کرہ نما چپٹا سیب کی شکل کا ہوگا، ایسے کرہ نما کا حجم

$$= 2\int_0^{ب}\pi\, لا^2\, فرما = 2\pi\frac{ا^2}{ب^2}\int_0^{ب}(ب^2 - ما^2)\, فرما = \tfrac{4}{3}\pi\, ا^2 ب$$

لمبوترے کرہ نما کی سطح ہے

$$2\int_0^{ا} 2\pi\, ما\, \frac{فرس}{فرلا}\, فرلا$$

جہاں

$$\left(\frac{فرس}{فرلا}\right)^2 = 1 + \left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^2 = \frac{ا^4 - (ا^2 - ب^2)لا^2}{ا^2(ا^2 - لا^2)}$$

فرض کرو کہ ناقص کا خروج المرکز ز ہے، تب $ا^2 ز^2 = ا^2 - ب^2$

اور چونکہ ب = ا ما $\sqrt{1-ز^2}$ اسلئے تکملہ اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے

$$4\pi \sqrt{1-ز^2} \int_{ب}^{ا} \sqrt{ا^2 - ز^2 لا^2}\, فرلا$$

اور اسکی قیمت ہے

$$2\pi ا^2 \left\{ 1 - ز^2 + \sqrt{1-ز^2}\, \frac{جب^{-1} ز}{ز} \right\}$$

ز ← ۰ کے لئے اس جملہ کی انتہا $4\pi ا^2$ ہے جو نصف قطر ا کے کرہ کی سطح ہے۔ چپٹے کرہ نما کے لئے طالب علم دیکھیگا کہ سطح مطلوبہ ہے

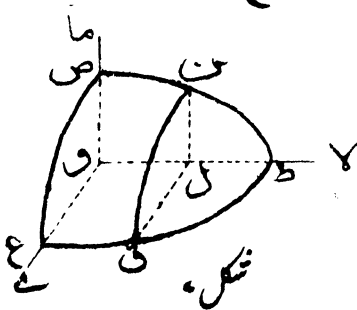
$$2\int_{ب}^{ا} 2\pi لا \frac{فرس}{فرما} فرما = \frac{4\pi}{1-ز^2} \int_{ب}^{ا\sqrt{1-ز^2}} \sqrt{\{ا^2(1-ز^2)^2 + ز^2 ما^2\}}\, فرما$$

$$= 2\pi ا^2 \left\{ 1 + \frac{1-ز^2}{2ز} لوک \frac{1+ز}{1-ز} \right\}$$

چونکہ $\frac{1}{ز} لوک \frac{1+ز}{1-ز} = لوک (1+ز)^{\frac{1}{ز}} + لوک (1-ز)^{-\frac{1}{ز}}$

اسلئے $\underset{ز \to 0}{نہا} \frac{1}{ز} لوک \frac{1+ز}{1-ز} = لوک ﻫ + لوک ﻫ = 2$ (دفعہ ۸۴ حصہ اول نتیجہ صریح)

پس ز ← ۰ کے لئے اس رقبہ کی انتہا $4\pi ا^2$ ہے۔

(۵) ناقص نما $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} + \frac{ی^2}{ج^2} = 1$

محدودوں کی مستوی سطحوں پر اس منحنی سطح کی تراشیں ناقص ہیں، سطح ما و ے کے متوازی مستوی تراش ل ن ق ہے جو قطع ناقص ہے۔ اگر و ل = لا تو

شکل ۲

$$\text{ل ن} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}$$

$$\text{ل ق} = \frac{\text{ج}}{\text{ا}}\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}$$

اور چوتھائی ناقص ن ل ق کا رقبہ

$$\text{لا} = \frac{\pi}{4}\ \text{ل ن} \times \text{ل ق} = \frac{\pi\ \text{ب ج}}{4\ \text{ا}^2}\left(\text{ا}^2 - \text{لا}^2\right)$$

اگر محدودوں کی سطوح مستویہ سطح ص ع ق ن اور تراش ن ل ق کے درمیان گھرا ہوا حجم ح ہو تو رتبہ اول کے صغاریات تک

$$\text{مف ح} = \text{لا مف لا} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{عف ح}}{\text{عف لا}} = \text{لا}$$

اسلئے شن و ط ص ع کا حجم

$$= \int_0^{\text{ا}} \text{لا ف لا} = \frac{\pi\ \text{ب ج}}{4\ \text{ا}^2}\int_0^{\text{ا}}\left(\text{ا}^2 - \text{لا}^2\right)\text{ف لا} = \frac{\pi\ \text{ا ب ج}}{6}$$

اس لئے ناقص نما کا کل حجم $\frac{4}{3}\pi$ ا ب ج ہوا۔

مثلہ ۲ اور ۵ میں حجم دریافت کرنے کا جو طریقہ استعمال کیا گیا ہے اس کا استعمال صریحاً ہر ایسی صورت میں ہو سکتا ہے جہاں محور لا پر کی عمودی تراش کا رقبہ (ا) کا معلوم تفاعل ف(لا) ہو۔ ایسی صورتوں میں حجم مناسب حدود کے اندر عفر ف(لا) کا تکملہ ہوتا ہے۔ [دیکھو مثال ۳ دفعہ ۸۵ حصہ اول] اگر محور قائم نہ ہوں تو اس صورت میں جس ترمیم کی ضرورت ہوگی اوسکا دیکھنا آسان ہے۔

منحنیات کا مرتسم کرنا۔ اگلی مشقوں تک جانے سے پہلے طالب علم ان ہدایات اور اشاروں کو غور سے دیکھ لے جو پہلے بابوں میں منحنیات کی ترسیم کے متعلق دئے گئے ہیں۔ ان کی مدد سے اور پہلے اور دوسرے مشقوں کی مزید اعانت سے وہ مقابلتہً آسان منحنیات کی ترسیمیں بنا سکیگا۔ بالعموم اسے کچھ اس طرح کا طرز عمل اختیار کرنا چاہئے۔

(۱) تشاکل دیکھنے کی غرض سے مساوات کا معائنہ کیا جائے۔
(۲) یہ دیکھا جائے کہ منحنی محوروں کو کہاں عبور کرتا ہے۔
(۳) لا کی (یا ھا کی) وہ محدود قیمتیں معلوم کی جائیں جو ھا کو (یا لا کو) لامتناہی بنا دیتی ہیں۔ یہ قیمتیں بالعموم ان متقاربوں کو ظاہر کرینگی جو محوروں کے متوازی ہیں۔ مائل متقارب سادہ صورتوں میں دفعہ ۴۲ یا دفعہ ۱۰۶ حصۂ اول کے طریقوں سے حاصل ہو سکتے ہیں، لیکن ایسی صورتوں کی تفصیلی بحث اس کتاب کی حدود سے باہر ہے۔
(۴) ایک محدد کی وہ قیمتیں معلوم کی جائیں جو دوسرے محدد کی متناظر قیمتوں کو خیالی بنا دیتی ہیں۔
(۵) منحنی کا ڈھال دریافت کیا جائے (ملاحظہ ہو دفعہ ۵۴ حصۂ اول)۔ نیز موڑ پر کے نقطے معلوم کئے جائیں۔
(۶) دوسرا مشتق معلوم کیا جائے۔ اس سے قوس کے تقعر اور تحدب نیز اس کے نقاط انعطاف کا پتہ چلیگا، لیکن دوسرے مشتق کے معلوم کرنیکا عمل اکثر اوقات دشوار اور محنت طلب ہوتا ہے اور منحنی کا عام طریق بغیر اسکی مدد کے عام تحلیلات کی بنا پر بخوبی معلوم ہو سکتا ہے۔

قطبی مساواتوں کے لئے بھی طرز عمل ایسا ہی ہے۔ اس میں اکثر اوقات سہولت ہوگی کہ سمتی نیم قطر کو منفی بھی مانا جا سکے۔ مثلاً نقطہ (-۱، -۱) تیسرے ربع میں واقع ہے، اسکے قطبی محدد $(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$ یا $(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ دونوں ہو سکتے ہیں۔ دوسری شکل $(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ کے یہ معنی ہیں۔ فرض کرو کہ ∠ لا و ن، $\frac{\pi}{4}$ کے مساوی ہے۔ اور و ن = $\sqrt{2}$، ن و کو و میں سے ن تک اتنا خارج کیا جائے کہ و نَ = ن و، تب نَ مطلوبہ نقطہ $(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ ہوگا۔ (ملاحظہ ہو مشق ۶، مثال ۲۲)

رقبہ یا قوس کا طول نکالنے سے پہلے منحنی کی عام شکل معلوم کرلینی چاہئے۔ تکملوں کے حل کرنے میں ابدالوں سے کام لینا پڑے گا، طالب علم یاد رکھے کہ ابدال کے مناسب انتخاب سے عمل میں بہت سہولت واقع ہوگی۔

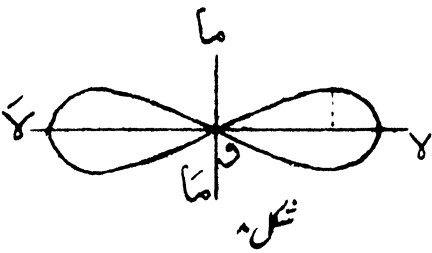
خواہ منحنی کی مساوات قائم محددوں میں ہو بعض اوقات اِسے قطبی محددوں میں تبدیل کرلینے سے عمل تکمل میں اختصار پیدا ہوگا۔

مشق ۶

۱۔ مکافی $ما^۲ = ۴ ا لا$ محور لا کے گرد گھومنے سے مجسم پیدا کرتا ہے، ایک مستوی سطح نقطہ $لا = ھ$ میں سے محور لا پر عمود وار گذرتی ہے اور اِس مجسم کو کاٹتی ہے۔ مقطوعہ کا حجم اور اسکی منحنی سطح معلوم کرو۔

۲۔ محور لا پر کے نقطہ $لا = ھ$ میں سے ایک مستوی سطح محور لا پر عمود وار گزرتی ہے اور مکافی نما $\frac{ما^۲}{ب} + \frac{ح^۲}{ج} = ۲ لا$ کو قطع کرتی ہے۔ محدود مقطوعہ کا حجم دریافت کرو۔

۳۔ منحنی $ا^۲ ما^۲ + ب^۲ لا^۴ = ا^۲ ب^۲ لا^۲$ (شکل ۸) جو رقبہ گھیرتا ہے اُسے معلوم کرو۔

شکل ۸

دونوں محوروں کے گرد تشاکل،

$لا^۲ \leq ا^۲$، ما کی قیمت اعظم $= \frac{ب}{۲}$

محور لا کے گرد گھومنے سے منحنی جو مجسم پیدا کرتا ہے اُسکا حجم دریافت کرو۔

۴۔ منحنی $ج^۲ ما^۲ = لا^۲ (لا - ا)(ب - لا)$ سے جو رقبہ گھرا ہوا ہے اُسے معلوم کرو۔ $ب > ا > ۰$

اگر لا کم ہو ا سے یا بڑا ہو ب سے تو ما خیالی ہوتا ہے، سوائے

لا = ۰ کے جبکہ ما = ۰ ۔ اسلئے یہ بند منحنی ہے اور محور لا کے گرد متشاکل ہے ۔ مبدا منحنی پر واقع ہے مگر اس کے نزدیک کوئی اور نقطہ نہیں ۔ یہ **اکیلا** نقطہ کہلاتا ہے ۔

۵ - منحنی (لا² + ما²)² = ا² لا² + ب² ما² کا رقبہ معلوم کرو ۔

قطبی محددوں میں لے جاؤ ۔ مبدا **اکیلا** نقطہ ہے ۔

۶ - منحنی ب ما² = لا (لا - ا) (۲ا - لا) کو مرتسم کرو جہاں ا، ب دونوں مثبت ہیں ۔

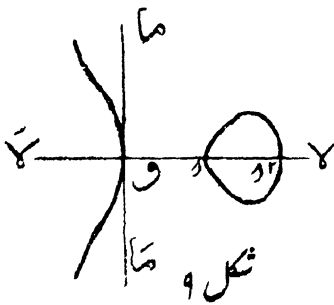
ما خیالی ہے جبکہ (۱) لا > ۲ا (۲) ۰ < لا < ا
منحنی ایک لامتناہی شاخ اور ایک بیضوی حلقہ پر مشتمل ہے دیکھو شکل ۹

۷ - منحنی ۱۶ ا³ ما² = ب² لا² (ا - ۲لا)

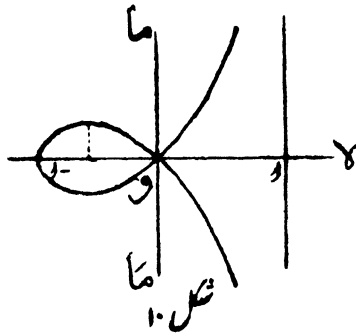
کے حلقہ کا رقبہ معلوم کرو، ا اور ب دونوں مثبت ہیں ۔

شکل ۹

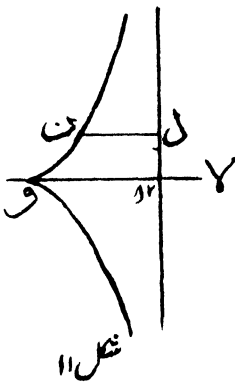
۸ - منحنی ک ما² = (لا - ا) (لا - ب) (لا - ج) کو مرتسم کرو جہاں ج > ب > ا > ۰، اور ک > ۰،
مفصلہ ذیل صورتوں پر غور کرو ۔

(۱) ا = ب (۲) ب = ج (۳) ا = ب = ج

مثال ۶ کی طرح منحنی ایک بیضوی اور ایک لامتناہی شاخ پر مشتمل ہے، صرف بیضوی حلقہ شاخ کے بائیں جانب واقع ہے ۔ جب، ا = ب تو بیضوی گھٹکر ایک تنہا نقطہ (ا، ۰) پر رہ جاتا ہے، جب، ا = ب = ج تو منحنی نیم کعبی سکافی ہو جاتا ہے جہاں (ا، ۰) اس کا قرن ہے ۔ عام صورت میں جبکہ ا، ب، ج باہم نامساوی ہوں رقبہ ابتدائی تکملوں کی رقوم میں نہیں بیان کیا جاسکتا ۔

۹- منحنی ما^{2} (۱ - لا) = لا^{2} (۱ + لا) کو مرتسم کرو (۱) اسکے حلقہ کا رقبہ (۲) منحنی اور متقارب کے درمیان کا رقبہ معلوم کرو- شکل ۱۰

شکل ۱۰

اس منحنی کا ڈھال صفر ہے جبکہ لا، (۱ ± √۵) ½ کے مساوی ہو لیکن لا = (۱ + √۵) ½ کے لئے ما خیالی ہوتا ہے۔

۱۰- ایک منحنی کی مساوات ما^{2} (۲ا - لا) = لا^{3} ہے، اس منحنی اور اس کے متقارب کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے اسے معلوم کرو شکل ۱۱

شکل ۱۱

نیز اس منحنی کو اس کے متقارب کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکا حجم دریافت کرو۔ اگر ن ل متقارب پر عمود ہو تو حجم مطلوب ہے

۲ ∫$_{0}^{\infty}$ π ن ل^{2} د ما = ۲ π ∫$_{0}^{\infty}$ (۲ا - لا)^{2} د ما

تکمل کرنے کے لئے رکھو

لا = ۲ا جب^{2} طہ تب ما = ۲ا جب^{3} طہ / جم طہ

اور $\frac{\pi}{۲}$ ، ۰ اور ط کے حدود ہیں۔

۱۱- منحنی $لا\,ما^{۲} = ا^{۲}(ا - لا)$ اور اس کے متقارب کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے اُسے معلوم کرو، نیز منحنی کے متقارب کے گرد گردش کرنے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اُس کا حجم معلوم کرو۔

۱۲- منحنی $ما^{۲}(ا^{۲} + لا^{۲}) = لا^{۲}(ا^{۲} - لا^{۲})$ کے حلقہ کا رقبہ معلوم کرو۔

۱۳- ایک ربع دائرہ کا نصف قطر ا ہے، اِس کے سروں پر مماس کھینچے گئے ہیں، قوس ربع اور مماسوں کے درمیان جو شکل بنتی ہے اسکو ایک مماس کے گرد پھرانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اُس کا حجم دریافت کرو۔

۱۴- ایک قوس دائرہ جس کا نصف قطر ا ہے اپنے وتر کے گرد گھوم کر ایک مجسم پیدا کرتی ہے، اگر قوس کا طول ۲ ا عہ ہو تو ثابت کرو کہ مجسم کا حجم

$۲\pi ا^{۳}(جب\,عہ - \frac{۱}{۳}جب^{۳}عہ - عہ\,جم\,عہ)$ ہے اور مجسم کی

سطح $۴\pi ا^{۲}(جب\,عہ - عہ\,جم\,عہ)$ ہے۔

۱۵- اگر منحنی $ا^{ن-۱}ما = لا^{ن}$ کی قوس کا طول س ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{وس}{ولا} = \frac{۱}{ا^{ن-۱}}\sqrt{ن^{۲}لا^{۲ن-۲} + ا^{۲ن-۲}}$$

دکھاؤ کہ قوس کا طول ابتدائی تفاعلوں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے جبکہ ن ذیل کی کسی صورت کا ہو $\frac{۲ک+۱}{۲ک}$ یا $\frac{۲ک}{۲ک-۱}$ جہاں ک کوئی عدد صحیح ہے مثبت یا نفی۔

۱۶- $\frac{۴}{(و^{لا} + و^{-لا})^{۲}}$ کی ترسیم اور محور لا کے درمیان کا رقبہ معلوم کرو۔

۱۷- منحنی $(\frac{لا}{ا})^{\frac{۲}{۳}} + (\frac{ما}{ب})^{\frac{۲}{۳}} = ۱$ سے جو کل رقبہ گھرا ہوا ہے اسے معلوم کرو۔

رکھو $لا = ا\,جب^{۳}ط$، تب $ما = ب\,جم^{۳}ط$ اور رقبہ ہے

$$۴\int_{۰}^{ا} ما\,ولا = ۱۲\,اب\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} جب^{۲}ط\,جم^{۴}ط\,وط = \frac{۳}{۸}\pi\,اب$$

۱۸۔ خط تدویر ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے (دفعہ ۳۷)

لا = ا (طہ - جب طہ)، ما = ا (۱ - جم طہ)

(۱) منحنی کے ایک محراب اور محور لا کے درمیان کا رقبہ معلوم کرو۔

(۲) محراب کا طول طہ = ۰ سے طہ = ۲ط تک دریافت کرو۔

(۳) محراب کو محور لا کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم معلوم کرو۔

(۴) محراب کو اس کے راس پر کے مماس کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم معلوم کرو (راس پر طہ = ط)

یہاں ∫ ما د لا = ا² ∫ (۱ - جم طہ)² د طہ، د س / د طہ = ۲ ا جب طہ/۲

۱۹۔ اس چار سطحی کا حجم معلوم کرو جو محددوں کی سطوح مستویہ اور مستوی

لا/ا + ما/ب + ی/ج = ۱ سے بنتی ہے۔

۲۰۔ لا = ۰ اور لا = ا کے درمیان اس مجسم کا حجم معلوم کرو جسکی مساوات

ی² + ا² ما² / لا² = ج² ہے۔ اس مجسم کو ہم "مخروط فانہ" کہینگے۔

۲۱۔ منحنی لا^(۲/۳) + ما^(۲/۳) = ا^(۲/۳) کا محیط دریافت کرو۔

اگر لا = ا جب³ طہ، تب ما = ا جم³ طہ اور د س / د طہ = ۳ ا جب طہ جم طہ

محیط ہے ۴ ∫ (۰ سے ط/۲) ۳ ا جب طہ جم طہ د طہ = ۶ ا

۲۲۔ مخروطی کی قطبی مساوات جبکہ اسکا قطب ہو ر (۱ + ز جم طہ) = ل ہے۔ (۱) مکافی (۲) ناقص کی صورت میں وہ رقبہ معلوم کرو جو ابتدائی خط، منحنی اور سمتی قطر طہ = عہ کے درمیان گھرا ہوا ہے (عہ < ط)

۲۳۔ دکھاؤ کہ منحنی ر = ا جب ۳ طہ میں مساوی رقبہ کے تین حلقے ہیں

جو سب کے سب نصف قطر ا کے دائرہ کے اندر واقع ہیں، ایک حلقہ کا رقبہ دریافت کرو۔

جیسے طہ صفر سے $\frac{\pi}{3}$ تک بڑھتا ہے مرتسم نقطہ حلقہ و ع ب ج و مرتسم کرتا ہے۔

جب، طہ قیمت $\frac{\pi}{3}$ سے $\frac{2\pi}{3}$ تک بڑھتا ہے تو ر منفی ہوتا ہے اور مرتسم نقطہ حلقہ و د ص ف

شکل ۱۲

کو مرتسم کرتا ہے، جیسے طہ، $\frac{2\pi}{3}$ سے π تک بڑھتا ہے ر مثبت ہوتا ہے اور نقطہ حلقہ و گ ھ ک کو پیدا کرتا ہے۔ طہ کے اس سے زیادہ بڑھنے سے کوئی نئی قوس پیدا نہیں ہوتی۔

۲۴ ـ منحنی ر = ا جب ن طہ کے تمام حلقوں کے اندر جو رقبہ گھرا ہوا ہے اُسے معلوم کرو جبکہ (۱) ن طاق عدد صحیح ہو (۲) ن جفت صحیح ہو۔

۲۵ ـ منحنی ر² جم طہ = ا² جب ۳ طہ کے ایک حلقہ کا رقبہ معلوم کرو۔

۲۶ ـ منحنی ر جم طہ = ا جم ۲ طہ کے حلقہ کا رقبہ معلوم کرو۔

۱۹ ـ بند منحنی ـ فرض کرو کہ ج $ن_1$ د $ن_2$ ایک منحنی ہے اور ایک خط مستقیم اسکو دو سے زیادہ نقطوں پر نہیں کاٹتا نیز فرض کرو کہ اس کے سب معین مثبت ہیں۔ فرض کرو کہ ل ج ع د اس منحنی کے ماس ہیں جو محور ما کے متوازی ہیں۔ نیز و ل = ا اور و ع = ب

جس رقبہ کا منحنی احاطہ کرتا ہے وہ ہے

$$\int_{ا}^{ب} م ن_1 \, د لا - \int_{ا}^{ب} م ن_2 \, د لا \qquad \text{.........(۱)}$$

شکل ۱۳

جہاں م $ن_1$ اور م $ن_2$ بالترتیب

ج ن ک اور ج ن ک پر انکی سمتوں میں حرکت کرتے ہیں جیسے لا، ا سے ب تک بڑھتا ہے۔
تملے (۱) اس طرح بھی لکھے جا سکتے ہیں

$$\int^{ب} م ن، فر لا + \int_{ب} م ن، فر لا \ldots\ldots (۲)$$

اب فرض کرو کہ اس منحنی پر کے کسی نقطہ کے محدد لا، ما ایک تیسرے متغیر (مثلاً) ت کے تفاعلوں کے طور پر بیان ہو سکتے ہیں اور یہ متغیر ایسا ہے کہ جیسے ت، ت سے ن تک بڑھتا ہے، نقطہ (لا، ما) منحنی کے گرد پورا سفر کر جاتا ہے۔ فرض کرو کہ جیسے ت، ت سے ن تک بڑھتا ہے نقطہ (لا، ما) براستہ قوس ج ن د ج سے د تک سفر کرتا ہے اور جب ت، ت سے ن تک بڑھتا ہے تو نقطہ (لا، ما) د سے ج تک براستہ قوس د ن ج سفر کرتا ہے۔ مثلاً ہم ت کو منحنی کی قوس فرض کر سکتے ہیں جیسے ج سے ناپنا شروع کیا جاتا ہے، پس اس مفروض کے مطابق
ت = ن، ت = قوس ج ن ک، ت = کل محیط
اگر ت کو تکمل کا متغیر قرار دیا جائے تو (۲) ہو جائیگا

$$\int^{ن} م ن \frac{فر لا}{فر ت} فر ت + \int^{ت} م ن \frac{فر لا}{فر ت} فر ت \ldots\ldots (۳)$$

(۳) میں دوسرا تکملہ منفی ہے کیونکہ م ن مثبت ہے اور $\frac{فر لا}{فر ت}$ منفی ہے جیسے ت، ت سے ت تک بڑھتا ہے۔ جب، ت منحنی کی قوس کو تعبیر کرے تو $\frac{فر لا}{فر ت}$ اس زاویہ کی جیب التمام ہوتی ہے جو (لا، ما) پر کا مماس محور لا کے ساتھ بناتا ہے۔ یہ زاویہ ایسے ناپا جاتا ہے جیسے دفعہ ۹۲ حصۂ اول میں۔ ہم (۳) کے دو تکملوں کو ایک تکملہ میں لکھ سکتے ہیں، اس طرح بند منحنی کے رقبہ کے لئے جملہ حاصل ہوتا ہے

∫ ما (فرلا / فرت) فرت .... (۴)

بطور مثال کے فرض کرو کہ ج ت، ک ر ت، ناقص ہے

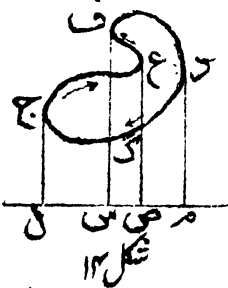
(لا - ھ)² / عا² + (ما - ک)² / با² = ۱

رکھو لا = ھ - عا جم ت، ما = ک + با جب ت

جب ت صفر سے ۲π تک بدلتا ہے تو نقطہ (لا، ما) منحنی کے گرد سمت ج ت ن، د ر ن، میں سفر کرتا ہے، رقبہ

= ∫₀^۲π (ک + با جب ت) عا جب ت فرت = عا با ∫₀^۲π جب² ت فرت

= π عا با

شکل ۱۴

یہ قید کہ خط مستقیم منحنی کو دو سے زیادہ نقطوں پر نہیں کاٹتا باسانی ہٹا دی جاسکتی ہے۔
مثلاً جب نقطہ (لا، ما) منحنی پر تیروں کی سمت میں حرکت کرتا ہے تو نقطہ کا معین یہ رقبہ عبور کرتا ہے

ل ج ع ص - س ف ع ص + س ف د م - ل ج گ د م

جو صحیحاً منحنی سے گھرے ہوئے رقبہ کے مساوی ہے۔ قوس ع ف، د گ ج پر فرلا / فرت منفی ہے، اسلئے متناظر تکملے بھی منفی ہیں، پس رقبوں س ف ع ص، ل ج گ د م کے پہلے منفی علامت لکھی گئی ہے۔

ہم (۱) کو اس طرح بھی لکھ سکتے تھے۔ ∫ (ا سے ب) م(ن) فرلا - ∫ (ب سے ا) م(ن) فرلا

اگر نقطہ (لا، ما) منحنی کے گرد سمت ج ک ر ن میں محیط پر سے پورا حرکت کر جائے جبکہ ت، تَ سے تِ تک بڑھے تو منحنی کا رقبہ ذیل کے جملہ سے بھی تعبیر ہوگا۔

$$- \int_{ت}^{تَ} ما \frac{ف لا}{ف ت} ف ت \;\ldots\ldots\ldots\ldots (۴َ)$$

رقبہ جو (۴) یا (۴َ) سے حاصل ہوتا ہے وہ ایک مثبت عدد ہے۔ لیکن اگر ہم رقبہ کو بھی علامت والی مقدار خیال کریں تو تکملہ

$$\int ما \frac{ف لا}{ف ت} ف ت \;\ldots\ldots (۵)$$

ہر صورت میں منحنی کے رقبہ کا جبریہ ناپ ہوگا جبکہ اسے منحنی کے محیط کے گرداگرد لیا جائے یعنی ت کے حدود ایسے ہوں کہ نقطہ (لا، ما) ایک دفعہ منحنی کے محیط کے گرد پورا چکر لگا سکے۔ جیسے ہم نے اوپر ضابطے (۴) اور (۴َ) حاصل کئے ہیں بالکل اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ تکملہ

$$\int لا \frac{ف ما}{ف ت} ف ت \;\ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

رقبہ کا جبریہ ناپ ہے جبکہ اسے منحنی کے پوراگرد لیا جائے۔

ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ جب ت، تَ سے تِ تک بڑھتا ہے تو نقطہ سمت ج ک ر ن میں منحنی کے گرد حرکت کرتا ہے اگر اس سمت کے لئے تکملہ (۵) مثبت ہے اور (۶) منفی یعنی

$$\int ما \frac{ف لا}{ف ت} ف ت = - \int لا \frac{ف ما}{ف ت} ف ت$$

تو جب نقطہ سمت ج ن ر ک میں حرکت کرے گا تو (۵) منفی ہوگا اور (۶) مثبت۔

نقطہ (لا، ما) کی سمت حرکت بالکل اختیاری ہے۔ ریاضی طبعیات میں یہ دستور بن گیا ہے کہ جب ت کے بڑھنے کے ساتھ مشاہدہ کرنے والا منحنی کے محیط کے گرد اُس سمت میں حرکت کرے جس میں کہ کل رقبہ اُس کے بائیں جانب رہتا ہے تو اس طرح رقبہ کے ناپ کے لئے جو عدد حاصل ہو اُسے مثبت قرار دیتے ہیں۔ اگر ہم یہ دستور اختیار

کریں تو بند منحنی کے رقبہ ا کے لئے حاصل ہوتا ہے

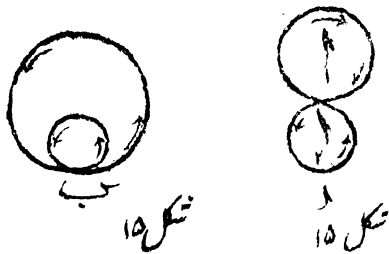
$$ا = \int لا \frac{د ما}{د ت} د ت = - \int ما \frac{د لا}{د ت} د ت = \frac{1}{2} \int \left(لا \frac{د ما}{د ت} - ما \frac{د لا}{د ت} \right) د ت \qquad (۷)$$

جہاں تکملہ تمام منحنی کے گرد اس سمت میں لیا گیا ہے جس میں ت بڑھتا ہے۔ تکملوں (۷) کو اکثر اوقات مختصراً اس طرح لکھتے ہیں۔

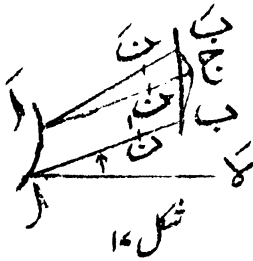
$$ا = \int لا \, د ما = - \int ما \, د لا = \frac{1}{2} \int (لا \, د ما - ما \, د لا)$$

یہ قید کہ سب محدد مثبت ہیں اب دور ہو سکتی ہے۔

جملات (۷) سے ہمیشہ رقبہ کا جبریہ ناپ ملتا ہے۔

شکل ۱۵ شکل ۱۵

پس مذکورہ بالا دستور کو ہم آئندہ کے لئے مان لیتے ہیں، اس طرح رقبہ کی مثبت سمت ہمیشہ کے لئے متعین ہو جاتی ہے یعنی ا کی قیمت جو (۷) سے معلوم ہوتی ہے اسکی علامت مثبت ہوگی سمت ج ن، د ن کے لئے اور منفی ہوگی ج ن، د ن کے لئے۔

اس مسئلہ میں وہ صورتیں بھی شامل ہیں جن میں منحنی اپنے آپ کو کاٹتا ہے۔ مثلاً اگر نقطہ اوپر آٹھ کی شکل پر تیروں کی سمت میں حرکت کرے تو تکملہ (۷) $ا_1 - ا_2$ کے مساوی ہوتا ہے۔ دوسری شکل کے لئے تکملہ سے دونوں حلقوں کے رقبوں کا مجموعہ حاصل ہوگا کیونکہ منحنی کے گرد جانے میں اندرونی حلقہ کا رقبہ دو بار شریک ہوتا ہے۔

۲۰۔ رقبہ جو ایک متحرک خط مستقیم اپنی حرکت میں عبور کرتا ہے۔ فرض کرو کہ اب خط مستقیم ہے جس کا طول ل ہے اور اس کو نزدیک کے مقام اَبَ میں ہٹادیا گیا ہے، اپنی حرکت میں یہ خط رقبہ اب بَ اَ عبور کرتا ہے۔ یہ رقبہ مثبت ہوگا اگر محیط کے گرد سمت اب بَ اَ میں جانے سے یہ رقبہ مشاہد کے بائیں جانب رہے اور منفی ہوگا اگر یہ داہنی جانب رہے۔

اَج کو اب کے اور بَج کو وتر اَ اَ کے متوازی کھینچو۔ فرض کرو کہ اَلا ایک ثابت خط کے متوازی ہے اور زاویے لااب، ج اَبَ بالترتیب عہ اور مف عہ ہیں۔

شکل ۱۷

صغاریات کے پہلے رتبہ تک رقبہ اب بَ اَ (مف ی) متوازی الاضلاع اَج اور مثلث اَج بَ کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

اب کی حرکت دو حرکتوں سے مرکب ہے۔

(۱) حرکت انتقالیت اَج تک۔

(۲) گھماؤ کی حرکت اَ کے گرد مقام اَبَ تک۔

فرض کرو کہ متوازی الاضلاع کا ارتفاع ف ہے، صغاریات کے پہلے رتبہ تک

مف ی = ل ف + ½ ل² مف عہ .... (۱)

فرض کرو کہ اب میں کوئی ثابت نقطہ ن ہے۔

ان = ر = اَنَ = اَنَ

اب کی سمت کے عمود وار ن کا جو ہٹاؤ ہے اس پر غور کرو۔

حرکت نقل کے لئے عمودی ہٹاؤ ف ہے (نہ کہ ن نَ)، گھماؤ کی حرکت کے لئے ہٹاؤ ر مف عہ ہے۔ ن کا کل عمودی ہٹاؤ فرض کرو مف س ہے۔

و س = ف + ا و عہ .... (۲)

(۲) سے ف = و س - ا و عہ، اس کی وجہ سے (۱) ہوجاتا ہے

و ی = ل و س + (½ ل^{2} - ا ل) و عہ ...... (۳)

اگر متغیروں کو ت کے تفاعل فرض کیا جائے جیسا دفعہ ۱۹ میں تو

وی / وت = ل وس / وت + (½ ل^{2} - ا ل) وعہ / وت ...... (۴)

مساوات (۴) بالکل عام ہے بشرطیکہ متغیروں کو مناسب علامات دی جائیں۔

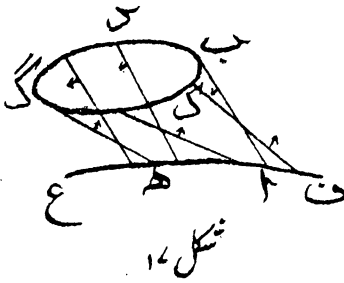
وس، وس / وت دونوں مثبت ہونگے جبکہ ح کی حرکت ایک ایسے مشاہد کے بائیں طرف ہو جو اب کی سیدھ میں ا سے ب کی طرف دیکھ رہا ہو۔ مثبت گھماؤ عہ مخالف سمت ساعت ہوگی۔ مستقل ا مثبت ہوگا جبکہ ح اب پر واقع ہو یا اب ممدودہ پر جبکہ ا سے ح ب میں سے خارج کیا جائے اور منفی ہوگا جبکہ یہ ح ب ا ممدودہ پر ا سے پرے واقع ہو۔

جیسے ت، ت$_{1}$ سے ت$_{2}$ تک بڑھتا ہے، اب کا رقبہ عبور کردہ

ی = ل ∫$_{ت_1}^{ت_2}$ وس / وت وت + (½ ل^{2} - ا ل) ∫$_{ت_1}^{ت_2}$ وعہ / وت وت

= ل س + (½ ل^{2} - ا ل) (عہ$_{2}$ - عہ$_{1}$) .... (۵)

جہاں س اثنائے حرکت میں ح کا کل عمودی ہٹاؤ ہے اور عہ$_{1}$، عہ$_{2}$ زاویہ عہ کی ابتدائی اور آخری قیمتیں ہیں۔ س بالعموم وہی نہیں ہوتا جو ح کے طریق کا طول ہے۔

اب فرض کرو کہ ح ب ایک بند منحنی ج مرتسم کرتا ہے، اس منحنی کا رقبہ بھی ج ہے۔

(۱) جب ب منحنی ج کا پورا چکر لگاتا ہے تو فرض کرو کہ ا قوس ع ف پر آگے پیچھے حرکت کر کے اپنے ابتدائی مقام پر آجاتا ہے جبکہ ب اپنے ابتدائی مقام پر آجائے۔ پس (۵) میں عہ۱ = عہ۲ اور یہ محض ج کے مساوی ہے۔ اس طرح

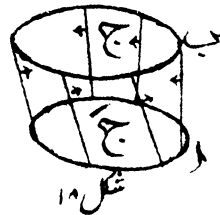
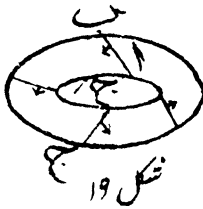
شکل ۱۷

ج = ل س .... (۶)

جہاں س، ب ن کا کل عمودی ہٹاؤ ہے، کیونکہ صریحاً تکملہ (۵) رقبہ ا ب ک گ ھ۔ رقبہ ا ب ک گ ھ کو تعبیر کرتا ہے۔ اس صورت میں س، ا پر منحصر نہیں یعنی ا ب پر جو ب ن کا مقام ہے س اس پر منحصر نہیں ہے۔

(۲) دوسری صورت میں فرض کرو کہ جب ب، ج کے محیط کا پورا چکر لگاتا ہے تو ا ایک بند منحنی ج کے گرد پورا دور کر جاتا ہے۔

شکل ۱۸

شکل ۱۹

اگر ج، ج کے باہر ہو (شکل ۱۸) تو عہ۱ اور عہ۲ باہم مساوی ہوں گے، مساوات (۵) کا بایاں رکن ل س ہوگا لیکن ا ب کا عبور شدہ رقبہ ج - ج ہوگا
پس ج - ج = ل س .... (۷)
لیکن اگر ج، ج کا پورا احاطہ کرلے (شکل ۱۹) تو عہ۲ - عہ۱ = 2π

اس لئے ج - جَ = ل س + ۲ π (½ لَ - ل لِ) .... (۸)

اعداد ج جَ کی علامتیں دفعہ ۱۹ (۷) کے دستور کے موافق حاصل ہوتی ہیں۔

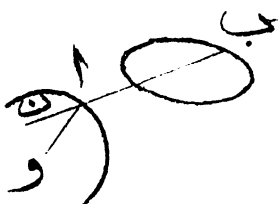
۲۱ - سطح پیما

بند منحنی کا عملی طریق پر رقبہ نکالنے کے لئے بہت سے آلات ایجاد کئے گئے ہیں۔ مذکورۂ بالا دو دفعات میں اجمالی طور پر وہ اصول بتائے گئے ہیں جن پر ایسے بہت سے آلات کی بناوٹ مبنی ہوتی ہے۔ سب سے مشہور ایمسلر کا قطبی سطح پیما ہے جس کی بناوٹ کا مختصر ذکر یہاں کیا جائے گا۔

قطبی سطح پیما میں دو سلاخیں و ا اور ا ب ہوتی ہیں جو ا پر آزادانہ طریق سے جڑی ہوئی ہوتی ہیں، سلاخ و ا ایک ثابت نقطہ و کے گرد گھومتی ہے۔ اگر ب ایک بند منحنی کو مرتسم کرے تو ا ایک دائرہ کے محیط پر حرکت کرتا ہے۔ جب ا صرف دائرہ کے محیط پر آگے پیچھے حرکت کرے اور پورا چکر نہ لگائے تو جس بند منحنی کے محیط پر ب گردش کرتا ہے اس کا رقبہ بموجب دفعہ ۲۰ (۶) ل س ہوتا ہے۔ اس صورت میں سلاخ ا ب پر جو ن کا مقام ہے س اس پر منحصر نہیں ہوتا۔

س کو معلوم کرنے کے لئے ایک پہیہ جس کا محور ا ب کے متوازی ہوتا ہے ا ب کے ساتھ لگا ہوا ہوتا ہے۔ جیسے ب منحنی کے محیط پر حرکت کرتا ہے یہ پہیہ کچھ پھسلتا ہے اور کچھ لڑکتا ہے۔ پھسلنے اور لڑکنے کی حرکتیں باہم بے تعلق ہوتی ہیں یعنی پھسلنے کے وقت پہیہ محور کے گرد نہیں پھرتا۔

پس ن کا عمودی ہٹاؤ = پہیہ کا محیط ۲ π ر × ان گردشوں کی تعداد جو بند منحنی کے گرد ب کی اثنائے حرکت میں پہیہ لگاتا ہے۔

یعنی س = ۲ π ر ن

شکل ۲۰

ایک تختی پر ن کی قیمت خود بخود درج ہو تی جاتی ہے ' ن صحیح یا کسر ہو سکتا ہے۔ اگر ہم منحنی ج کو اتنا بڑا فرض کریں کہ و ا نصف قطر والا دائرہ بالکل اس کے اندر واقع ہو تو بموجب دفعہ ۲۰ (۸)

ج - π و ا^2 = ل س + ۲π ($\frac{1}{2}$ل - ا ل)

یعنی ج = ۲π ل ر ن + ۲π ($\frac{1}{2}$ ل - ا ل) + π و ا^2 کیونکہ س = ۲π ر ن

اس جملہ میں سوائے ن کے اور سب اعداد آلہ کے مستقلات ہیں۔ اس مضمون پر مزید معلومات کے لئے ملاحظہ ہو **ھنریسی** کی "رپورٹ سطح پیماؤں پر" برٹش ایسوسئیشن رپورٹ ۱۸۹۴ء۔

دفعات ۱۹ ' ۲۰ کا طریق ثبوت فی الحقیقت **ایپل** (Appell) کا ہے جو اس نے اپنی کتاب مبادیات ریاضی تحلیل Elements d' Analyse Mathematique میں دیا۔

مشق ۷

۱۔ ثابت کرو کہ قطبی محددوں میں ایک بند منحنی کا رقبہ تکملہ

$$\frac{1}{2}\int ر^2 \frac{د طہ}{د ت} د ت$$

سے حاصل ہوتا ہے جبکہ تکملہ کو پورے محیط کے گرد لیا جائے ' اس نتیجہ کو ثابت کرو

(۱) رقبہ دریافت کرنے کے لئے جو قطبی ضابطہ ہے اُسے استعمال کرنے سے

(۲) دفعہ ۱۹ ' (۷) میں جو آخری تکملہ ہے اُسمیں لا = ر جم طہ ' ما = ر جب طہ رکھکر تبدیل کرنے سے۔ [دیکھو مشق ۱۲ ' سوال ۱۵ حصہ اول]

۲۔ مثلث و ا ب کے راسوں کے محدد ترتیب و ' ا ' ب میں بالترتیب (۰ ' ۰) ' (لا ' ما) ' (لا + مف لا ' ما + مف ما) ہیں ' ھندسی طریق سے ثابت کرو کہ بلحاظ علامت اور مقدار مثلث کا رقبہ $\frac{1}{2}$ (لا مف ما - ما مف لا) ہے۔ اس نتیجہ کی مدد سے مثال ماقبل کا مسئلہ حاصل کرو۔

۳۔ مکافیات ما^2 = ۴ ا لا ' لا^2 = ۴ ا ما کا مشترک رقبہ معلوم کرو۔

۴۔ متقارب ما = ا ' محور ما اور منحنی ما^2 (ا^2 + لا^2) = ا^2 لا^2 کی اس شاخ کے

درمیان جو ربع اول میں ہے جو رقبہ گھرا ہوا ہے اُسے معلوم کرو۔

یہ رقبہ ہے $\text{نہا}_{\text{ب}\to\infty}\int^{\text{ب}} (\text{ا}-\text{لا})\,\text{فرلا} = \text{ا}^2 + \text{نہا}_{\text{ب}\to\infty}\,\text{ا}\left\{\text{ب}-\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}\right\} = \text{ا}^2$

لحاظ ما کے تکمیل کرنے سے رقبہ معلوم کرو۔

۵۔ "لنگر چھلا" وہ مجسم ہے جو ایک دائرہ کو اس کی سطح میں کے ایک خط مستقیم کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ دائرہ کا نصف قطر ا ہے گردش کا محور، محور ما ہے اور دائرہ کا مرکز محور لا پر مبدأ سے فاصلہ ج پر واقع ہے، دائرہ کے کسی نقطہ کے محدد ہیں

$$\text{لا} = \text{ج} + \text{ا جم ت}،\quad \text{ما} = \text{ا جب ت}$$

اگر لنگر چھلے کا حجم ح ہو اور سطح س تو ثابت کرو کہ جس صورت میں ج ≮ ا

$$(1)\quad \text{ح} = \pi \int_0^{2\pi} (\text{ج} + \text{ا جم ت})^2\,\text{ا جم ت فرت} = 2\pi^2\text{ا}^2\text{ج} = \text{ق ل}$$

$$(2)\quad \text{س} = 2\pi \int_0^{2\pi} (\text{ج} + \text{ا جم ت})\,\text{ا فرت} = 4\pi^2\,\text{ا ج} = \text{ط ل}$$

جہاں ق دائرہ معلومہ کا رقبہ ہے اور ط محیط اور ل اُس دائرہ کا محیط $(2\pi\,\text{ج})$ ہے جو گردش کرنے والے دائرہ کا مرکز مرتسم کرتا ہے۔

۶۔ منحنی $\text{ر} = 3 + 2\,\text{جم طا}$ میں ایک ہی بیضوی حلقہ ہے۔ منحنی کو مرتسم کرو اور اسکا رقبہ معلوم کرو۔

۷۔ منحنی $\text{ر} = 2 + 3\,\text{جم طا}$ دو بیضوی حلقوں پر مشتمل ہے (شکل ۲۱)

اگر $\text{جم عا} = -\frac{2}{3}\ (0 < \text{عا} < \pi)$ تو ثابت کرو کہ بڑے حلقہ کا رقبہ ہے

$$\text{ا} = \tfrac{17}{2}\,\text{عا} + 12\,\text{جب عا} + \tfrac{9}{2}\,\text{جب عا جم عا}$$

اور چھوٹے بیضوی کا رقبہ ہے $\tfrac{17}{2}\pi - \text{ا}$

نیز ثابت کرو کہ $\tfrac{1}{2}\text{ر}^2$ کا تکملی حدود

$\text{طا} = 0$ اور $\text{طا} = 2\pi$

کے درمیان ان دو رقبوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

شکل ۲۱

امثلہ ۶'، سے منحنی ر = ا + ب جم طہ کی نوعیت کا پتہ چلتا ہے
جبکہ ا > ب اور ا < ب۔

۸۔ بتاؤ مساوات ف (م لا، ن ما) = ۰ والا منحنی جہاں م، ن مستقل ہیں
ف (لا، ما) = ۰ سے کیسے حاصل ہو سکتا ہے۔ اگر دوسرا منحنی بند حلقہ ہو تو پہلا بھی
بند ہوگا اور ف (م لا، ن ما) = ۰ کا رقبہ ف (لا، ما) = ۰ کے رقبہ کے مساوی
ہوگا جبکہ موخرالذکر کو م ن پر تقسیم کر دیا جائے۔

فرض کرو کہ م لا = لاَ، ن ما = ماَ، اس لئے لاَ د ماَ = م ن لا د ما
اب دفعہ ۱۹ (۷) کو استعمال کرو۔ لاَ د ماَ کا تکملہ منحنی ف (لاَ، ماَ) = ۰ کے
اگرد (جو وہی بات ہے کہ لا د ما کا تکملہ منحنی ف (لا، ما) = ۰ کے گرد)
مساوی ہوگا م ن لا د ما کے تکملہ کے جبکہ اسے منحنی ف (م لا، ن ما) = ۰
کے گرد لیا جائے یعنی لا د ما کا تکملہ منحنی ف (لا، ما) = ۰ کے گرد مساوی ہے
اُس رقبہ کا م ن گنا جو منحنی ف (م لا، ن ما) = ۰ سے گھرا ہوا ہے (کیونکہ
م ن مستقل ہے اور لا د ما کا تکملہ رقبہ ہے)

۹۔ مشق ۶ مثال ۵ پر مثال بالا کا طریقہ استعمال کرنے سے منحنی

(م² لا² + ن² ما²)² = ا² لا² + ب² ما²

کا رقبہ معلوم کرو۔

۱۰۔ جب، اب (دفعہ ۲۰) ایک گردش پوری کرتا ہے تو ن ایک ایسا
منحنی مرتسم کرتا ہے جس کا رقبہ جَ ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

(۱) جَ = (ا ج + ب جَ) / (ا + ب) − π ا ب

جہاں ک ن = ب اور ا، ج، جَ سے وہی مقداریں تعبیر ہوتی
ہوتی ہیں جن کا دفعہ ۲۰ میں ذکر ہوا۔
نیز ثابت کرو کہ اگر سرے ا، ب ایک بند بیضوی منحنی ج پر حرکت کریں تو

(۲) ج − جَ = π ا ب [ہولڈچ کا مسئلہ]

مساوات (۸) دفعہ ۲۰ کو استعمال کرو۔ رکھو ل = ا + ب، اس طرح ج - ج″ حاصل ہوگا، پھر رکھو ل = ا، جس سے ج″ - ج′ حاصل ہوتا ہے۔ س کو ساقط کرنے سے نتیجہ (۱) حاصل ہوگا۔ (۲) حاصل کرنے کے لئے ان اور بن کے عبور کردہ رقبوں پر غور کرو۔

باب سوم

تکملہ مجموعہ کی انتہا خیال کیا جاسکتا ہے

دوہرے تکملے

۲۲۔ تکملہ ایک مجموعہ کی انتہا ہے۔ تکملہ کو ایک مجموعہ کی انتہا سمجھنا بعض مسائل میں علم آموز ہونے کے علاوہ ضروری ہوتا ہے، فا(لا) حسب معمول مسلسل خیال کیا جائیگا۔

ابتدا میں فرض کرو کہ ا < ب اور فا(لا) ایک مثبت بڑھنے والا انفاعل ہے، بعد میں ان قیود کو ہٹادیا جائیگا۔ ا اور ب کے درمیان صعودی ترتیب میں (ن-۱) قیمتیں لا$_{۱}$، لا$_{۲}$، .... لا$_{ن-۱}$ مندرج کرو اور ن فرقوں (لا$_{۱}$-ا)، (لا$_{۲}$-لا$_{۱}$)، (لا$_{۳}$-لا$_{۲}$)، ...... (ب-لا$_{ن-۱}$) کو محسوب کرو۔ ان سب فرقوں کی ایک ہی علامت ہے، اس صورت میں مثبت ہے اور ان کا مجموعہ ب-ا ہے، واضح ہو کہ وقفہ ب-ا کو ن ذیلی وقفوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اب ہر ذیلی وقفہ کو فا(لا) کی اس قیمت کے ساتھ ضرب دو جو اس وقفہ کی ابتدا میں ہے، اس طرح جو ن حاصل ضرب حاصل ہونگے ان کو جمع کرنے سے

فا(ا)(لا$_{۱}$-ا) + فا(لا$_{۱}$)(لا$_{۲}$-لا$_{۱}$) + فا(لا$_{۲}$)(لا$_{۳}$-لا$_{۲}$) +.....+ فا(لا$_{ن-۱}$)(ب-لا$_{ن-۱}$) ....(۱)

یا فرقوں کی معمولی ترقیم مف ا، مف لا، ..... کے مطابق

فا(ا) مف ا + فا(لا۱) مف لا۱ + فا(لا۲) مف لا۲ + ... + فا(لا ن-۱) مف لا ن-۱
.... (۱)

مجموعہ (۱) زیادہ برجستہ شکل میں اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

ح (لا = ا تا لا = ب) فا(لا) مف لا .... (۲)

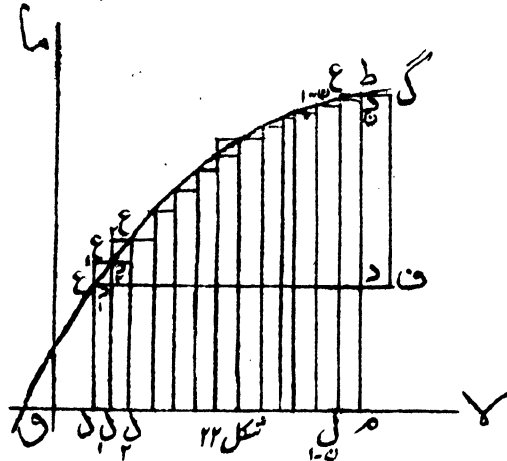
علامت ح فا(لا) مف لا سے مراد ہے "اُن سب رقموں کا مجموعہ جو اِس نمونہ فا(لا) مف لا کی ہوں" اِس کو ہم پڑھینگے "حاصل جمع یا ح فا(لا) مف لا"۔ محض اِس علامت سے پورا معلوم نہیں ہوتا کہ وقفہ ا ب کس طرح تقسیم کیا گیا ہے، یہ عبارت یا سوال کے عمل سے معلوم کرنا چاہیئے۔ وقفہ کے جس سرے سے تقسیم شروع ہوتی ہے اُسے "لا = ا" سے ظاہر کرتے ہیں اور دوسرے سرے کو "لا = ب" سے۔ ہر فرق مف لا کی وہی علامت ہے جو ب - ا کی جو اِس صورت میں مثبت ہے۔

ہم مجموعہ (۱) یا (۲) کی انتہا معلوم کرنا چاہتے ہیں جبکہ ن کو لا انتہا بڑھایا جائے ظاہر ہے کہ ن کو لا انتہا بڑھانے کا نتیجہ یہ ہوگا کہ فرق مف ا، مف لا۱ .... لا انتہا کم ہو جائینگے۔ یہ انتہا معلوم کرنے کے لئے فا(لا) کی ترسیم (شکل ۲۲) پر غور کرو۔

فرض کرو کہ و ل = ا، و ل۱ = لا۱ .... و م = ب

تب ل ع = فا(ا)، ل۱ ع۱ = فا(لا۱) .... ل ن-۱ ع ن-۱ = فا(لا ن-۱)، م ط = فا(ب)

شکل ۲۲

ع ر۱، ع۱ ر۲ ...... عن-۱ رن محور لا کے متوازی ہیں۔

صریحاً حاصل جمع (۱) مستطیلوں ل ر۱، ل۱ ر۲، ل۲ ر۳ ...... لن-۱ رن کے رقبوں کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے

مستطیلوں کا یہ رقبہ، رقبہ ل م ط ع سے کم رہتا ہے بقدر ذیل کے کروی مثلثات کے مجموعہ کے ع ر۱ ع۱، ع۱ ر۲ ع۲ ...... عن-۱ رن ط۔

ع ر کو ل م کے متوازی کھینچو، یہ خط م ط کو ر پر کاٹتا ہے۔ ع ر کو ف تک اتنا خارج کرو کہ ر ف ذیلی وقفوں ل ل۱، ل۱ ل۲ ...... میں سے سب سے بڑے کے مساوی ہو۔ مستطیل ر ف گ ط کی تکمیل کرو۔

فرض کرو کہ رقبہ ل م ط ع ی سے تعبیر ہوتا ہے، تب ی اور مجموعہ (۱) کا فرق کم ہے ذیل کے ن مستطیلوں کے مجموعہ سے

ع ر۱ × ر۱ ع۱، ع۱ ر۲ × ر۲ ع۲ ...... عن-۱ رن × رن ط

یعنی کم ہے مستطیل ر ف (ر۱ ع۱ + ر۲ ع۲ + ... + رن ط) سے

یعنی کم ہے ر ف × ر ط سے

یعنی کم ہے ر ف {فا(ب) - فا(ا)} سے۔

اگر ف لاانتہا چھوٹا ہے اور اسی آن میں ہر ذیلی وقفہ لاانتہا کم ہو تو انتہا میں ر ف صفر ہوگا اور (۱) کی انتہا ی ہوگی۔ اس لئے

نہا (ن ← ∞) مجموعہ (لا = ا سے لا = ب تک) فا(لا) مف لا = ی = رقبہ ل م ط ع ......(۳)

البتہ ہم لکھ سکتے ہیں

مجموعہ (لا = ا سے لا = ب تک) فا(لا) مف لا = ی تقریباً

یہ قیود جو ابتدا میں لگائی گئی تھیں کہ فا (لا) مثبت ہے، بڑھنے والا انفاعل ہے اور ا کم ہے ب سے، یہ اب ہٹا دی جا سکتی ہیں۔

اگر ا > ب اور فا (لا) مثبت اور گھٹنے والا انفاعل ہو تو اوپر کے عمل میں تبدیلی صرف اتنی ہوگی کہ یہ مجموعہ (۱) سے کم ہوگا۔ اگر فا (لا) کہیں بڑھتا ہو اور کہیں گھٹتا ہو تو فا (لا) کے بڑھنے اور گھٹنے کی صورتوں کے لئے نتائج کو الگ الگ صحیح تسلیم کر کے عام صورت میں ان کو باہم ملایا جا سکتا ہے۔

اگر ا > ب اور فا (لا) مثبت ہو تو ہر ایک فرق (لا₁ - ا)، (لا₂ - لا₁)....... منفی ہوگا اور اس صورت میں بھی انتہا لینے سے منحنی کا رقبہ معلوم ہوگا مگر اسکی علامت منفی ہوگی۔

آخری صورت میں اگر فا (لا) منفی ہو تو انتہا لینے سے منحنی کا رقبہ ملیگا بشرطیکہ دفعہ ۸۰ حصہ اول کے موافق مناسب علامت منتخب کی جائے۔

اگر ہم چاہیں تو ذیلی وقفوں کو باہم مساوی خیال کر سکتے ہیں، ایسی صورت میں ہر وقفہ $\frac{ب - ا}{ن}$ کے مساوی ہوگا۔ ذیلی وقفوں پر فقط اتنی قید ہے کہ ہر وقفہ کو انتہا میں صفر ہو جانا چاہیے جبکہ ن انتہا میں لامتناہی ہو جائے۔

مجموعہ (۱) میں ہم نے فرض کیا ہے کہ فا (لا) ہر وقفہ میں شروع کی قیمت اختیار کرتا ہے لیکن اگر یہ ہر وقفہ کے آخر کی یا درمیان کی کوئی قیمت اختیار کرے تو بھی دفعہ ۸۷ مسئلہ ۲، حصۂ اول کی مدد سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ انتہا وہی رہتی ہے۔

ہم صرف اس صورت پر غور کرتے ہیں کہ ا < ب اور فا (لا) مثبت ہے کیونکہ باقی صورتیں اس سے بآسانی مستنبط ہو سکتی ہیں۔

اگر ا'، لا₁'، لا₂'....... لا کی قیمتیں ہوں بالترتیب وقفوں (لا₁ - ا)، (لا₂ - لا₁)، (لا₃ - لا₂)....... کے آخر یا درمیان میں تو ہم لے سکتے ہیں

بہ = فا (ا') (لا₁ - ا)، بہ₁ = فا (لا₁') (لا₂ - لا₁)........

گہ = فا (ا) (لا₁ - ا)، گہ₁ = فا (لا₁) (لا₂ - لا₁)........

اور مسئلہ مذکورہ کے شرائط عائد ہوتے ہیں کیونکہ فا(لا) مسلسل ہے اور ن ← ∞ کے لئے $\frac{ب}{کم}$، $\frac{ب}{کم}$، ..... میں سے ہر ایک کی انتہا ایک ہے۔

یہ ثابت کرنے کے بعد کہ (۱) کی انتہا رقبہ ی ہے ہم حسب دفعہ ۸۸ حصۂ اول ثابت کر سکتے ہیں کہ اس انتہا کا مشتق بلحاظ ب کے مط ہے یعنی فا(ب)۔ تکملوں کے متعلق جملہ مسائل مجموعہ (۱) کی انتہا پر استعمال کئے جا سکتے ہیں۔ اب تکملوں کی عام ترقیم کی وجہ ظاہر ہے، ∫ لفظ "مجموعہ" کا ابتدائی حرف میم ہے، مگر یہ یاد رہے کہ تکملہ مجموعہ نہیں ہے لیکن مجموعہ کی انتہا ہے۔ (دیکھو دفعہ ۲۳ مثال ۲)

۲۴۔ مثالیں مثال ۱۔ $\int_{۰}^{ب} لا^{۲} \, فر لا$ کی قیمت معلوم کرو۔

وقفہ ب کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کرو۔ دفعہ ۲۲ کی ترقیم کے مطابق

$$و ل_{۰}=۰،\ و ل_{۱}=\frac{ب}{ن}،\ و ل_{۲}=\frac{۲ب}{ن}،\ ....\ و ل_{ن-۱}=\frac{(ن-۱)ب}{ن}$$

مجموعہ (۱) ہو جاتا ہے

$$۰\times\frac{ب}{ن}+\left(\frac{ب}{ن}\right)^{۲}\frac{ب}{ن}+\left(\frac{۲ب}{ن}\right)^{۲}\frac{ب}{ن}+.....+\left\{\frac{(ن-۱)ب}{ن}\right\}^{۲}\frac{ب}{ن}$$

$$=\frac{ب^{۳}}{ن^{۳}}\left\{۱^{۲}+۲^{۲}+.......+(ن-۱)^{۲}\right\}$$

$$=\frac{ب^{۳}}{ن^{۳}}\ \frac{(ن-۱)ن(۲ن-۱)}{۶}\ \text{یا}\ \frac{ب^{۳}}{۳}\left\{۱-\frac{۳}{۲ن}+\frac{۱}{۲ن^{۲}}\right\}$$

اور انتہا صریحاً $\frac{ب^{۳}}{۳}$ ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ اگر دفعہ ۲۲ (۲) میں رکھا جائے فا(لا) = فَ(لا) تو انتہا ف(ب) - ف(ا) ہوگی۔

مشتق کی تعریف کے بموجب

$$\frac{ف(لا+مف لا)-ف(لا)}{مف لا}=فَ(لا)+عہ$$

یعنی ف(لا + مف لا) - ف(لا) = فَ(لا) مف لا + عہ مف لا

(۱)..........

جہاں عہ، مف لا کے ساتھ معدوم ہو جاتا ہے۔

(۱) میں کے لا اور مف لا کو بالتواتر دفعہ ۲۲ کی قیمتیں دو۔ لا کی تمام قیمتوں کے لئے بالعموم عہ کی وہی قیمت نہیں ہوگی اس لئے ہم لاحقے استعمال کرتے ہیں پس

ف(لا$_۱$) - ف(ا) = فَ(ا) مف ا + ع$_۱$ مف ا

ف(لا$_۲$) - ف(لا$_۱$) = فَ(لا$_۱$) مف لا$_۱$ + ع$_۲$ مف لا$_۱$

ف(لا$_۳$) - ف(لا$_۲$) = فَ(لا$_۲$) مف لا$_۲$ + ع$_۳$ مف لا$_۲$

....

ف(ب) - ف(لا$_{ن-۱}$) = فَ(لا$_{ن-۱}$) مف لا$_{ن-۱}$ + ع$_ن$ مف لا$_{ن-۱}$

جمع کرنے سے ف(ب) - ف(ا) = $\sum_{لا=ا}^{لا=ب}$ فَ(لا) مف لا + ر

جہاں ر = ع$_۱$ مف ا + ع$_۲$ مف لا$_۱$ + ... + ع$_ن$ مف لا$_{ن-۱}$

فرض کرو کہ مقادیر ع$_۱$، ع$_۲$، ..... میں سے عَہ تعداداً سب سے بڑا ہے، تب عددی قیمت کے لحاظ سے

ر > عَہ (مف ا + مف لا$_۱$ + مف لا$_۲$ + ... + مف لا$_{ن-۱}$) یا عَہ (ب - ا)

چونکہ ہر عہ اور اس لئے ہر عَہ کی انتہا صفر ہے، اسلئے ر کی انتہا بھی صفر ہوگی پس نتیجہ ثابت ہوتا ہے۔

مثال ۳ - ن ← ∞ کے لئے

$$\frac{۱}{ن+۱} + \frac{۱}{ن+۲} + \frac{۱}{ن+۳} + \cdots + \frac{۱}{۲ن}$$

کی انتہا معلوم کرو۔

ہم اِس مجموعہ کو اِس طرح لکھ سکتے ہیں

$$\frac{۱}{۱+\frac{۱}{ن}}\times\frac{۱}{ن}+\frac{۱}{۱+\frac{۲}{ن}}\times\frac{۱}{ن}+\frac{۱}{۱+\frac{۳}{ن}}\times\frac{۱}{ن}+\cdots+\frac{۱}{۱+\frac{ن}{ن}}\times\frac{۱}{ن}$$

یا اِس طرح سے $\sum_{ر=۱}^{ر=ن}\frac{۱}{۱+\frac{ر}{ن}}\times\frac{۱}{ن}$

تفاعل فا(لا) = $\frac{۱}{لا}$ پر غور کرو۔ دفعہ ۲۲ میں فرض کرو کہ ہر فرق $\frac{۱}{ن}$ ہے۔ فرض کرو کہ ا = ۱، ب = ۲ اوپر کا مجموعہ اُسی طرح کا سلسلہ ہوگا جیسا (۱) دفعہ ۲۲ ہے اگر ہم فا(لا) کی قیمتیں ہر وقفہ کے آخر کی فرض کریں۔

پس مطلوبہ انتہا ہے $\int_{۱}^{۲}\frac{د لا}{لا}=[\text{لوک لا}]_{۱}^{۲}=$ لوک ۲ = ۶۹۳ء

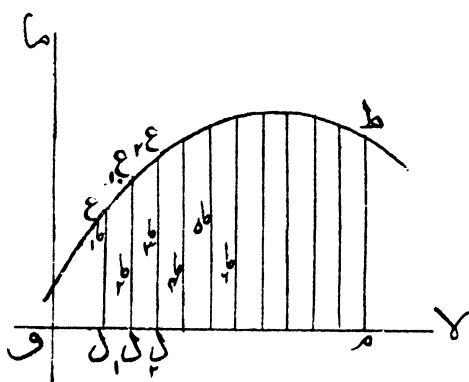
۲۴۔ تقربات۔ تکملہ کی قیمت معلوم کرنے میں بالعموم پہلے وہ تفاعل معلوم کیا جاتا ہے جس کا مشتق معلومہ متکمل ہو۔ اب اگر یہ تفاعل معلوم نہ ہوسکے تو یہ طریقہ ناکام رہیگا۔ ایک مشہور صورت جس میں یہ طریقہ استعمال نہیں ہوسکتا طبیعی مثالوں میں پیدا ہوتی ہے جہاں متکمل کے لئے تحلیلی جملہ معلوم ہونے کی بجائے اس کا گراف معلوم ہوتا ہے اس لئے جب متکمل کی قیمتوں کی صرف محدود تعداد معلوم ہو تو اس صورت میں بھی تکملہ کی تقریبی قیمت معلوم کرنے کے طریقے ایجاد کئے گئے ہیں یہ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ متکمل کو ایک مسلسل تفاعل متصور کیا جا سکتا ہے اگرچہ اسکی قیمتوں کی صرف محدود تعداد معلوم ہونے کی وجہ سے تفاعل کے لئے تحلیلی جملہ معلوم نہیں ہوسکتا۔ جو طریقے اب بیان کئے جائینگے وہ تحلیلی شکل کے تفاعلوں کے لئے بھی استعمال ہو سکتے ہیں اگرچہ ایسی صورت میں زیادہ قوی طریقے میسر آسکتے ہیں بالخصوص سلسلوں میں پھیلانے کا طریقہ۔

فرض کرو کہ ل م کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور ہر حصہ ھ کے مساوی ہے۔ نیز فرض کرو ل، م اور باقی (ن - ۱) نقاط تقسیم پر کے معین $ما_۱$، $ما_۲$، $ما_{ن+۱}$ .... معلوم ہیں۔

$$\text{تکملہ} \int_{ل}^{م} فا(لا)\, فرلا \qquad ....(۱)$$

کے محسوب کرنے سے یہی مراد ہے کہ رقبہ ل م ط ع معلوم کیا جائے [شکل ۲۳] ترسیم کی بجائے فرض کرو کہ کثیر الاضلاع ع $ع_۱$ $ع_۲$ ...... ہے۔ پہلے منحرف کا رقبہ $\frac{۱}{۲}$ ھ ($ما_۱ + ما_۲$) ہے اور یہ رقبہ، ل م ط ع کے متناظر ٹکڑے کے رقبہ سے بہت تھوڑا کم ہوگا۔ ان سب منحرفوں کو جمع کرنے سے اس رقبہ ل م ط ع کی اور اسلئے تکملہ (۱) کی تقریبی قیمت معلوم ہوتی ہے

$$ق_۱ = \frac{۱}{۲} ھ (ما_۱ + ما_۲) + \frac{۱}{۲} ھ (ما_۲ + ما_۳) + ... + \frac{۱}{۲} ھ (ما_ن + ما_{ن+۱})$$

$$= \frac{۱}{۲} ھ \{ ما_۱ + ما_{ن+۱} + ۲(ما_۲ + ما_۳ + ... + ما_ن) \} ......(۲)$$

شکل ۲۳

اگر ترسیم اپنے طول میں سراسر اوپر کی طرف محدب ہو جیسے شکل ۲۳ میں تو $ق_۱$ اصلی رقبہ سے کم رہے گا اور اگر منحنی اوپر کی طرف مقعر ہو تو $ق_۱$ رقبہ سے بڑھ جائے گا۔ جفت معینوں $ما_۲$، $ما_۴$، ..... کے

سروں میں سے مماس کھینچو اور انہیں اتنا خارج کرو کہ یہ متصلہ طاق معینوں سے جا کر ملیں۔ اگر کل معینوں کی تعداد طاق ہو یعنی ۲ ن + ۱، تو اس طرح ن منحرف حاصل ہونگے جن کا مجموعہ ل م ط ع سے زیادہ ہوگا جب گراف بالتمام اوپر کی طرف محدب ہو۔ پہلے منحرف کا رقبہ ۲ ھ صا_2 ہے، دوسرے کا ۲ ھ صا_4 اور علیٰ ہذا القیاس اس لئے رقبہ زیر بحث کا ہمیں ایک اور تقرب حاصل ہوتا ہے

$$\text{ق}_2 = 2\,\text{ھ}\,(\text{صا}_2 + \text{صا}_4 + \ldots\ldots + \text{صا}_{2\text{ن}}) \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

تکملہ (۱) کی قیمت ہمیشہ ق_1 اور ق_2 کے درمیان واقع ہوتی ہے جبکہ قوس ع ط پر کوئی نقطہ انعطاف نہ ہو اور ہر تقرب کے لئے فرق $\pm(\text{ق}_1 - \text{ق}_2)$ غلطی یا خطا کا ناپ ہوگا۔

ضابطہ (۲) کو ذوزنقہ قاعدہ کہا جا سکتا ہے۔

ایک اور ضابطہ جو عملی طور پر (۲) یا (۳) کی نسبت زیادہ صحیح ثابت ہوتا ہے اس طرح حاصل ہو سکتا ہے، دفعہ ۲، حصۂ اول کی رُو سے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{فا}(\text{لا}) = \text{فا}(\text{ج}) + (\text{لا} - \text{ج})\,\text{فا}'(\text{ج}) + \frac{1}{2}(\text{لا} - \text{ج})^2\,\text{فا}''(\text{لا}_1)$$

اگر لا ـ ج چھوٹا ہو تو ہم یہ مان سکتے ہیں کہ $\text{فا}''(\text{لا}_1)$ کا فرق $\text{فا}''(\text{ج})$ سے بہت کم ہے، اگر فا (لا) دوسرے درجہ کا ہو تو $\text{فا}''(\text{لا}_1)$، $\text{فا}''(\text{ج})$ کے بالکل مساوی ہوگا۔

اب مساوات $\text{صا} = \text{فا}(\text{ج}) + (\text{لا} - \text{ج})\,\text{فا}'(\text{ج}) + \frac{1}{2}(\text{لا} - \text{ج})^2\,\text{فا}''(\text{ج}) \ldots (4)$

ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے، پس فا (لا) کی ترسیم کے ایک چھوٹے سے طول کی بجائے ہم اس مکافی کی قوس رکھ سکتے ہیں۔

اب دوہرے ٹکڑے ل ل_2 ع ع_2 پر غور کرو، سہولت کی خاطر فرض کرو کہ $\text{و ل}_1 = \text{ج}$، $\text{و ل} = \text{ج} - \text{ھ}$، $\text{و ل}_2 = \text{ج} + \text{ھ}$، اب یہ تسلیم کر کے کہ قوس ع ع_1 ع_2 پر فا (لا) کی قیمت (۴) کو استعمال کرنے سے حاصل

ہو سکتی ہے ہمیں رقبہ ل ل، ع، ع کے لئے حاصل ہوتا ہے

$$\int^{ج+ھ} فا(لا)\,فرلا = \int^{ھ}_{-ھ} فا(لاَ+ج)\,فرلاَ = ۲ھ\,فا(ج) + \frac{ھ^۳}{۳}\,فاً(ج)$$ .... (۵)

جہاں تکمل کرنیکے لئے ہم رکھتے ہیں لا = لاَ + ج۔ یہ تسلیم کرکے کہ فا(لا) کی قیمت (۴) سے حاصل ہوتی ہے ہم (۵) کو ھ، طا، طا۲، طا۳ کی رقوم میں بیان کرسکتے ہیں کیونکہ فا(ج) = طا۲ اور

$$طا_۱ = فا(ج-ھ) = فا(ج) - ھ\,فاَ(ج) + \frac{۱}{۲}ھ^۲\,فاً(ج)$$

$$طا_۳ = فا(ج+ھ) = فا(ج) + ھ\,فاَ(ج) + \frac{۱}{۲}ھ^۲\,فاً(ج)$$

جمع کرنے سے

$$ھ^۲\,فاً(ج) = طا_۱ + طا_۳ - ۲\,فا(ج) = طا_۱ + طا_۳ - ۲\,طا_۲$$

اور (۵) ہو جاتی ہے $\frac{۱}{۳}ھ\,(طا_۱ + ۴\,طا_۲ + طا_۳)$ .... (۶)

اب فرض کرو کہ رقبہ ل مط ع کو متساوی الفصل معینوں کی طاق تعداد ۲ن + ۱ سے ٹکڑوں کی جفت تعداد ۲ن میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ضابطہ (۶) کو سلسلہ دار ن دوہرے ٹکڑوں کے لئے استعمال کرنے سے ن جملوں کا مجموعہ حسب ذیل حاصل ہوتا ہے، رقموں کو نئی ترتیب کے موافق لکھا گیا ہے

$$ق = \frac{۱}{۳}ھ\,\{ طا_۱ + طا_{۲ن+۱} + ۲(طا_۳ + طا_۵ + \ldots\ldots + طا_{۲ن-۱})$$

$$+ ۴(طا_۲ + طا_۴ + \ldots\ldots + طا_{۲ن}) \}$$ .... (۷)

(۷) سمسن کا ضابطہ کہلاتا ہے۔ الفاظ میں اسے یوں بیان کرسکتے ہیں، رقبہ کو متساوی الفصل معینوں سے ٹکڑوں کی جفت تعداد میں تقسیم کرو۔

(۱) شروع اور اخیر کے معینوں کا مجموعہ معلوم کرو۔

(۲) باقی ماندہ طاق معینوں کے مجموعہ کا دو چند معلوم کرو۔

(۳) جفت معینوں کے مجموعہ کا چار گنا معلوم کرو۔
اِن تین مجموعوں کو جمع کرو اور اِس حاصل جمع کو معینوں کے مشترک فاصلہ کے ایک تہائی سے ضرب دو۔

فرض کرو کہ $\text{ع} = \text{ط}_{1} + \text{ط}_{2\text{ن}+1}$

$$\text{و} = \text{ط}_{2} + \text{ط}_{4} + \text{ط}_{6} + \dots\dots + \text{ط}_{2\text{ن}}$$

$$\text{ر} = \text{ط}_{3} + \text{ط}_{5} + \dots\dots + \text{ط}_{2\text{ن}-1}$$

تب ھ، ع، و، ر کی رقوم ہیں

$$\text{ق}_{1} = \frac{1}{2}\,\text{ھ}\,(\text{ع} + 2\,\text{و} + 2\,\text{ر})،\quad \text{ق}_{2} = 2\,\text{ھ}\,\text{و}$$

$$\text{ق}_{3} = \frac{1}{3}\,\text{ھ}\,(\text{ع} + 4\,\text{و} + 2\,\text{ر})$$

اس لئے $\text{ق}_{3} = \frac{2}{3}\,\text{ق}_{1} + \frac{1}{3}\,\text{ق}_{2}$ .... (۸)

فرض کرو کہ ترسیم اوپر کی طرف محدب ہے اور معین مثبت ہیں یعنی

$$\text{ق}_{1} < \text{رقبہ ل م ط ع} < \text{ق}_{2}$$

تب $\text{ق}_{2} - \text{ق}_{3} = \frac{1}{3}\,(\text{ق}_{2} - \text{ق}_{1})$

$$\text{ق}_{3} - \text{ق}_{1} = \frac{2}{3}\,(\text{ق}_{2} - \text{ق}_{1})$$

اس لئے سمسن کے کلیہ میں غلطی یا خطا $\frac{2}{3}\,(\text{ق}_{2} - \text{ق}_{1})$ یا $\frac{1}{3}\,\text{ھ}\,(2\,\text{و} - 2\,\text{ر} - \text{ع})$ .... (۹)

سے کم ہے۔

ضابطہ (۸) سے ظاہر ہوتا ہے کہ سمسن کے کلیہ میں بیرونی کثیر الاضلاع کی نسبت اندرونی کثیر الاضلاع کو زیادہ اہمیت دی گئی ہے۔

تقرب کے مندرجہ بالا طریقے ایک محدود تکملہ کی صورت میں بھی استعمال ہو سکتے ہیں خواہ فا(لا) کو منحنی کا معین تصور کیا جائے یا نہ کیا جائے مثلاً قطبی محددوں میں

فا (لا)، کسی منحنی کا سمتی نیم قطر ہو سکتا ہے اور لا سمتی زاویہ۔ اس صورت میں معینوں فا، فا، فا .... کی بجائے تفاعل کی وہ قیمتیں استعمال ہونگی جو دلیل یا وجہ کی متساوی الفرق قیمتوں کے جواب میں حاصل ہوں۔ تقربات کے استعمال کی مشہور عملی صورت مجسمات کی مساحت میں ملتی ہے جہاں فا، فا ...... متساوی الفصل تراشوں کے رقبے ہوتے ہیں (عملی مساحت میں سمسن کے کلیہ کے استعمال کے متعلق ملاحظہ ہو لو ج کی مساحت اعلیٰ مدارج کے طلبہ کے لئے، لنڈن، لونگ مین)

مثال $\int_1^2 \frac{\text{فر لا}}{\text{لا}}$ کو محسوب کرو۔

فرض کرو کہ ۲ن + ۱ = ۱۱، ھ = ۰٫۱، ا = ۱، ب = ۲

معمولی حساب سے معلوم ہوگا کہ

ع = ۱٫۵، و = ۳٫۴۵۹۵۳۹۴، ر = ۲٫۷۲۸۱۷۲۶

ق$_۱$ = ۱٫۰۰۷۷۳۹۳، ق$_۲$ = ۰٫۶۹۱۹۰۸، ق$_۳$ = ۰٫۶۹۳۱۵۰

تکملہ کی ٹھیک قیمت لوک ۲ یعنی ۰٫۶۹۳۱۴۷ ہے، $\frac{۲(\text{ق}_۱ - \text{ق}_۲)}{۳}$

کی قیمت ۰٫۰۰۱۲۴۲ ہے اور ق$_۳$ ـ لوک ۲ کی ۳ ......۰٫

بالعموم سمسن کے ضابطہ کی غلطی اُس اندازہ سے بہت کم ہوتی ہے جو (۹) سے حاصل ہوتا ہے۔

مشق ۸

۱۔ ایک مستوی سطح جو محور لا پر عمود وار ہے ایک سطح کو کاٹتی ہے اور اس تراش کا رقبہ فا (لا) ہے، دفعہ ۲۴ میں جو معین فا، فا، فا ...... ہیں اگر ان کی بجائے تراشوں س، س ...... کے رقبے استعمال کئے جائیں تو جملات (۲)، (۳)، (۶)، (۷) سے سطح کا حجم معلوم ہوتا ہے جو متناظر مستوی سروں کے درمیان گھرا ہوا ہے۔ پس (۶) سے حجم معلوم ہوگا

$$\text{ح} = \frac{۱}{۳}\,\text{ھ}\,(\text{س}_۱ + ۴\,\text{س}_۲ + \text{س}_۳) \text{.........} \quad (۱)$$

جہاں $س_۱$، $س_۲$ سروں کی تراشوں کے رقبے ہیں، $س_۳$ وسطی تراش کا رقبہ ہے اور ۲ ھ سروں کی تراشوں کا درمیانی فاصلہ ہے، قیمت (۱) تقریبی ہونے کی بجائے بالکل صحیح ہوگی جبکہ فا (لا)، لا کا دو درجی تفاعل ہو۔

اس ضابطہ کو استعمال کرنے سے دفعہ ۱۰ کے حجموں کے متعلق نتائج حاصل کرو۔ نیز اس ضابطہ کو اس مجسم پر لگاؤ جو مکافی کے محور کے گرد گھومنے سے پیدا ہوتا ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ ضابطہ (۱) منشور نما کے لئے بھی درست رہتا ہے۔

منشور نما ایک مجسم ہے جس کی اوپر اور نیچے کی احاطہ کرنے والی سطحیں کثیر الاضلاع اشکال ہوتی ہیں، ان اشکال کے متناظر اضلاع متوازی ہوتے ہیں اور ان کی تعداد اضلاع دہی ہوتی ہے۔ اور اس حجم کے اطراف احاطہ کرنے والی سطحیں منحرف ہوتی ہیں۔

۳۔ شراب کے ایک پیپے میں $د_۱$ چوٹی کا قطر ہے اور $د_۲$ ڈاٹ والا قطر ہے اور ھ پیپے کی گہرائی ہے۔ ثابت کرو کہ جب پیپے کا منحنی مکافی ہو تو اسکا حجم ہوگا

$$\frac{ط}{۱۲} ھ \left\{ د_۱^۲ + ۲ د_۲^۲ - \frac{۲}{۱۰} (د_۲ - د_۱)^۲ \right\}$$

جب پیپے کے نچلے اور اوپر کے نصف باہم مساوی اور متشاکل ہوں اور ہر نصف گردش کا ناقص یا کٹا ہوا مکافی نما ہو اور بڑے سرے پیپے کے وسط میں آ جوڑے جائیں، تو ثابت کرو کہ پیپے کا حجم

$$\frac{ط}{۸} ھ (د_۱^۲ + د_۲^۲) \text{ ہے۔}$$

۴۔ اگر فا (لا) = ا + ب (لا - ج) + ع (لا - ج)^۲ + ف (لا - ج)^۳ تو ثابت کرو کہ دفعہ ۴۴ کا ضابطہ (۶) قائم رہتا ہے۔

۵۔ اگر فا (لا) = ا + ب لا + ج لا^۲ + د لا^۳ اور اگر فا (لا) کی قیمتیں لا کی قیمتوں ا، ا + ھ، ا + ۲ ھ، ا + ۳ ھ کے جواب میں بالترتیب $فا_۱$، $فا_۲$، $فا_۳$، $فا_۴$ ہوں تو ثابت کرو کہ جو رقبہ منحنی، محور لا اور معینوں $فا_۱$، $فا_۴$ کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ $\frac{۳}{۸}$ ھ ($فا_۱$ + ۳ $فا_۲$ + ۳ $فا_۳$ + $فا_۴$) ہے۔

اس ضابطہ کو بعض اوقات سمسن کا دوسرا کلیہ کہتے ہیں۔
اسے ثابت کرنے کے لئے رکھو لا = ا + ھ ت، تب فا (لا) کی شکل ہوگی

فہ (ت) = ک + ق ت + ر ت^۲ + س ت^۳

اور ما، ما۱، ما۲، ما۳ فہ (ت) کی قیمتیں ہیں ت کی قیمتوں ۰، ۱، ۲، ۳ کے لئے اور رقبہ ہے

$$\int_{ا}^{ا+۳ھ} فا(لا)\, ف لا = ھ \int_{۰}^{۳} فہ (ت)\, ف ت$$

۶۔ ثابت کرو کہ

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} لوک\ جب\ لا\ ف لا = - \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} لا\ ضم\ لا\ ف لا$$

اور سمسن کے کلیہ سے تکملہ کی قیمت معلوم کرو۔
تکملہ کی صحیح قیمت $-\frac{\pi}{۲}$ لوک ۲ ہے۔
تکملہ کو ع سے تعبیر کرو۔ تب

$$ع = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} لوک\ جب\ لا\ ف لا = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} لوک\ جم\ لا\ ف لا = \frac{۱}{۲} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} (لوک\ جب\ لا + لوک\ جم\ لا)\, ف لا$$

$$پس\ ۲ع = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} لوک\ (\tfrac{۱}{۲}\ جب\ ۲لا)\, ف لا = \frac{\pi}{۲} لوک\ \frac{۱}{۲} + \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} لوک\ جب\ ۲لا\ ف لا$$

$$نیز\ \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} لوک\ جب\ ۲لا\ ف لا = \frac{۱}{۲} \int_{۰}^{\pi} لوک\ جب\ ی\ ف ی = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} لوک\ جب\ ی\ ف ی$$

اور نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

۷۔ ثابت کرو کہ $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} لوک\ مس\ لا\ ف لا = ۰$ ۔ [عمل تکمل کی ضرورت نہیں۔]

۸۔ ثابت کرو کہ جب ن مائل ∞ ہو تو $\sum_{ر=۰}^{ر=ن-۱} \frac{۱}{\sqrt{ن^۲ - ر^۲}}$ کی انتہا $\frac{\pi}{۲}$ ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ جب ن مائل بہ ∞ ہو تو $\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}-1} \frac{\text{ن}}{\text{ن}^2 + \text{ر}^2}$ کی انتہا $\frac{\pi}{4}$ ہے۔

۲۵۔ اوسط قیمتیں۔ ن مقادیر ما۱، ما۲، ما۳ ...... ما ن کا اوسط حسابی $\frac{\text{ما}_1 + \text{ما}_2 + \dots + \text{ما}_\text{ن}}{\text{ن}}$ ہے۔ فرض کرو کہ لا کی قیمتوں ا، ا + ھ، ا + ۲ ھ، ا + ۳ ھ ...... ب - ھ کے جواب میں فا(لا) کی قیمتیں ما۱، ما۲، ما۳ ...... ما ن ہیں جہاں وقفہ ب - ا کو طول ھ کے ن مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ما۱، ما۲ ...... ما ن کے اوسط حسابی کی انتہا جبکہ ن ← ∞ تفاعل فا(لا) کی اوسط قیمت کہلاتی ہے سعت ب - ا میں۔

اوسط قیمت کو بطور تکملہ کے بیان کر سکتے ہیں کیونکہ

$$\left(\frac{\text{ما}_1 + \text{ما}_2 + \dots + \text{ما}_\text{ن}}{\text{ن}}\right) = \left(\frac{\text{ما}_1\,\text{ھ} + \text{ما}_2\,\text{ھ} + \dots + \text{ما}_\text{ن}\,\text{ھ}}{\text{ب} - \text{ا}}\right) \dots (1)$$

اور بائیں جانب کی کسر کا شمار کنندہ

$$\text{فا}(\text{ا})\,\text{ھ} + \text{فا}(\text{ا} + \text{ھ})\,\text{ھ} + \dots + \text{فا}(\text{ب} - \text{ھ})\,\text{ھ}$$

ہے اور اسکی انتہا ن ← ∞ (اور اس لئے ھ ← ۰) کے لئے ہے

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا}$$

پس اوسط قیمت ہے

$$\frac{1}{\text{ب} - \text{ا}} \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا} \dots (2)$$

مثال ۱۔ نیم قطر ا کے نصف دائرہ کے معیّن کی اوسط قیمت ہے

$$\frac{1}{2\text{ا}} \int_{-\text{ا}}^{\text{ا}} \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\,\text{فرلا} = \frac{\pi}{4}\,\text{ا} = 0{,}7854\,\text{ا}$$

اس صورت میں قطر کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ لیکن اگر نصف محیط کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے اور تفاعل کا متغیر متبوع قوس اط ہو جہاں ط، قطر کے ایک سرے سے اس نقطہ تک ناپا گیا ہے جہاں سے معین

گرایا گیا ہے تو چونکہ معین کا طول ا جب طہ ہے اس لئے اوسط قیمت ہوگی

$$\frac{1}{\pi\, ا} \int^{\pi} ا\ جب\ طہ\ ا\ فرطہ = \frac{2}{\pi} ا = ۰٫۶۳۶۶\ ا$$

پس یاد رہے کہ اوسط قیمت کا ذکر کرنے میں متغیر متبوع کی تخصیص ضروری ہے۔

مثال ۲۔ سوسنفی منحنی کی صورت میں لا = ۰ سے لا = π تک (۱) اوسط معیّن (۲) اور معیّن کے مربع کا جو اوسط ہے اس کا جذر المربع معلوم کرو۔

$$(۱)\ اوسط\ معیّن = \frac{1}{\pi} \int^{\pi} ا\ جب\ لا\ فرلا = \frac{2}{\pi} ا = ۰٫۶۳۶۶\ ا$$

صورت (۲) میں تفاعل ہے $ص^2$ اور $ص^2$ کی اوسط قیمت

$$\frac{1}{\pi} \int^{\pi} ا^2 جب^2 لا\ فرلا = \frac{1}{2} ا^2$$

اور اس اوسط کا جذر المربع $\frac{ا}{\sqrt{2}}$ یعنی ۰٫۷۰۷۱ ا ہے۔

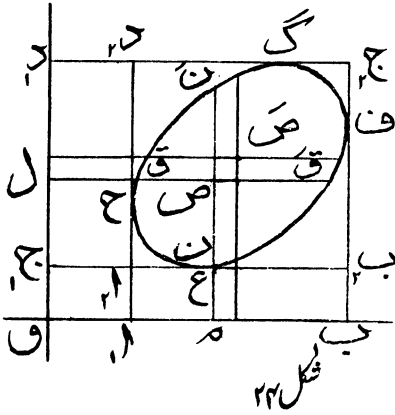
متبادل برقی رو کے نظریہ میں کارآمد اوسط (۱) نہیں ہے بلکہ (۲) ہے، موخر الذکر کو اختصاراً معیّن کی اوسط مربع قیمت کہا جا سکتا ہے۔

اگر وقفہ ب ۔ ا کو ن ذیلی وقفوں $ھ_1$، $ھ_2$ ...... میں تقسیم کیا جائے اور اگر ان وقفوں میں کے کسی نقاط پر بالترتیب فا (لا) کی قیمتیں $ص_1$، $ص_2$، $ص_3$ ...... ہوں تو جب، ن لا انتہا ہوگا (یعنی ہر ذیلی وقفہ $ھ_1$، $ھ_2$ ...... صفر ہوگا)

تو $\dfrac{ص_1 ھ_1 + ص_2 ھ_2 + ... + ص_ن ھ_ن}{ب - ا}$ کی انتہا وہی (۲) ہوگی۔

پس تکملہ (۲) کو ہم فا (لا) کی اوسط قیمت کی تعریف خیال کر سکتے ہیں۔

۲۶۔ دوہرے تکملے

فرض کرو کہ ع ف گ ح (شکل ۲۴) ایک مستوی منحنی ہے اور ف (لا، ص) منحنی کے اندر یا اوپر کے سب نقاط کے لئے ایک وحید القیمت مسلسل تفاعل ہے۔ فرض کرو کہ $ا_1$ ح، ب ف اور $ج_1$ ع، د گ محورین کے متوازی مماس ہیں۔ ہم مان لیتے ہیں کہ کوئی خط مستقیم منحنی کو دو سے زیادہ

نقطوں پر نہیں کاٹتا۔
اگر کوئی منحنی اس شرط کو پورا نہ کرے تو اسے ایسے جزوی رقبوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے جن میں سے ہر ایک اس شرط کو پورا کرے۔
فرض کرو کہ ا ب کو م اور ج د کو ن ذیلی وقفوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور نقاط تقسیم میں سے محوروں کے متوازی خط کھینچے گئے ہیں۔ رقبہ ع ف د ح اس طرح چھوٹے چھوٹے مستطیلوں میں تقسیم ہو جائیگا اگرچہ ع ف گ ح کے محیط کے نزدیک ان مستطیلوں کے ایسے نقاط ہوں گے جو منحنی کے باہر واقع ہوں گے۔

شکل ۲۴

فرض کرو کہ ا ب پر کے دو متصل نقاط تقسیم کے فصلے لا$_{ر}$ ، لا$_{ر}$ + مف لا$_{ر}$ ہیں اور ج د پر کے دو متصل نقاط تقسیم کے معین ما$_{س}$ ، ما$_{س}$ + مف ما$_{س}$ ہیں اور نقاط ص ، صَ کے محدد (لا$_{ر}$ ، ما$_{س}$) ، (لا$_{ر}$ + مف لا$_{ر}$ ، ما$_{س}$ + مف ما$_{س}$) ہیں۔
مستطیل ص صَ کے رقبہ مف لا$_{ر}$ مف ما$_{س}$ کو ف (لا$_{ر}$ ، ما$_{س}$) کے ساتھ ضرب دو جو ف (لا ، ما) کی قیمت ص پر ہے، اس طرح سے حاصل جمع

$\sum$ ف (لا$_{ر}$ ، ما$_{س}$) مف لا$_{ر}$ مف ما$_{س}$ ...... (۱)

ع ف گ ح کے محیط اور اندر کے سب نقاط کے لئے مرتب کرو۔
[ہندسی نقطہ نظر سے ی = ف (لا ، ما) ایک سطح کو تعبیر کرتی ہے۔
حاصل جمع (۱) کے نمونہ کی رقم ف (لا$_{ر}$ ، ما$_{س}$) مف لا$_{ر}$ مف ما$_{س}$ اس

متوازی السطوح کا حجم ہے جس کا قاعدہ مستطیل مف لا مف ما ہے اور ارتفاع اس نقطہ کا ی، بحدود ف (لا، ما) ہے جہاں نقطہ ص پر چھوٹے مستطیل پر کا عماد سطح سے ملتا ہے۔ پس مجموعہ (۱) اس مجسم کے حجم کو تقریباً تعبیر کرتا ہے جو گھرا ہوا ہے سطح ی = ف (لا، ما) سے، سطح مستوی لا و ما سے اور اس اسطوانہ سے جو ایک خط مستقیم محیط ع ف گ ح کے گرد حرکت کرنے سے پیدا کرتا ہے جبکہ یہ خط اثنائے حرکت میں ہمیشہ سطح لا و ما پر عمود رہے [مقابلہ کرو اشکال ۴۸، ۴۹ حصہ اول کے ساتھ]

ہم (۱) کی انتہا معلوم کرنا چاہتے ہیں جبکہ م اور ن میں سے ہر ایک لا انتہا بڑھے اور ساتھ ہی ہر جزو مف لا، مف ما اور اس لئے ہر رقبہ مف لا مف ما لا انتہا گھٹے۔ چونکہ (۱) میں دو طرح کے اضافے ہیں ہم (۱) کو جائز طور پر دوہرے مجموعہ سے تعبیر کر سکتے ہیں

$$\Sigma\Sigma\ ف\ (لا،\ ما)\ مف\ لا\ مف\ ما \quad\ldots\ldots\ (۲)$$

جہاں ایک Σ مف ما سے متعلق ہے اور دوسرا مف لا سے۔

پہلے لا اور مف لا کو مستقل رکھو یعنی ن ← ∞ کے لئے انتہا معلوم کرو

$$\underset{ن \to \infty}{نہا}\ \Sigma\ ف\ (لا،\ ما)\ مف\ ما$$

جو ایک متغیر (یعنی ما) کے تکملہ کی تعریف کے مطابق $= \int_{مر_۱}^{مر_۲} ف\ (لا،\ ما)\ فر\ ما$ .... (۳)

تکملہ (۳) میں لا، مر۱، مر۲ واقع ہونگے لیکن مر۱ اور مر۲ دونوں منحنی ع ف گ ح کی مساوات کی وجہ سے و مر یعنی لا کے تفاعل ہیں۔ اس لئے (۳)، لا کا تفاعل ہے اور فا (لا) سے تعبیر ہو سکتا ہے۔

[ہندسی نقطہ نظر سے فا (لا) مذکورہ بالا مجسم کی اس تراش کے منحنی کا رقبہ ہے

جو ن ن میں سے گذرنیوالی مستوی سطح جو لا و ما پر عمود وار ہے مجسم سے کاٹتی ہے، اور اگر صغاریات کے صرف پہلے رتبہ کو ملحوظ رکھا جائے تو فہ (لاِ) مف لاِ مجسم کے ایک ٹکڑے کا حجم ہے جس کی موٹائی مف لاِ ہے]

اس کے بعد م ← ∞ کے لئے انتہا معلوم کرو۔

نہا (م ← ∞) ∑ مف لاِ فہ (لاِ) = ∫ (و۱ سے وب۱ تک) فہ (لا) فرلا ....(۴)

پس (۱) کی انتہا تکملہ (۴) کے ذریعہ بیان ہوسکتی ہے اور یہ انتہا مذکورہ بالا مجسم کا حجم ہے۔

چونکہ فہ (لا) خود ایک تکملہ ہے، اس لئے جملہ (۴) دوہرا تکملہ ہے اور یہ دوہرا تکملہ اس علامت سے تعبیر ہوسکتا ہے

∫ (و۱ سے وب۱ تک) فرلا ∫ (من سے منَ تک) ف (لا، ما) فرما ....(۵)

(۴) کے طرز ثبوت سے ظاہر ہے کہ (۵) جو محض ضابطہ (۴) کی علامتی ترقیم ہے الفاظ میں اس طرح بیان ہوسکتا ہے۔ ف (لا، ما) کو بلحاظ ما کے ما = من سے ما = منَ تک تکمل کرو اور اس عمل تکمل میں لا کو مستقل قرار دو پھر ماحصل کو بلحاظ لا کے لا = و۱ سے لا = وب۱ تک تکمل کرو۔

ہم پہلے م کو پھر ن کو لا انتہا بنانے سے (۱) کی انتہا معلوم کرسکتے ہیں، اس صورت میں نتیجہ اس طرح بیان ہوگا

∫ (وج۱ سے وح۱ تک) فرما ∫ (لق سے کق تک) ف (لا، ما) فرلا ....(۶)

(۶) میں عمل تکمل پہلے بلحاظ لا کے کیا جاتا ہے اور اس عمل میں ما کو مستقل رکھا جاتا ہے، پھر ماحصل کو بلحاظ ما کے تکمل کیا جاتا ہے۔ صریحاً دوہرے تکملے (۵) اور (۶) باہم مساوی ہیں کیونکہ وہ ایک ہی حجم کو تعبیر کرتے ہیں۔

جب رقبہ زیر بحث مستطیل اب ج د ہو تو (۵) میں ما کے حدود مستقل ہونگے یعنی و ج، و د بالترتیب اور (۶) میں لا کے حدود ل ق، ل ف بھی مستقل ہوں گے یعنی و ا، و ب بالترتیب۔ اس لئے و ا، و ب، و ج، و د کی بجائے بالترتیب ا، ب، اَ، بَ لکھنے سے

$\int_{ا}^{ب} فرلا \int_{اَ}^{بَ} ف(لا، ما) فرما = \int_{اَ}^{بَ} فرما \int_{ا}^{ب} ف(لا، ما) فرلا$ ...(۷)

یعنی جب سب حدود مستقل ہوں تو ما اور لا کے حدود وہی ہونگے خواہ تکمل کے اعمال کو کسی ترتیب میں لیا جائے۔ جب حدود سب مستقل نہ ہوں تو (۵) میں ما کے (یا لا کے) حدود وہی نہیں ہونگے جو مساوی تکملہ (۶) میں ما کے (یا لا کے) حدود ہیں۔

دوہرے تکملہ کی ہندسی تعبیر نہایت کارآمد ثابت ہوتی ہے، لیکن اسکے مفہوم کی توضیح اور طرح سے بھی ہو سکتی ہے، مثلاً ف(لا، ما) کو رقبہ ع ف گ ج پر مادہ کی متغیر سطحی کثافت خیال کیا جا سکتا ہے، اس صورت میں تکملہ سے کل کمیت مادہ حاصل ہوگی۔

۲۷ - دوہرے تکملوں کی ترقیم۔ قطبی اجزا۔ ضابطہ (۵) اور (۶) کی شکل سے ٹھیک طور پر واضح ہوتا ہے کہ تکملے کس ترتیب سے لئے جانے چاہئیں لیکن اور ترقیمیں بھی استعمال ہو سکتی ہیں جو اگرچہ ایسی صریح اور بین نہیں تاہم آسان اور سہولت دہ ضرور ہیں، مثلاً یہ صورت

$\iint ف(لا، ما) فرلا فرما$ ....(۸)

کچھ ایسے اضافہ کے ساتھ کہ "عمل تکمل کو کل رقبہ ع ف گ ح پر وسعت دیجائے" (۵) یا (۶) کے معادل کے طور پر استعمال ہو سکتی ہے۔

(۵) کی بجائے ذیل کی علامت اکثر استعمال کی جائے گی

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_0}^{r_1} f(r, \theta)\, r\, dr$$

جس کے متعلق اس دستور کو ملحوظ رکھا جائیگا کہ پہلا تکمل بلحاظ اس متغیر کے ہوگا جو سب سے بائیں جانب ہے یعنی θ اور اس کے حدود اس علامت پر مرقوم ہونگے جو عین تکمل کے پاس ہے یعنی r_0، r_1۔ علاوہ اس کے ہم فرض کرسکتے ہیں کہ رقبہ ABC ایسے جزوی رقبوں میں تقسیم کیا گیا ہے جو مستطیل نہیں ہیں۔ اگر نمونہ کا ایسا جزوی رقبہ δs ہو اور اگر δs کے اندر یا اسکے محیط پر کے کسی نقطہ کے محدد (r, θ) ہوں تو (۱) کے جواب میں مجموعہ

$$\Sigma f(r, \theta)\, \delta s \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

مرتب ہوگا۔ ہندسی نقطہ نظر سے اگر دیکھا جائے تو (۱) سے دفعہ گذشتہ کے مجسم کا تقریبی حجم حاصل ہوگا۔ رقبوں δs کی تعداد کے لا انتہا بڑھانے اور اسکی بناء پر ہر رقبہ δs کے لا انتہا گھٹانے سے جو انتہا حاصل ہوگی وہ مجسم مذکور کا حجم ہوگا اس انتہا کو اس طرح تعبیر کیا جائیگا

$$\int f(r, \theta)\, ds \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

جہاں عمل تکمل کو کل رقبہ ABC پر توسیع دی گئی ہے۔

مسئلہ ۲ دفعہ ۸ حصہ اول کی رو سے یہ دیکھنا آسان ہے کہ جہاں تک مجموعہ (۱) کی انتہا (۹) کا تعلق ہے (r, θ)، δs کے اندر یا محیط پر کوئی نقطہ ہو سکتا ہے، اس بات کا یاد رکھنا نہایت ضروری ہے کیونکہ اس میں جو اصول پنہاں ہے وہ اکثر استعمال کیا جاتا ہے (مثال کے طور پر دیکھو دفعہ ۲۸ کی مثال ۳)

فرض کرو δs کا تعین اس طرح ہوتا ہے۔ دو متحد المرکز دائرے لو جن کے نصف قطر r اور $r + \delta r$ ہوں ان کے دو نصف قطر لو جو ابتدائی خط کے ساتھ زاوئے θ اور $\theta + \delta\theta$ بنائیں۔ جو دائروں کی قوسوں

اوران نصف قطروں کے درمیان چھوٹا رقبہ گھرا ہوا ہے اُسے ہم مف س فرض کرسکتے ہیں، ظاہر ہے کہ اس میں ر، طہ نقطہ کے قطبی محدد ہیں، پس

مف س = ½ (ر + مف ر)² مف طہ - ½ ر² مف طہ

= ر مف ر مف طہ + ½ (مف ر)² مف طہ

پس صغاریات کے رتبہ اول تک مف س = ر مف ر مف طہ

اگر ف (لا، ما) میں لا = ر جم طہ، ما = ر جب طہ رکھا جائے اور اسکی تبدیل شدہ شکل فا (ر، طہ) ہو جائے تو (۹) کی بجائے یا اسکے معادلات (۵)، (٦) کی بجائے ملیگا۔

∫∫ فا (ر، طہ) ر قر ر قر طہ .... (۱۰)

جہاں عمل تکمل کو کل رقبہ ع ف گ ح پر توسیع دی گئی ہے۔

بلحاظ طہ کے تکمل کرنے میں ر کو مستقل رکھا جائیگا، طہ تکمل سے ہندسی تعبیر کے مطابق مجسم کی اسطوانی تراش کا رقبہ ملیگا۔ تکملہ (۱۰) کی قیمت معلوم کرنے سے پہلے منحنی ع ف گ ح کو کھینچ لینا چاہئے اور اس امر کی احتیاط رکھنی چاہئے کہ کوئی رقبہ سوائے ان رقبوں کے جو منحنی سے متعلق ہیں حساب لگانے میں شریک نہ ہو جائے یا منحنی سے متعلق کوئی رقبہ حساب لگانے میں رہ نہ جائے یہی ہدایت اکثر تکملی اعمال پر عائد ہوگی۔

طالب علم ان نتائج کی توسیع بآسانی تہرے تکملوں

∫∫∫ ف (لا، ما، ی) قر لا قر ما قر ی یا ∫ ف (لا، ما، ی) قر ح

کی صورت میں کرسکتا ہے جہاں قر لا قر ما قر ی یا قر ح حجم کا ایک جزو ہے اور ف (لا، ما، ی) مثلاً نقطہ (لا، ما، ی) پر کثافت ہے، بلحاظ ی کے تکمل کرنے سے جبکہ لا، ما کو مستقل رکھا جائے اُس ستون کی کمیت حاصل ہوگی جو قاعدہ قر لا قر ما پر کھڑا ہے۔ پھر ما تکمل سے جبکہ لا کو مستقل رکھا جائے ایک ایسی قاش کی کمیت حاصل ہوگی جس کی موٹائی قر لا ہے اور جو محور لا پر عمود وار ہے اور آخرالامر لا،

تکمل سے حجم کی کل قیمت حاصل ہوگی۔

مثال ۱۔ اس چارسطحی کا حجم معلوم کرو جو محدودوں کی سطوح مستویہ اور سطح

$\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} + \frac{\text{ی}}{\text{ج}} = ۱$ سے گھری ہوئی ہے، ا، ب، ج تینوں مثبت ہیں

یعنی ع ف گ ح اس صورت میں مثلث و ط۲ ط۳ ہے ط۱ ط۲ کی مساوات ہے

$$\text{ما} = \text{ب}\left(۱ - \frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)$$

اور $\text{م ن} = \text{ب}\left(۱ - \frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)$

اور دفعہ ۲۶ کا م ن اسجگہ صفر ہے۔

$\text{س ر} = \text{ف}(\text{لا}، \text{ما}) = \text{ی}$

$= \text{ج}\left(۱ - \frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)$

اس لیے (۵) کو استعمال کرنے سے حجم حاصل ہوگا

شکل ۲۵

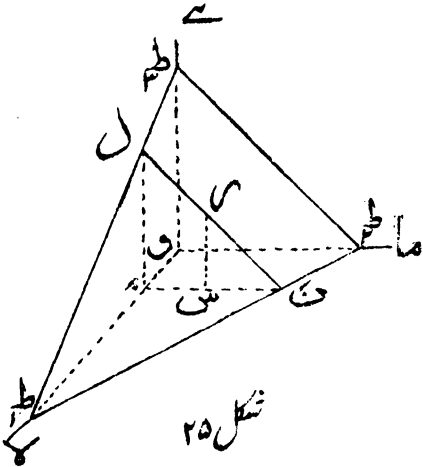
$$\int_۰^{\text{ا}} \text{فرلا} \int_۰^{\text{م ن}} \text{ی فرما} = \text{ج} \int_۰^{\text{ا}} \text{فرلا} \left[\left(۱ - \frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)\text{ما} - \frac{۱}{۲}\frac{\text{ما}^۲}{\text{ب}}\right]_۰^{\text{م ن}}$$

$$= \frac{۱}{۲}\,\text{ب ج} \int_۰^{\text{ا}} \left(۱ - \frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)^۲ \text{فرلا} = \frac{۱}{۶}\,\text{ا ب ج}$$

جبکہ $\frac{۱}{۲}\,\text{ب ج}\left(۱ - \frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)^۲$ مثلث ل م ن کا رقبہ ہے۔

مثال ۲۔ تکملہ $\int \text{لا}^۲\, \text{فرح}$ کی قیمت معلوم کرو جبکہ اسے ناقص نما

$\frac{\text{لا}^۲}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ما}^۲}{\text{ب}^۲} + \frac{\text{ی}^۲}{\text{ج}^۲} = ۱$ کے تمام حجم میں سے لیا جائے۔

$$\int \text{لا}^۲\, \text{فرح} = \int \text{لا}^۲\, \text{فرلا} \iint \text{فرما فری} = \int_{-\text{ا}}^{\text{ا}} \text{لا}^۲\, \text{فرلا} \left[\pi\, \text{ب ج}\left(۱ - \frac{\text{لا}^۲}{\text{ا}^۲}\right)\right]$$

کیونکہ بلحاظ ما اور ی کے تکمل کرنے میں لا مستقل ہے اور ∫∫ فرما فری اس تراش کا رقبہ ہے جو محور لا پر عمود دار ہے۔ اب بلحاظ لا کے تکمل کرو، نتیجہ $\frac{4\pi a^3 b c}{15}$ حاصل ہوتا ہے۔ تفاعل لا^2 کی اوسط قیمت ناقص نما کے تمام حجم میں اوپر کی قیمت $\frac{4\pi a^3 b c}{15}$ کو حجم پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے یعنی $\frac{a^2}{5}$ ۔

بالعموم تفاعل ف (لا، ما) کی اوسط قیمت رقبہ ع ف گ ح (شکل ۲۴) پر تکملہ (۵) یا (۶) کو کل رقبہ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوگی اور اسی طرح کی تعریف کل حجم میں کی اوسط قیمت کے لئے صادق آئے گی۔ اگر اس مثال میں لا^2 نقطہ (لا، ما، ی) پر ناقص نما کی کمیت مادہ کی کثافت ہو تو $\frac{a^2}{5}$ اس کمیت مادہ کی اوسط کثافت ہوگی۔

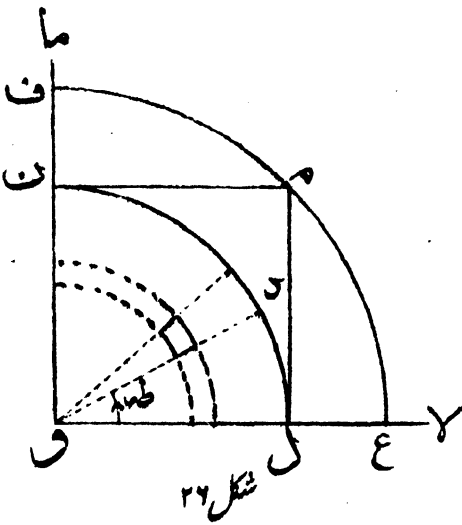
مثال ۳۔ فہ (لا) صرف لا کا تفاعل ہے اور سا (ما) صرف ما کا اور ف (لا، ما) ان دو تفاعلوں کا حاصل ضرب ہے دفعہ ۲۶ سے یہ لازم آتا ہے کہ حاصل ضرب فہ (لا) سا (ما) کا تکملہ جبکہ اسے مستطیل ا ب ج د (شکل ۲۴) پر لیا جائے ذیل کے تکملوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا

$$\int_{a}^{b} \text{فہ (لا) فرلا} \qquad \text{اور} \qquad \int_{c}^{d} \text{سا (ما) فرما}$$

اب فرض کرو کہ فہ (لا) = تو$^{-\text{لا}^2}$ اور سا (ما) = تو$^{-\text{ما}^2}$

$$\text{اور ع} = \int_0^{\infty} \text{تو}^{-\text{لا}^2} \text{فرلا} = \int_0^{\infty} \text{تو}^{-\text{ما}^2} \text{فرما} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ظاہر ہے کہ ان دو تکملوں کا حاصل ضرب ع^2 مساوی ہے ذیل کے تکملہ کے جبکہ اسے مربع ف ل م ن پر لیا جائے (شکل ۲۶) جس کا ضلع ف ل = ا

$$\iint \text{تو}^{-(\text{لا}^2+\text{ما}^2)} \text{فرلا فرما} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

شکل ۲۶

و کو مرکز مان کر دو دائروں کی قوسیں کھینچو، ایک دائرہ کا نصف قطر و ل = ا ہو اور دوسرے کا و م = ا $\sqrt{2}$، تکملہ (۲) بڑا ہے اس تفاعل کے تکملہ سے جبکہ اسے رقبہ و ل د ن پر لیا جائے اور چھوٹا ہے اس تفاعل کے تکملہ سے جبکہ اسے رقبہ و ع م ف پر لیا جائے یہ دو تکملے قطبی محددوں میں تبدیل کرنے سے باآسانی حاصل ہو سکتے ہیں، فرلا فرما کی بجائے رفرر فرطہ ہوگا اور قو$^{-(لا^2 + ما^2)}$ کی بجائے قو$^{-ر^2}$ اور (۲) ہو جائیگا رقبہ و ل د ن کے لئے

$$\int\int قو^{-ر^2} ر فرر فرطہ = \int_0^1 قو^{-ر^2} ر فرر \int_0^{\frac{\pi}{2}} فرطہ = \frac{\pi}{4}(1 - قو^{-1}) \text{ کیونکہ}$$

قو$^{-ر^2}$ ر کا تکملہ $-\frac{1}{2}$ قو$^{-ر^2}$ ہے

جب تکملہ کو رقبہ و ع م ف پر محسوب کیا جائے تو تکملہ کی قیمت $\frac{\pi}{4}(1 - قو^{-2ا^2})$ ہوگی۔ ع^2 ان دو قیمتوں کے درمیان واقع ہوتا ہے، لیکن جب ا مائل بہ لاانتہا ہو تو دونوں قیمتیں مائل بہ $\frac{\pi}{4}$ ہوتی ہیں اور اس صورت میں ع^2 مائل بہ $\frac{\pi}{4}$ اور ع مائل بہ $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ہوتا ہے۔ بس

$$\int_0^{\infty} قو^{-لا^2} فرلا = \lim_{ا \to \infty} \int_0^{ا} قو^{-لا^2} فرلا = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

یہ مثال ایک مشہور تکملہ کی خاص صورت ہے (دیکھو مشق ۹، مثال ۲۱) اور

اوپر کا استحالہ قابل توجہ ہے۔

۲۸ ۔ جمود کے مرکز۔ علم حیل کی کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ ایسے ن ذرات کا مرکز جمود ($\bar{\text{لا}}$ ، $\bar{\text{ما}}$ ، $\bar{\text{ی}}$) جن کی کمیتیں م_1 ، م_2 ، م_3 ...... $\text{م}_\text{ن}$ ہوں اور جو بالترتیب نقاط (لا_1 ، ما_1 ، ی_1) ، (لا_2 ، ما_2 ، ی_2) ، ...... ($\text{لا}_\text{ن}$ ، $\text{ما}_\text{ن}$ ، $\text{ی}_\text{ن}$) پر واقع ہوں ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\text{م}_1\text{لا}_1 + \text{م}_2\text{لا}_2 + \dots + \text{م}_\text{ن}\text{لا}_\text{ن}}{\text{م}_1 + \text{م}_2 + \text{م}_3 + \dots + \text{م}_\text{ن}} = \frac{\Sigma\ \text{م لا}}{\Sigma\ \text{م}} \quad \dots\dots (1)$$

اور اسی طرح کے جملے $\bar{\text{ما}}$ ، $\bar{\text{ی}}$ کے لئے حاصل ہوتے ہیں۔

اگر جسم میں مادہ کی تقسیم مسلسل ہو تو نقطہ (لا ، ما ، ی) پر حجمی کثافت ک ، $\frac{\text{مف م}}{\text{مف ح}}$ کی انتہا ہوگی جبکہ مف ح ← ۰ ۔ جہاں مف م نقطۂ مذکورہ کے گرد کے حجم مف ح کی کمیت مادہ ہے۔ اسلئے صغاریات کے رتبۂ اول تک

$$\text{مف م} = \text{ک مف ح}$$

جب یہ فرض کیا جا سکے کہ سب کمیت ایک سطح پر یا ایک خط پر مکثف ہے تو اسی طرح سے

مف م = کہ مف س ، مف م = لہ مف س جہاں کہ اور لہ نقطہ مفروضہ پر بالترتیب سطحی اور خطی کثافتیں ہیں اور مف س اور مف س نقطہ کے گرد رقبہ اور قوس کے اجزا ہیں۔

کسی مسلسل کمیت مادہ کو کمیت مف م کے ن اجزا میں تقسیم کیا ہوا فرض کیا جا سکتا ہے ، اگر جزو مف م میں کے کسی نقطہ کے محدد (لا ، ما ، ی) ہوں تو اس مقدار مادہ کے مرکز جمود کے محدد ہوں گے

$$\bar{\text{لا}} = \text{نہا}_{\text{ن}\to\infty} \frac{\Sigma\ \text{لا مف م}}{\Sigma\ \text{مف م}} = \frac{\int \text{لا مف م}}{\int \text{مف م}} \quad \dots\dots (2)$$

اور اسی طرح کے جملے $\bar{\text{ما}}$ ، $\bar{\text{ی}}$ کے لئے حاصل ہوں گے۔ جملہ (۲) میں جو تکملے ہیں

انہیں تمام مقدار مادہ میں لیا جائیگا۔

مادہ کی حجمی، سطحی اور خطی تقسیم میں مساواتیں (۲) یہ شکلیں اختیار کرینگی۔

$$\frac{\int لا ک فرح}{\int ک فرح}\ ،\ \frac{\int لا کہ فرس}{\int کہ فرس}\ ،\ \frac{\int لا لہ فرس}{\int لہ فرس} \quad ......(۳)$$

نسب نما ہر صورت میں تمام کمیت مادہ ہے۔

مرکز جمود کی بجائے بعض اوقات مصطلحات مرکز کمیت یا مرکز ہندسی استعمال ہوتی ہیں، کسی حجم، رقبہ یا خط کا مرکز ہندسی یکساں کثافت کی کسی کمیت مادہ کا مرکز جمود ہے جو اس حجم، رقبہ یا خط کے اندر شامل ہو۔

مثال ۱۔ یکساں کثافت کے دائرہ کی قوس ب ع ج (شکل ۸۰)

فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز و ہے، و ع = ا اور ج و ب = ۲ عہ

فرض کرو کہ و ع زاویہ ج و ب کی تنصیف کرتا ہے، و ع کو محور لا تصور کرو۔

ازروئے تشاکل ما = ۰

فرض کرو کہ ∠ لا و ن = طہ

و ل = لا = ا جم طہ

قوس ع ن = س = ا طہ

فرس = ا فرطہ

خطی کثافت لہ مستقل ہے

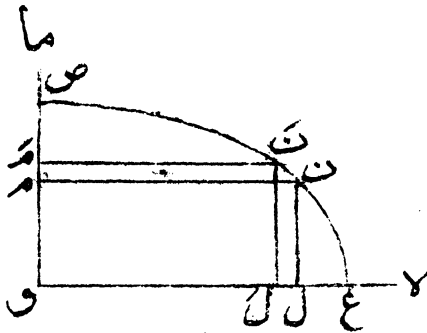
اس لئے کمیت ۲ لہ ا عہ ہے۔

شکل ۸۰

نیز $\int$ لا لہ فرس $=$ لہ $\int_{-عہ}^{عہ}$ ا جم طہ ا فرطہ $=$ ۲ لہ ا^۲ جب عہ

$$\therefore\ \bar{لا} = \frac{۲\ لہ\ ا^۲\ جب\ عہ}{۲\ لہ\ ا\ عہ} = \frac{ا\ جب\ عہ}{عہ}$$

مثال ۲ - یکساں کثافت کا مستوی تختہ جس کی شکل ناقص کے ربع و ع ن ص کی ہے (شکل ۲۸)

دوسرے تکمل کو استعمال کرنے کے بغیر ایسے سوال حل ہو سکتے ہیں۔

و ع کے متوازی ایک پتلا ٹکڑا م ن ن َ م َ لو جس کا عرض فرما ہو۔ اسکو کمیت کا ایک جزو مانو۔ اس ٹکڑے کا مرکز جمود اس نقطہ تنصیف پر ہے اور و ص کے گرد اس کا معیار اثر

شکل ۲۸

$\frac{1}{2}$ لا × کما لا فرما یعنی $\frac{1}{2}$ کما لا^2 فرما ہے۔

کل کمیت π کما $\frac{ا ب}{۴}$ ہے۔

اس لئے $\frac{\pi \text{ کما ا ب}}{۴}$ $\bar{\text{لا}}$ = $\frac{1}{2}$ کما $\int_0^{\text{ب}}$ لا^2 فرما = $\frac{1}{2}$ کما $\frac{ا^2}{\text{ب}^2}$ $\int_0^{\text{ب}}$ (ب^2 - ما^2) فرما

= $\frac{1}{3}$ کما ا^2 ب

اس لئے $\bar{\text{لا}}$ = $\frac{۴ ا}{۳ \pi}$

اسی طرح سے $\bar{\text{ما}}$ = $\frac{۴ \text{ب}}{۳ \pi}$ حاصل ہوگا اگر ٹکڑے ل َ ل ن ن َ کو کمیت کا ابتدائی جزو مانا جائے۔

اگر کثافت یکساں نہ ہو تو اوپر کا طریقہ بالعموم کارگر نہیں ہوتا۔

فرض کرو کہ کما = س لا ما (س مستقل)

کل کمیت $\text{ت} = \iint \text{س لا ما فرلا فرما} = \text{س} \int_{0}^{\text{ا}} \text{لا فرلا} \int_{0}^{\text{و م}} \text{ما فرما}$

$= \frac{1}{2}\text{س} \int_{0}^{\text{ا}} \text{لا} \times \text{و م}^2 \text{ فرلا}$

اور چونکہ $\text{و م}^2 = \text{ما}^2 = \text{ب}^2\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}\right)$ ہمیں باسانی حاصل ہوتا ہے

$\text{ت} = \frac{1}{8}\text{س ا}^2\text{ب}^2$

نیز $\text{ت}\,\overline{\text{لا}} = \iint \text{لا} \times \text{س لا ما فرلا فرما} = \text{س} \int_{0}^{\text{ا}} \text{لا}^2\text{ فرلا} \int_{0}^{\text{و م}} \text{ما فرما}$

$= \frac{1}{15}\text{س ا}^3\text{ب}^2$

اسلئے $\overline{\text{لا}} = \frac{8}{15}\text{ا}$، اسی طرح سے $\overline{\text{ما}} = \frac{8}{15}\text{ب}$

مثال ۳۔ یکساں کثافت کا قطاع دائرہ۔

مثال (۱) کی ترقیم اختیار کرو۔ چھوٹے قطاع و ن ق کو کمیت کا جزو مانو، و ن ق کا مرکز جمود نقطہ $(\frac{2}{3}\text{ا}، \text{طہ})$ پر ہے اور جزو کا معیار اثر و ما کے گرد ہے

$\frac{2}{3}\text{ا جم طہ} \times \text{کہ} \frac{1}{2}\text{ا}^2\text{ فرطہ} = \frac{1}{3}\text{کہ ا}^3\text{ جم طہ فرطہ}$

کل کمیت $\text{ت} = \text{کہ ا}^2\text{ عہ}$، ازروئے تماثل $\overline{\text{ما}} = 0$. پس

$\text{ت}\,\overline{\text{لا}} = \frac{1}{3}\text{کہ ا}^3 \int_{-\text{عہ}}^{\text{عہ}} \text{جم طہ فرطہ} = \frac{2}{3}\text{کہ ا}^3\text{ جب عہ}$

پس $\overline{\text{لا}} = \frac{2}{3}\text{ا}\,\frac{\text{جب عہ}}{\text{عہ}}$

اگر کثافت یکساں نہ ہو تو بالعموم دوہرے تکمل کی ضرورت ہوگی۔

و ن ق کے مرکز جمود کو و ن پر مانا گیا ہے یہ کئی بار جتایا گیا ہے کہ انتہا لینے میں ایک ہی بات ہے خواہ نقطہ $(\frac{2}{3}\text{ا}، \text{طہ})$ کو یا $(\frac{2}{3}\text{ا}، \text{طہ}')$ کو

مرکز جمود مانا جائے۔ جہاں طہَ ، طہ اور طہ + مف طہ کے درمیان کوئی قیمت ہے۔ اس قسم کے اختصار سے اکثر کام لیا جاتا ہے۔ اسی طرح سے مثال (۲) میں اختصاراً یہ مان لیا گیا تھا کہ ٹکڑے م ن ن م کا مرکز جمود م ن کے نقطۂ تنصیف پر ہے۔

مثال ۴۔ یکساں قائم مستدیر مخروط۔

ازروئے تشاکل مرکز جمود محور پر واقع ہے۔ راس سے فاصلہ لا پر ایک تراش لو جو محور پر عمود وار ہو۔ اگر مخروط کا ارتفاع ف اور قاعدہ کا رقبہ ق ہو تو اس تراش کا رقبہ $\frac{\text{لا}^2\,\text{ق}}{\text{ف}^2}$ ہوگا۔ اس تراش اور راس سے فاصلہ لا + مف لا پر جو متوازی تراش ہے اُن کے درمیان کی قاش کو کمیت کا جزو قرار دو۔ کل کمیت

$$\text{ت} = \tfrac{1}{3}\,\text{ک ف ق}$$

اور $\text{ت}\,\overline{\text{لا}} = \int_{0}^{\text{ف}} \text{لا} \times \text{ک}\,\frac{\text{لا}^2}{\text{ف}^2}\,\text{ق ذلا} = \tfrac{1}{4}\,\text{ک ف}^2\,\text{ق}$

اور $\overline{\text{لا}} = \tfrac{3}{4}\,\text{ف}$

اگر کثافت یکساں نہ ہو تو دوہرے یا تہرے تکملے استعمال کرنے کی ضرورت ہوگی کیونکہ کمیت کا جزو حسب بالا منتخب نہیں کیا جا سکتا، لیکن اگر کثافت صرف لا کا تفاعل ہو تو یہی طریقہ صادق آئیگا مثلاً اگر ک = د لا (د مستقل) تو طالب علم ثابت کر سکتا ہے کہ

$$\text{ت} = \frac{\text{ق}}{\text{ف}^2}\int_{0}^{\text{ف}} \text{ک لا}^2\,\text{ذلا} = \tfrac{1}{4}\,\text{د ق ف}^2 \text{ ، یعنی } \overline{\text{لا}} = \tfrac{2}{5}\,\text{ف}$$

۲۹۔ جمود کا معیار اثر۔ فرض کرو کہ ن ذرات ہیں جنکی کمیتیں بالترتیب م_1، م_2، ...... $\text{م}_{\text{ن}}$ ہیں اور ایک ثابت محور و ط سے ان کے فاصلے بالترتیب ل_1، ل_2، ..... $\text{ل}_{\text{ن}}$ ہیں، علم حیل کی کتابوں میں مجموعہ

$$م_1 ر_1^2 + م_2 ر_2^2 + م_3 ر_3^2 + \ldots\ldots + م_n ر_n^2$$

یا اختصاراً $\sum م ر^2$ کو اس نظام ذرات کے جمود کا معیار اثر یا صرف معیار کہتے ہیں محور و ط کے گرد۔

جب یہ کمیتیں ایک مسلسل جسم کی شکل میں ہوں تو حاصل جمع کی بجائے عمل تکمیل کرنا ہوگا جیسا کہ جمود کے مرکزوں کی صورت میں دیکھا گیا۔

اگر نظام کی کل کمیت م ہو اور ک ایک مقدار اس طرح منتخب کی جائے کہ

$$م ک^2 = \sum م ر^2 \quad یا \quad م ک^2 = \int ر^2 د م$$

تو مقدار ک کو نظام کا گردش کا نصف قطر کہتے ہیں محور کے گرد۔ جمود کے معیار اثر کو ہم بالعموم صرف ج سے تعبیر کرینگے۔

جمود کے معیار اثر معلوم کرنیکا عمل مسائل ذیل کی مدد سے آسان ہو جاتا ہے

(۱) و لا، و ما، و ی تین قائم محور ہیں، ایک مستوی پتر اسطح لا و ما میں واقع ہے اور اس کے جمود کے معیار اثر و لا، و ما، و ی کے گرد بالترتیب $ج_{لا}$، $ج_{ما}$، $ج_{ی}$ ہیں۔ تب

$$ج_{ی} = ج_{لا} + ج_{ما}$$

(۲) کسی محور و ر کے گرد جمود کا معیار اثر ج ہے، جسم کے مرکز جمود ث میں سے گذرنے والے متوازی محور کے گرد معیار اثر $ج_{ث}$ ہے اور ان محوروں کا باہمی فاصلہ ا ہے۔ تب

$$ج_{ر} = ج_{ث} + م ا^2$$

جہاں م نظام کی کل کمیت ہے۔

ان مسائل کے ثبوت نہایت آسان ہیں، یہ طالب علم کے لئے چھوڑ دئے گئے ہیں۔

علم جبل کی کسی کتاب میں مل سکینگے۔

مثال ۱۔ یکساں کثافت کی ایک پتلی سیدھی سلاخ کے جمود کا معیار اثر ایک ایسے محور کے گرد جو سلاخ کے ایک سرے میں سے گذرتا ہے اور اس پر عمود دار ہے۔

فرض کرو کہ سلاخ پر کے کسی نقطہ کا فاصلہ محور سے لا ہے، لہ خطی کثافت ہے اور ل سلاخ کا طول ہے۔ کمیت کا جزو لہ مف لا فرض کرو۔ پس

$$\text{جمود کا معیار اثر} = \int_0^{ل} لا^2 \times لہ\ مف\ لا = \frac{1}{3} لہ\ ل^3 = \frac{1}{3} م\ ل^2$$

جہاں م = لہ ل سلاخ کی کمیت ہے، پس گردش کا نصف قطر ک = $\frac{ل}{\sqrt{3}}$

اگر گردش کا محور سلاخ کے نقطہ تنصیف میں سے گذرے اور سلاخ پر عمود دار ہو تو اسکے گرد معیار $\frac{م ل^2}{12}$ ہوگا۔ یہ بلا واسطہ ثابت کیا جاسکتا ہے یا مسئلہ (۲) کو استعمال کرنے سے۔

مثال ۲۔ یکساں مستطیل پترے کے جمود کا معیار ایک ایسے محور کے گرد جو اس کے مرکز میں سے گذرتا ہے اور اس کے ایک ضلع کے متوازی ہے۔

فرض کرو کہ اضلاع کے طول ا، ب ہیں اور محور ضلع ا کے متوازی ہے۔ پترے کو ایسے باریک ٹکڑوں میں تقسیم کرو جو ضلع ب کے متوازی ہوں، فرض کرو کہ ایک ٹکڑے کی کمیت مف م ہے اور کل پترے کی م۔

مثال (۱) کی رو سے مف م کا معیار محور کے گرد مف م × $\frac{ب^2}{12}$ ہے اسلئے کل مستطیل کے جمود کا معیار اثر $\frac{1}{12}$ م ب^2 ہوا۔

اگر گردش کا محور مرکز میں سے گذرے اور ضلع ب کے متوازی ہو تو اس کے گرد جمود کا معیار $\frac{م ا^2}{12}$ ہوگا، اس لئے مسئلہ (۱) کی رو سے جمود کا معیار ایک ایسے محور کے گرد جو مرکز میں سے گذرے اور پترے کی سطح پر عمود دار ہو $\frac{م(ا^2 + ب^2)}{12}$ ہوگا۔

اُوپر کے نتائج کو استعمال کرنے سے ہم ایک یکساں مستطیلی متوازی السطوح کا معیار ایک ایسے محور کے گرد باسانی معلوم کر سکتے ہیں جو مرکز میں سے گذرے اور ایک کنارے کے متوازی ہو۔ فرض کرو کہ متوازی السطوح کے کنارے ا، ب، ج ہیں اور گردش کا محور کنارہ ج کے متوازی ہے۔ مجسم کو کمیت مف م کی پتلی قاشوں میں تقسیم کرو جو کنارہ ج پر عمود وار ہوں۔ ایک قاش کے جمود کا معیار اثر مندرجہ بالا نتیجہ کی رُو سے مف م $\frac{ا^2 + ب^2}{12}$ ہے، اس لئے مجسم کا معیار $\frac{م (ا^2 + ب^2)}{12}$ ہے جہاں م مجسم کی کمیت ہے۔

مثال ۳۔ یکساں ناقصی پترے کے جمود کا معیار محور اعظم کے گرد۔

ایسے خطوط کے ذریعہ جو محور اصغر کے متوازی ہوں پترے کو کمیت مف م کے پتلے ٹکڑوں میں تقسیم کرو۔

مثال (۱) کی رو سے اس ٹکڑے کا معیار مف م × $\frac{(2 ما)^2}{12}$ یعنی مف م × $\frac{ما^2}{3}$ ہے جہاں ما ٹکڑے کا سعین ہے۔

اگر پترے کی کثافت ک ہو تو مف م = ۲ک ما مف لا، اسلئے

$$ج = \int \frac{1}{3} ما^2 مف م = \frac{2ک}{3} \int_{-ا}^{ا} ما^3 مف لا = \frac{4ک}{3} \times \frac{ب^3}{ا^3} \int_{0}^{ا} (ا^2 - لا^2)^{\frac{3}{2}} و لا$$

لیکن $\int_{0}^{ا} (ا^2 - لا^2)^{\frac{3}{2}} و لا = ا^4 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جم^4 طہ \, و طہ = \frac{3\pi}{16} ا^4$ [لا کی بجائے ا جب طہ رکھنے سے]

کل کمیت م = π ک ا ب

اسلئے $ج = \frac{1}{4} \pi ک ا ب^3 = \frac{1}{4} م ب^2$

محور اصغر کے گرد معیار $\frac{م ا^2}{4}$ ہے اور مرکز میں سے گذرنے والے محور کے گرد جو پترے کی سطح پر عمود وار ہو معیار م $\frac{ا^2 + ب^2}{4}$ ہے۔

دائرہ کی صورت میں معیار ایک قطر کے گرد $\frac{\text{م}\,\text{ا}^2}{4}$ ہوگا [ب کو ا کے مساوی رکھنے سے] اور مرکز میں سے گزرنے والے محور کے گرد جو پتر کی سطح پر عمود وار ہو معیار $\frac{\text{م}\,\text{ا}^2}{2}$ ہوگا۔

مؤخرالذکر قیمت دائرہ کو باریک ہم مرکز ٹکڑوں میں تقسیم کرنے سے بآسانی حاصل ہوسکتی ہے۔ پھر چونکہ تشاکل کی رو سے تمام قطروں کے گرد جمود کے معیار اثر مساوی ہوں گے اسلئے مسئلہ (۱) سے ظاہر ہے کہ کسی قطر کے گرد کا معیار اُس محور کے گرد کے معیار کا آدھا ہوگا جو مرکز میں سے گزرتا ہے اور سطح پر عمود وار ہے۔

مثال ۴۔ یکساں ناقص نما کے جمود کا معیار اثر و ع کے گرد۔ مُستوی تراشوں سے جو و ع پر عمود وار ہوں ناقص نما کو پتلی قاشوں میں تقسیم کرو۔

ایسی ایک تراش کی کمیت $\text{مفا م} = \pi\,\text{ک ب ج}\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}\right)\text{مفلا}$

اور گذشتہ مثال کی رو سے مفا م کا معیار و ع کے گرد $\frac{1}{4}\,\text{مفا م}\,(\text{ا}_1^2 + \text{ب}_1^2)$ جہاں $2\,\text{ا}_1$، $2\,\text{ب}_1$ اس تراش کے محور ہیں۔

لیکن $\text{ا}_1^2 = \text{ب}^2\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}\right)$، $\text{ب}_1^2 = \text{ج}^2\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}\right)$

قیمتیں مندرج کرنے اور -ا سے ا تک تکمل کرنے سے جمود کا معیار اثر

$$= \frac{1}{4}\pi\,\text{ک ب ج}\,(\text{ب}^2 + \text{ج}^2)\int_{-\text{ا}}^{\text{ا}}\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}\right)^2 \text{فلا}$$

$$= \text{م}\,\frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2}{5} \quad \text{جہاں} \quad \text{م} = \frac{4\pi\,\text{ک ا ب ج}}{3}$$

= ناقص نما کی کمیت

دوسرے محوروں کے گرد کے معیار از روئے تشاکل حاصل ہوسکتے ہیں۔

۳۰۔ حجم کا قطعی جزو۔ طبیعی مثالوں میں کسی نقطہ ت کے گرد کی قطعی محدودوں

ر، طہ، فہ (دفعہ ۸۹، حصۂ اول) کی رقوم میں حجم کا جزو مف ح مطلوب ہوتا ہے۔

نقطہ ن اور محور و سے ی میں سے جو سطح مستوی گذرتی ہے اُسے عہ سے تعبیر کرو۔ سب سے پہلے ر اور فہ کو مستقل رکھو اور فرض کرو کہ طہ ہو جاتا ہے طہ + مف طہ اس طرح ت ایک دائرہ کی قوس ت ف سطح عہ میں مرتسم کرتا ہے اور ت ف = ر مف طہ، اسکے بعد فرض کرو کہ محدد ر، طہ مستقل رہتے ہیں اور سطح عہ، و ی کے گرد بطور محور کے چھوٹے زاویہ مف فہ میں سے گھومتی ہے۔ ت ایک قوس ت ر = رجب طہ مف فہ مرتسم کریگا اور اگر مف طہ مستقل رہے تو قوس ت ف کے گھومنے سے ایک رقبہ مف س پیدا ہوگا جو تقریباً قوس ت ف × قوس ت ر یعنی ر۲ جب طہ مف طہ مف فہ کے مساوی ہوگا آخر الامر طہ، فہ، مف طہ، مف فہ کو مستقل رکھو اور فرض کرو کہ ر بدلکر ر + مف ر ہو جاتا ہے۔ رقبہ مف س حجم کا ایک جزو مف ح پیدا کرے گا جو تقریباً مف س × مف ر یعنی ر۲ جب طہ مف ر مف طہ مف فہ کے مساوی ہوگا۔

مف ح کی انتہا حجم کا قطبی جزو ہے، پس

فر ح = ا ر۲ جب طہ فر ر فر طہ فر فہ

ایک کرہ کا نصف قطر ر ہے، اسکی سطح کا جزو

فر س = ر۲ جب طہ فر طہ فر فہ

فرض کرو کہ ر = ف (طہ) ایک منحنی کی قطبی مساوات ہے جو سطح مستوی ی و لا میں واقع ہے اور و ی خط ابتدائی ہے، فر ح کو فہ = ۰ سے فہ = ۲ π تک اور پھر ر = ۰ سے ر = ف (طہ) تک تکمیل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ تدویری یا گردشی سطح کے حجم کا قطبی جزو $\frac{۲}{۳}$ π ر۳ جب طہ فر طہ ہے جہاں اس میں ر سے مراد ف (طہ) ہے۔

فرض کرو کہ سطح پر کوئی نقطہ ن (لا، ما، ی) ہے اور ایک مستطیلی متوازی السطوح جو قاعدہ مف لا مف ما پر کھڑا کیا جائے وہ سطح سے رقبہ کا جزو مف سہ کاٹتا ہے اور ن پر کی مماسی سطح سے مف سہ۔ اگر ن پر کی مماسی سطح پر کا عماد و سے کے ساتھ زاویہ گہ بنائے تو

مف سہ جم گہ = مف لا مف ما

مف سہ = مف لا مف ما قط گہ

اگر $\frac{\text{مف سہ}}{\text{مف سہ}}$ کی انتہا ہم ایک مان لیں تو

ف سہ = ف لا ف ما قط گہ

عماد کی سمتی جیوب التمام معلوم ہو سکتی ہیں جبکہ سطح کی مساوات معلوم ہو (دفعہ ۹۱ حصۂ اول)

اس طرح سے ف سہ متغیرات لا، ما $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$، $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔

تعریفات ۔ مصطلحات خطی تکملہ اور سطحی تکملہ کثیر الاستعمال ہیں، انکی تعریف کر دینا مناسب ہوگا اگرچہ انکی خاصیتوں اور تعلقات کی بحث کے لئے اس جگہ گنجائش نہیں۔

فرض کرو کہ ص ایک ایسی مقدار ہے جو سمت اور مقدار دونوں رکھتی ہے جیسے رفتار یا قوت۔ اور ایک منحنی ا ن ف کے کسی نقطہ ن پر ص کی سمت اور ن پر کے مماس کی سمت میں زاویہ صہ بنتا ہے۔ اگر س اس قوس کا طول ہو جو منحنی پر کے ایک ثابت نقطہ اور ن کے درمیان ہے تو تکملہ

$$\int \text{ص جم صہ ف س} \quad \ldots\ldots \quad (۱)$$

کو ہم ص کا خطی تکملہ منحنی ا ب کے ساتھ ساتھ کہینگے جبکہ تکملہ کو س کی اس قیمت سے جو ا پر ہے ب تک کی قیمت تک لیا جائے۔

مثلاً دفعہ ۹۵ حصۂ اول میں کام کُل قوت ق کا خطی تکملہ ہے منحنی ا ن کے ساتھ ساتھ۔ اگر سمتی ص کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی لا، ما سے ہوں تو تکملہ (۱) کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں [دفعہ ۹۵ (۳)، حصۂ اول]

$$\int (\text{لا} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} + \text{ما} \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} + \text{ے} \frac{\text{فری}}{\text{فرس}}) \text{فرس} \quad \ldots\ldots (۲)$$

نیز فرض کرو کہ مف س سطح کا ایک جزو ہے، ن جزو مف س پر ایک نقطہ ہے اور سطح کے نقطہ ن پر کے عماد اور ص کی سمت کے درمیان زاویہ صہ بنتا ہے، تب

$$\text{تکملہ} \quad \int \text{ص جم صہ فرس} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

کو جب سطح کے کسی حصہ پر لیا جائے تو ہم اس کو ص کا سطحی تکملہ اس حصہ پر کہینگے۔ مثلاً اگر ن پر برقی حدت ص ہو تو حدت کا عمادی جزو ترکیبی ع = ص جم صہ اور تکملہ (۳) سے عمادی برقی حدت کا سطحی تکملہ مراد ہوگا سطح کے مذکورہ حصہ پر۔

مشق ۹

۱۔ $\text{ما}^۲$ کی اوسط قیمت سعت ۰ تا ۲ط میں معلوم کرو جبکہ

(۱) ما = $\text{ا}_۱$ جب لا + $\text{ا}_۲$ جب ۲ لا + ... + $\text{ا}_\text{ن}$ جب ن لا

(۲) ما = $\text{ب}_۱$ جم لا + $\text{ب}_۲$ جم ۲ لا + ... + $\text{ب}_\text{ن}$ جم ن لا

۲۔ اگر ما = $\text{ا}_۱$ جب لا + $\text{ب}_۱$ جم لا + $\text{ا}_۲$ جب ۲ لا + $\text{ب}_۲$ جم ۲ لا

اور ی = $\text{ا}_۱$ جب لا + $\text{ب}_۱$ جم لا + $\text{ا}_۲$ جب ۲ لا + $\text{ب}_۲$ جم ۲ لا

تو حاصل ضرب ما ی کی اوسط قیمت سعت ۰ تا ۲ ط کے اندر معلوم کرو۔

۳۔ ایک ذرہ حالت سکون سے آزادانہ گرتا ہے، ثابت کرو کہ اسکی اوسط رفتار بلحاظ وقت کے آخری رفتار کی نصف ہے اور اسکی اوسط رفتار بلحاظ فاصلہ کے آخری رفتار کی دو تہائی ہے۔

۴۔ کمیت م کا ایک ذرہ اپنی حرکت سے سادہ موسیقی حرکت پیدا کرتا ہے جسکا

حیطہ ل ہے اور مدت دوران ت - ثابت کرو کہ اسکی اوسط توانائی بالحرکت اس کی توانائی بالحرکت کی قیمت اعظم کی نصف ہے -

۵ - اگر ایک مستوی رقبہ کو متجانس مائع کے اندر ڈبویا جائے تو ثابت کرو کہ جاذبہ ارض کے زیر عمل رقبہ کے دباؤ کی اوسط حدت وہی ہوگی جو رقبہ کے ہندسی مرکز پر دباؤ کی حدت ہے۔

۶ - زمین کے مرکز سے فاصلہ د پر کثافت ک = ک جب ل د / ل د جہاں ل مستقل ہے، ثابت کرو کہ اوسط کثافت

۳ ک (جب ل س - ل س جم ل س) / ل^۳ س^۳

ہے جہاں س زمین کا نصف قطر ہے - [لیمب کا احصا]

حجم کا جزو مف ح لو جہاں مف ح نصف قطر د اور د + مف د والی دو کروی سطحوں کے درمیان کے خول کا حجم ہے - مف ح = ۴ π د^۲ مف د اور مف م = ک مف ح - کل کمیت ∫ ک مف ح کو د = ۰ سے د = س تک تکمیل کرنے سے حاصل ہوگی -

۷ - ذیل کی صورتوں میں جو رقبے یا حجم ہیں ان کے ہندسی مرکز معلوم کرو -

(۱) رقبہ جو مکافی کی قوس، محور اور (ھ، ک) میں سے گذرنے والے معین کے درمیان گھرا ہوا ہے -

(۲) قطعہ مکافی جو راس اور نقطہ (ھ، ک) کے ملانے والا خط مستقیم منحنی سے قطع کرتا ہے

(۳) قطعہ ب ع ج (شکل ۲۷)

(۴) کروی قطاع جو قطاع دائرہ و ع ب (شکل ۲۷) کو و ع کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے -

(۵) خط صنوبری ر = ا (۱ + جم طہ)

۸ - ایک نصف کرہ کے کسی نقطہ پر کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے احاطہ کرنے والی مستوی سطح سے اس نقطہ کا فاصلہ - ثابت کرو کہ اس سطح سے مرکز جمود کا فاصلہ ۸س/۱۵ ہے جہاں س نصف قطر ہے -

۹ - پیپس کے مسئلے ثابت کرو یعنی

(۱) اگر ایک مستوی منحنی کی قوس ایک محور کے گرد گردش کرے جو اس کی سطح میں واقع ہو لیکن اسے قطع نہ کرے تو اسکے گھومنے سے جو سطح پیدا ہوگی اُس کا رقبہ = قوس کا طول × اسکے مرکز ہندسی کے طریق کا طول۔

(۲) ایک مستوی رقبہ ایک ایسے محور کے گرد گھومتا ہے جو اسکی سطح میں واقع ہے لیکن اسے قطع نہیں کرتا۔ ثابت کرو کہ رقبہ کے گھومنے سے جو حجم پیدا ہوتا ہے وہ = پیمائش رقبہ × رقبہ کے ہندسی مرکز کے طریق کا طول۔

محور گردش کو محور لا مانو۔ مذکورہ بالا مسائل ۲ π کے ساتھ ضرب دینے سے ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہونگے

$$\bar{ما} \int فر س = \int ما\, فر س ،\quad \bar{ما} \int فر س = \int ما\, فر س = \frac{1}{2} \int (ما_1^2 - ما_2^2)\, فر لا$$

آخری تکملہ میں ما۱، ما۲ اُن نقطوں کے معیّن ہیں جہاں ایک خط مستقیم جو محور لا پر عمود ہے منحنی کو قطع کرتا ہے۔

(۲) سے گردشی سطح (دفعہ ۲۰) کی صورت میں حجم کے قطبی جزو کے لئے ضابطہ حاصل کرو۔

۱۰- ذیل کی صورتوں میں جمود کے معیار معلوم کرو۔ کثافت یکساں ہے۔

(۱) کمیت م کے ایک گول پترے کا معیار اِس کے راس کے گرد پترے کا نصف قطر ا ہے۔

(۲) کمیت م کے ایک کرہ کا معیار مماسی خط کے گرد، کرہ کا نصف قطر ا ہے۔

(۳) کمیت م کے ایک مثلثی پترے کا معیار قاعدہ کے گرد۔ پترے کا ارتفاع ف ہے۔

(۴) ایک قائم مخروط کی کمیت م ہے، ارتفاع ف اور قاعدہ کا نصف قطر ا۔ اسکا معیار معلوم کرو (۱) اسکے محور کے گرد (۲) راس میں سے گذرنیوالے ایک ایسے محور کے گرد جو قاعدہ کے متوازی ہے۔

۱۱- ایک مستطیل اب ج د ایک ایسے محور کے گرد گردش کرتا ہے جو اسکی سطح میں اب کے متوازی ہے لیکن مستطیل کو قطع نہیں کرتا، اگر

(ب، ج، د کے فاصلے محور سے ا، ب ہوں تو ثابت کرو کہ مجسم کی گردش کا نصف قطر ک^2 = $\frac{1}{2}$ (ا^2 + ب^2)

۱۲- لنگر چھلے (مشق ۷، مثال ۵) کے جمود کا معیار اثر محور کے گرد م (ج^2 + $\frac{3}{4}$ ا^2) ہے اگر جسم کی کثافت یکساں فرض کی جائے۔

۱۳- اگر ر^2 = لا^2 + صا^2 + ی^2 تو ثابت کرو کہ ر^2 کی اوسط قیمت ناقص نما

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{صا^2}{ب^2} + \frac{ی^2}{ج^2} = ۱$$ کے حجم بھر میں $\frac{ا^2 + ب^2 + ج^2}{۵}$ ہے۔

۱۴- اُس خانہ کا حجم جو اسطوانہ لا^2 + صا^2 = ۲ ا لا اور مستوی سطحوں ی = لا مس عا اور ی = لا مس یا کے درمیان گھرا ہوا ہے ۲π (مس با - مس عا) ہے۔

۱۵- اگر ن > ۰ تو تکملہ $\int_0^\infty$ قو$^{-لا}$ لا$^{ن-۱}$ فرلا کی ایک معین قیمت ہے یہ تکملہ ن کا تفاعل ہے جسے بالعموم گاما تفاعل کہتے ہیں، اسے ہم علامت جا (ن) سے تعبیر کرتے ہیں۔

تکمل بالحصص سے ثابت کرو کہ

جا (ن) = (ن - ۱) جا (ن - ۱) .... (۱)

اور جس صورت میں ن صحیح عدد ہو تو جا (ن) = $\underline{ن - ۱}$، جا (۱) = ۱

اگر ن صحیح عدد نہ ہو تو فرض کرو کہ ن سے عین چھوٹا صحیح عدد د ہے، یعنی (ن - د) کسر واجب ہے۔ تب (۱) سے ظاہر ہے کہ

جا (ن) = (ن - ۱) (ن - ۲) .... (ن - د) جا (ن - د) .... (۲)

۱۶- ثابت کرو کہ

(۱) جا ($\frac{1}{2}$) = $\sqrt{\pi}$

(۲) جا (م + $\frac{1}{2}$) = $\frac{۲م - ۱}{۲}$ × $\frac{۲م - ۳}{۲}$ × .... $\frac{1}{2}$ $\sqrt{\pi}$) [م صحیح عدد]

دفعہ ۲۷ مثال ۳ میں لا = $\sqrt{\text{ی}}$ رکھنے سے مساوات (۱) حاصل ہوتی ہے

$$\frac{\sqrt{\pi}}{۲} = \int_{0}^{\infty} \text{و}^{-\text{لا}^{2}}\, \text{فرلا} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \text{و}^{-\text{ی}}\, \text{ی}^{-\frac{1}{2}}\, \text{فری} = \frac{1}{2}\,\text{جا}\left(\frac{1}{2}\right)$$

پھر مساوات (۲) حاصل ہوتی ہے مثال ۱۵ (۲) مندرجہ بالا سے۔

۱۷- ثابت کرو کہ $\int_{0}^{\infty} \text{و}^{-\text{رلا}}\, \text{لا}^{\text{ن}-1}\, \text{فرلا} = \frac{\text{جا}(\text{ن})}{\text{ر}^{\text{ن}}}$ [ر مثبت]

۱۸- مندرجہ ذیل ابدال استعمال کرنے سے جا(ن) کے لئے اور ضابطے ثابت کرو

$$\text{لا} = \text{ر}^{2}،\quad \text{جا}(\text{ن}) = ۲\int_{0}^{\infty} \text{و}^{-\text{ر}^{2}}\, \text{ر}^{2\text{ن}-1}\, \text{فرر} \;\ldots\ldots\; (۱)$$

$$\text{و}^{-\text{لا}} = \text{ی}،\quad \text{جا}(\text{ن}) = \int_{0}^{1} \left(\text{لوک}\,\frac{1}{\text{ی}}\right)^{\text{ن}-1} \text{فری} \;\ldots\ldots\; (۲)$$

۱۹- جب م اور ن دونوں مثبت ہوں تو تکملہ

$$\int_{0}^{1} \text{لا}^{\text{م}-1}\,(1-\text{لا})^{\text{ن}-1}\, \text{فرلا}$$

کی ایک معین قیمت ہے، یہ قیمت م اور ن کا تفاعل ہوگی، اسے بیٹا تفاعل کہتے ہیں، ہم اسے با(م، ن) سے تعبیر کریں گے

ثابت کرو کہ با(م، ن) = با(ن، م)

۲۰- مندرجہ ذیل ابدال استعمال کرنے سے، با(م، ن) کے لئے اور ضابطے حاصل کرو

$$\text{لا} = \text{جم}^{2}\,\text{طہ}،\quad \text{با}(\text{م}،\text{ن}) = ۲\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{2\text{م}-1}\,\text{طہ}\; \text{جب}^{2\text{ن}-1}\,\text{طہ}\; \text{فرطہ} \;\ldots\; (۱)$$

$$\text{لا} = \frac{1}{1+\text{ما}}،\quad \text{با}(\text{م}،\text{ن}) = \int_{0}^{\infty} \frac{\text{ما}^{\text{ن}-1}\, \text{فرما}}{(1+\text{ما})^{\text{م}+\text{ن}}} \;\ldots\ldots\; (۲)$$

۲۱- مثال ۱۸ کی شکل (۱) کو استعمال کرنے سے لکھو

$$\text{جا}(\text{م}) = ۲\int_{۰}^{\infty} \text{ق}^{-\text{لا}^۲}\ \text{لا}^{۲\text{م}-۱}\ \text{ف لا}\text{، جا}(\text{ن}) = ۲\int_{۰}^{\infty} \text{ق}^{-\text{ما}^۲}\ \text{ما}^{۲\text{ن}-۱}\ \text{ف ما}$$

اور پھر دفعہ ۲۷، مثال ۳ کی مانند دکھاؤ کہ

$$\text{جا}(\text{م}) \times \text{جا}(\text{ن}) = ۴\int_{۰}^{\infty} \text{ق}^{-\text{ر}^۲}\ \text{ر}^{۲(\text{م}+\text{ن})-۱}\ \text{ف ر} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{۲\text{م}-۱}\text{طہ جب}^{۲\text{ن}-۱}\text{طہ ف طہ}$$

اس لئے اشلہ ۱۸ (۱) اور ۲۰ (۱) کی مدد سے

$$\text{جا}(\text{م})\ \text{جا}(\text{ن}) = \text{جا}(\text{م}+\text{ن})\ \text{با}(\text{م}، \text{ن})$$

اس طرح بیٹا تفاعل گاما تفاعل کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔

۲۲- فرض کرو کہ ۲ م - ۱ = ف، ۲ ن - ۱ = ق، تب اشلہ ۲۰ (۱) اور ۲۱ سے

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{\text{ف}}\text{طہ جب}^{\text{ق}}\text{طہ ف طہ} = \frac{\text{با}(\text{م}، \text{ن})}{۲} = \frac{\text{جا}\left(\frac{\text{ف}+۱}{۲}\right)\text{جا}\left(\frac{\text{ق}+۱}{۲}\right)}{۲\ \text{جا}\left(\frac{\text{ف}+\text{ق}+۲}{۲}\right)}$$

جہاں چونکہ م > ۰، ن > ۰، اسلئے $\frac{۱}{۲}(\text{ف}+۱) > ۰$ اور $\frac{۱}{۲}(\text{ق}+۱) > ۰$
یعنی ف اور ق میں سے ہر ایک -۱ سے بڑا ہے۔

طالب علم اس کی جانچ کرے کہ اس نتیجہ میں دفعہ ۱۰ کا قاعدہ شامل ہے۔

چونکہ جا(ن) کی جدولیں ۱ ≦ ن ≦ ۲ کے لئے مرتب کی گئی ہیں

(مثال ۱۵ (۲) کی رو سے ن کے لئے اس سے بڑی وسعت کی ضرورت نہیں)
کئی تکملے گاما تفاعلوں کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں۔

۲۳- ایک کرہ کا نصف قطر ل ہے، اس کی سطح پر کمیت م یکساں طور پر پھیلا دی گئی ہے (کثافت کہ)، اس کمیت کا قوہ و کسی نقطہ ع پر معلوم کرو۔

کرہ کے مرکز و کو مبدا مانو اور و ع کو محور ے، فرض کرو کہ نقطہ ت پر کرہ کی سطح کا جزو ف س ہے۔ فرض کرو کہ ت ع = ر اور و ع = ج

$$\text{و} = \int \frac{\text{کہ ف س}}{\text{ت ع}}\text{، ف س} = \text{ل}^۲\ \text{جب طہ ف طہ ف ھ}\text{، ر}^۲ = \text{ل}^۲ + \text{ج}^۲ - ۲\text{ل ج جم طہ}$$

فا کے لئے حدود ۰ تا ۲ π ہیں اور طا کے ۰ تا π ۔ بلحاظ فا کے تکمل کرنے میں دوسرا متغیر طا اور اس لئے اس صورت میں ف ع یعنی ر (جو طا کا تفاعل ہے اور فا کا نہیں ہے) مستقل رکھا جائیگا۔ اس لئے

$$ق = ک د^۲ \int_۰^π \frac{جب طا فر طا}{ر} \int_۰^{۲π} فر فا = ۲ π ک د^۲ \int_۰^π \frac{جب طا فر طا}{ر}$$

اب متغیر کو طا سے ر میں بدلو، اس طرح حاصل ہوگا ر فر ر = د ج جب طا فر طا جب طا = ۰ تو ر = ± (د − ج)، ر ایک مثبت عدد ہے، پس اگر ع کرہ کے باہر ہو تو ر = ج − د اور اگر ع کرہ کے اندر ہو تو ر = د − ج اگر طا = π تو ر = د + ج دونوں صورتوں میں۔

اسلئے $ق = ۲ π ک د^۲ \left[\frac{ر}{د ج} \right] = \frac{۴ π ک د^۲}{ج}$ (ع کرہ کے باہر) ......(۱)

$= ۴ π ک د$ (ع کرہ کے اندر) ......(۲)

پس $ق = \frac{م}{ج}$ جبکہ ع کرہ کے باہر ہو لیکن $ق = \frac{م}{د}$ مستقل جبکہ ع کرہ کے اندر ہو۔

۲۴ – وہی سوال جو مثال ۲۳ میں ہے مجسم کرہ کے لئے [کثافت ک مستقل]

نصف قطر د اور د + فر د کی کروی سطحوں کے درمیان جو خول ہے اسکو کمیت کا جزو قرار دو۔ مثال ۲۳ کے ک کی بجائے ک فر د اور د کی بجائے د رکھکر اسکے نتائج کو استعمال کرو۔

اگر ع باہر واقع ہو تو نتیجہ (۱) سے حاصل ہوگا

$$ق = \int_۰^د \frac{۴ π ک د^۲ فر د}{ج} = \frac{۴ π ک}{۳} \cdot \frac{د^۳}{ج} \quad ......(۳)$$

اگر ع کرہ کے اندر ہو تو ق دو حصوں پر مشتمل ہوگا $ق_۱$ اور $ق_۲$۔

قوہ $و_۱$ نصف قطر ج کے کرہ کی وجہ سے پیدا ہوگا اور اوپر کے نتیجہ کی مدد سے

$$و_۱ = \frac{۴\pi ک}{۳} \times \frac{ج^۳}{ج} = \frac{۴\pi ک}{۳} ج^۲$$

قوہ $و_۲$ اس خول کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے جس کے نصف قطر ج اور ا ہیں۔
مثال ۲۳ کے نتیجہ (۲) کی رو سے

$$و_۲ = \int_{ج}^{ا} ۴\pi ک\, ر\, فر\, ر = ۲\pi ک (ا^۲ - ج^۲)$$

اسلئے $و = و_۱ + و_۲ = ۲\pi ک (ا^۲ - \frac{۱}{۳} ج^۲)$ ......(۴)

جب ج = ا تو (۳) اور (۴) سے جو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں وہ ایک ہی ہیں۔

باب چہارم

انحنا لفاف

۱۴۳ — انحنا۔ فرض کروکہ ایک مستوی منحنی پر نقطے ن اور ق ہیں اور ن اور ق پر کے مماس محور لا کے ساتھ زاوئے فا، فا + مف فا بناتے ہیں اور منحنی پر کے کسی ثابت نقطہ سے ن تک کی قوس کا طول س ہے اور قوس ن ق، مف س ہے، ن اور ق پر کے مماسوں کا درمیانی زاویہ مف فا ہوگا (شکل ۲۹، صفحہ ۱۴۱)

تعریفات (۱) زاویہ مف فا قوس ن ق کا کل انحنا کہلاتا ہے۔

(۲) حاصل قسمت $\frac{\text{مف فا}}{\text{مف س}}$ کو قوس ن ق کا اوسط انحنا کہتے ہیں۔

(۳) $\frac{\text{مف فا}}{\text{مف س}}$ کی انتہا $\frac{\text{فر فا}}{\text{فر س}}$ کو جبکہ ق انتہائی صورت میں ن کے لاانتہا قریب آجائے منحنی کا انحنا نقطہ ن پر کہتے ہیں۔

ایک دائرہ کے لئے جس کا نصف قطر ر ہو مف س = ر مف فا

اسلئے $\frac{\text{مف فا}}{\text{مف س}} = \frac{1}{\text{ر}}$ ، $\frac{\text{فر فا}}{\text{فر س}} = \frac{1}{\text{ر}}$ .... (۱)

یعنی دائرہ کی کسی قوس کا اوسط انحنا دائرہ کے کسی نقطہ پر کے انحنا کے مساوی ہوتا ہے، دوسرے الفاظ میں دائرہ ایک ایسا منحنی ہے جس کا انحنا مستقل ہے، اور اس کا انحنا اسکے نصف قطر کے متکافی کے مساوی ہے۔

انحنا ایک ایسی مقدار ہے جس کا بعد طول کے لحاظ سے - ۱ ہے۔

انحنا کسی نقطہ کے معین سکے پہلے اور دوسرے مشتقوں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے اور وہ اس طرح

$$\text{مس فہ} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \text{ ، } \text{جم فہ} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}$$

پہلی مساوات کو بلحاظ س کے تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فر مس فہ}}{\text{فر فہ}} \times \frac{\text{فرفہ}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}$$

$$\text{یعنی قط}^{2}\text{ فہ } \frac{\text{فرفہ}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}\;\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} \div \text{قط فہ}$$

$$\text{اسلئے } \frac{\text{فرفہ}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} \div \text{قط}^{3}\text{ فہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

$$\text{اب چونکہ قط}^{2}\text{ فہ} = ۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{2} \text{ اسلئے}$$

$$\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} \div \left\{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{2}\right\}^{\frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{ک})$$

(ک) کو اساسی ضابطہ تصور کیا جائے۔

نتیجہ صریح جس صورت میں ڈھال $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ اسقدر چھوٹا ہو کہ سعت زیر بحث میں سکا مربع نظر انداز ہو سکے تو انحنا تقریباً $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}$ ہوگا، علم حیل میں خاصکر شہتیروں کے جھکنے کے نظریہ میں یہ تقریبی قیمت اکثر استعمال ہوتی ہے۔

مثال ۱- مکانی $\text{ما}^{2} = ۴\text{ ک لا}$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۲\text{ک}}{\text{ما}} \text{ ، } \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} = -\frac{۲\text{ک}}{\text{ما}^{2}}\;\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{۴\text{ک}^{2}}{\text{ما}^{3}}$$

$$\frac{فرفہ}{فرس} = \frac{-۴ ا^2}{ما^3} \div \left\{ 1 + \frac{۴ ا^2}{ما^2} \right\}^{\frac{3}{2}} = \frac{-۴ ا^2}{(ما^2 + ۴ ا^2)^{\frac{3}{2}}}$$

اگر ن (لا، ما) پر کا عماد محور سے گ پر ملے تو

$$ن گ^2 = ما^2 + ۴ ا^2 \quad اور \quad \frac{فرفہ}{فرس} = -\frac{۴ ا^2}{ن گ^3}$$

منفی علامت کے مفہوم کی طرف دفعہ ۳۲ میں توجہ کی جائیگی۔

مثال ۲۔ ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$

$$\frac{فرما}{فرلا} = -\frac{ب^2 لا}{ا^2 ما}، \quad \frac{فر^2 ما}{فرلا^2} = -\frac{ب^2}{ا^2 ما} + \frac{ب^2 لا}{ا^2 ما^2}\left(-\frac{ب^2 لا}{ا^2 ما}\right) = -\frac{ب^4}{ا^2 ما^3}$$

کیونکہ ناقص کی مساوات سے $ب^2 لا^2 + ا^2 ما^2 = ا^2 ب^2$

اس لئے $\frac{فرفہ}{فرس} = -\frac{ا^4 ب^4}{(ب^4 لا^2 + ا^4 ما^2)^{\frac{3}{2}}}$

اگر مرکز سے نقطہ (لا، ما) پر کے ماس پر عمود کھینچا جائے اور اس کا طول ع ہو تو

$$ع = \frac{ا^2 ب^2}{(ب^4 لا^2 + ا^4 ما^2)^{\frac{1}{2}}} \quad اور \quad \frac{فرفہ}{فرس} = -\frac{ع^3}{ا^2 ب^2}$$

اگر ن گ نقطہ ن (لا، ما) پر کا عماد ہو تو

$$ن گ^2 = \frac{ب^4 لا^2 + ا^4 ما^2}{ا^4} \quad اور \quad \frac{فرفہ}{فرس} = -\frac{ب^4}{ا^2 ن گ^3}$$

اسی طرح کا نتیجہ زائد کے لئے درست ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی مخروطی تراش کا انحنا عماد کے مکعب کے بالعکس بدلتا ہے۔

۳۲۔ دائرۂ انحنا، نصف قطر، مرکز دائرہ انحنا۔

فرض کرو کہ ن اور ق پر کے عماد نقطہ ح پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں (شکل ۲۹) جب، ق انتہائی صورت میں ن پہ آئیگا تو عمادوں کا نقطہ

تقاطع ح َ انتہائی صورت میں ں پر کے عماد پر ایک انتہائی مقام ح اختیار کریگا اور اِس حالت میں ں ح ، فرس / فرفہ کے مساوی ہوگا۔

کیونکہ < ں ح َ ق = مف فہ اور

$$\frac{\text{ں ح َ}}{\text{جب ں ق ح َ}} = \frac{\text{وتر ں ق}}{\text{جب ں ح َ ق}} = \frac{\text{وتر ں ق}}{\text{قوس ں ق}} \times \frac{\text{مف س}}{\text{مف فہ}} \times \frac{\text{مف فہ}}{\text{جب مف فہ}}$$

شکل ۲۹

ں ق ح َ کی انتہا ۹۰° ہے اور موخر الذکر تین کسروں کی انتہائیں بالترتیب ۱، فرس / فرفہ ، ۱ ہیں، اِس لئے ں ح َ کی انتہا فرس / فرفہ ہے اور یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

اِس لئے اگر ح کو مرکز ح ں کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو نقطہ ں پر اِس کا مماس اور انحنا دونوں وہی ہونگے جو مفروضہ منحنی کے نقطہ ں پر ہیں۔

اِس دائرہ کو دائرہ انحنا کہتے ہیں، اس کا نصف قطر ں ح یا فرس / فرفہ

نصف قطر انحنا کہلاتا ہے اور اس کا مرکز ح کن پر کے دائرۂ انحنا کا مرکز کہلاتا ہے
اگر ن میں سے گذرنے والا کوئی خط دائرہ کو دوبارہ ط پر ملے تو ن ط کو
انحنا کا وتر کہتے ہیں۔
اگر ن کے محدد (لا، ما) ہوں، ح کے (ضا، عا) اور انحنا کے نصف قطر

ن ح یعنی $\frac{فر س}{فر ف}$ کو س سے تعبیر کیا جائے تو یہ بآسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ

ضا = لا ـ س جب فہ، عا = ما + س جم فہ .... (۱)
ہم نصف قطر انحنا کو بالعموم س سے تعبیر کرینگے اس طرح انحنا $\frac{۱}{س}$ سے تعبیر ہوگا۔

اگر $\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲}$ نقطہ ن پر صفر ہو تو (۱) کی رُو سے س یا ن ح لامتناہی ہوگا پس
معلوم ہوا کہ منحنی کے نقطہ انعطاف پر س لامتناہی ہوتا ہے۔
شکل ۲۹ کو ہم معیاری تصویر مانینگے اگر اس قرارداد کو ہم تسلیم کرلیں کہ فہ ہمیشہ حادہ ہوگا
(دفعہ ۲ حصہ اول) تو $\frac{فر لا}{فر س}$ اور قط فہ ہمیشہ مثبت ہونگے اور (۱) میں جذر کی علامت

مثبت ہوگی۔ اس لئے س اور $\frac{۱}{س}$ دونوں مثبت ہونگے اگر $\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲}$ مثبت ہو اور دونوں
منفی ہونگے اگر $\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲}$ منفی ہو یعنی س اور $\frac{۱}{س}$ مثبت ہونگے اگر ن کے نزدیک
منحنی اوپر کی طرف مقعر ہو اور منفی ہونگے اگر منحنی اوپر کی طرف محدب ہو۔ اور قرارداد
سے کام لیا جا سکتا ہے لیکن اگر شکل بنائی جائے تو ذراسی احتیاط سے علامت کا سوال

طے ہو سکیگا۔ لیکن اکثر اوقات عددی قیمت ہی ضروری اور مطلوب ہوتی ہے۔

نقطہ ح کے انتہائی مقام ح کو بعض اوقات متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع
کہتے ہیں، لیکن کوئی ایک عماد نہیں ہے جو کسی ایک عماد کا متصل ہو مگر اس
طرز بیان میں بہ نسبت اسکے جو اس دفعہ کے شروع میں درج ہے اختصار ہے اس لئے
بعض اوقات اسے استعمال کرتے ہیں۔

یہ قابل توجہ ہے کہ جب توس ن ق رتبہ اول کا صغاریہ ہو تو ن ح اور ق ح کا فرق اعلیٰ رتبہ کا صغاریہ ہوگا کیونکہ (ق ح - ن ح) / مف س کی انتہا صفر ہے اور وہ اسلئے کہ ق ح - ن ح = ق ح (۱ - جم مف فہ) - ن ق جم ق ن ح

۳۳- انحنا کے لئے اور ضابطے - ضابطہ (ا) اتنا سہولت بخش

ثابت نہیں ہوتا جبتک کہ منحنی کی مساوات اس شکل ما = ف (لا) میں نہ دی ہوئی ہو یا مشتقوں کی قیمتیں بآسانی نہ محسوب ہوسکیں جیسا کہ دفعہ ۳۱ کی مثالوں میں ہے اسلئے ہم ایک دو ضابطے اس جگہ اور حاصل کریں گے اور واضح ہو کہ س کی علامت خاص توجہ کے قابل ہوتی ہے۔

(۱) لا = ف (ت)، ما = فا (ت) کی شکل کی مساوات۔
ہم لا، ما کے مشتقوں کو اختصار کی خاطر زبروں سے تعبیر کریں گے
(ا) میں عف ما / عف لا² ما کی قیمتیں لاَ، لاً، ماَ، ماً کی رقوم میں بیان کرو۔ یہ قیمتیں دفعہ ۹۸ حصہ اول میں معلوم کی گئی ہیں، ایسا کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{س} = (لاَ\ ماً - ماَ\ لاً)\ /\ (لاَ^۲ + ماَ^۲)^{\frac{۳}{۲}} \ldots\ldots (ب)$$

اب چونکہ $عف^۲_{لا} ما = \frac{(لاَ\ ماً - ماَ\ لاً)}{لاَ^۳}$ اس لئے ہم س کی علامت حسب ضرورت دفعہ ۳۲ کی قرارداد کے موافق معلوم کرسکتے ہیں۔

(۲) قطبی مساواتیں۔ (ا) میں عف ما، عف ما کی قیمتیں عف ر، عف² ر کی رقوم میں مندرج کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{۱}{س} = \left\{ ر^۲ + ۲\left(\frac{فر\ ر}{فر\ طہ}\right)^۲ - ر\frac{فر^۲\ ر}{فر\ طہ^۲} \right\} \div \left\{ ر^۲ + \left(\frac{فر\ ر}{فر\ طہ}\right)^۲ \right\}^{\frac{۳}{۲}} \ldots\ldots (ج)$$

ضابطہ (ج) بے ڈول ہے، اکثر اوقات یہ زیادہ آسان ہوتا ہے کہ منحنی کی ع، ر مساوات معلوم کیجائے یعنی منحنی کے ہر نقطہ کے لئے عمود و سے (جو مبدأ و سے کسی نقطہ ن (شکل ۲۹) پر کے مماس پر کھینچا جائے) اور سمتی نیم قطر و ن کے درمیان ربط معلوم کیا جائے اور پھر انحنا معلوم کرنے کے لئے یہ ضابطہ استعمال کیا جائے جو ابھی ہم حاصل کرتے ہیں

شکل ۲۹ میں و سے = ع، و ن = ر

و حَ = و ن + ن حَ - ۲ و ن × ن حَ جم و ن حَ

= ر + ن حَ - ۲ ع × ن حَ

کیونکہ ع = و ن جم و ن حَ = ر جب سا جہاں سا حسب معمول مماس اور سمتی نیم قطر کا درمیانی زاویہ ہے۔

اگر و ق = ر + مف ر اور ع + مف ع = عمود نقطہ و سے ق کے مماس پر تو اسی طرح حاصل ہوگا

و حَ = (ر + مف ر) + ق حَ - ۲ (ع + مف ع) ق حَ

و حَ کی دونوں قیمتیں مساوی رکھنے سے

۲ ر مف ر + (مف ر) + (ق حَ - ن حَ) (ق حَ + ن حَ - ۲ ع)

- ۲ ق حَ مف ع = ۰

لیکن ق حَ - ن حَ اور (مف ر) رتبہ اول سے بڑے رتبہ کے ہیں

اسلئے ر = نہا ق حَ = ر فر ر / فر ع .... (د)

ضابطہ (د) اس طرح بھی حاصل ہو سکتا ہے۔

چونکہ ع = ر جب سا اور فہ = ط + سا اسلئے (دفعہ ۸۸ حصہ اول)

$$\frac{د ع}{د ر} = جب\ سا + رجم\ سا \frac{د سا}{د ر} = \frac{ر د طہ}{د س} + \frac{ر د سا}{د س} = \frac{ر د فہ}{د س}$$

اسلئے $\frac{د س}{د فہ} = \frac{ر د ر}{د ع}$

اشکال کے دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ جب منحنی مبدأ کی طرف مقعر ہو (جیساکہ قطع ناقص کی صورت میں جبکہ مرکز مبدأ ہو) تو ع اور ر ایک ساتھ بڑھتے اور گھٹتے ہیں اس لئے $\frac{د ر}{د ع}$ اور ی دونوں مثبت ہوتے ہیں۔ جب منحنی مبدأ کی جانب محدب ہو تو ی منفی ہوتا ہے۔

اب ہم (د ج) کو (د د) سے حاصل کر سکتے ہیں کیونکہ (دفعہ ۸۸ حصۂ اول سے)

$$مس\ سا = \frac{ر د طہ}{د ر}$$

اور $\frac{۱}{ع^۲} = \frac{۱}{ر^۲ جب^۲ سا} = \frac{۱}{ر^۲} + \left(\frac{۱}{ر^۲} \frac{د ر}{د طہ}\right)^۲$ .... (۱)

اور بلحاظ ر کے تفرق کرنے سے ہم $\frac{د ع}{د ر}$ معلوم کر سکتے ہیں۔

اب ہم اس سے ذرا مختلف ضابطہ حاصل کریں گے جو علم حرکت میں اکثر استعمال ہوتا ہے۔ رکھو ر = $\frac{۱}{ء}$، اس طرح ی ء اور طہ کی رقوم میں حاصل ہوگا۔

$$\frac{د ر}{د طہ} = \frac{د ر}{د ء} \frac{د ء}{د طہ} = -\frac{۱}{ء^۲} \frac{د ء}{د طہ}$$

اس طرح مساوات (۱) ہوجائیگی

$$\frac{۱}{ع^۲} = ء^۲ + \left(\frac{د ء}{د طہ}\right)^۲ \qquad (۲)$$

اب بلحاظ ء کے تفرق کرنے سے

$$-\frac{۲}{ع^۳}\,\frac{دع}{دء} = ۲ء + ۲\left(\frac{دء}{دطہ}\right)\frac{د^۲ء}{دطہ^۲}\,\frac{دطہ}{دء}$$

$$= ۲ء + ۲\,\frac{د^۲ء}{دطہ^۲} \qquad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

لیکن $\frac{دع}{دء} = \frac{دع}{در}\times\left(-\frac{۱}{ء^۲}\right)$، $\frac{۱}{ں} = \frac{۱}{ر}\,\frac{دع}{در} = -ء^۳\,\frac{دع}{دء}$

اب (۳) میں مندرج کرنے اور (۲) کو استعمال کرنے سے

$$\frac{۱}{ں} = ء^۳\left(ء + \frac{د^۲ء}{دطہ^۲}\right) \div \left\{ء^۲ + \left(\frac{دء}{دطہ}\right)^۲\right\}^{\frac{۳}{۲}}$$

$$= \left(ء + \frac{د^۲ء}{دطہ^۲}\right) \div \left\{۱ + \left(\frac{۱}{ء}\,\frac{دء}{دطہ}\right)^۲\right\}^{\frac{۳}{۲}}$$

$\ldots\ldots\ldots$ (۴)

اوپر کے جملہ میں اگر جذر کو مثبت علامت دی جائے تو ں مثبت ہوگا اگر قوس مبدأ کی جانب مقعر ہو اور منفی ہوگا اگر قوس مبدأ کی طرف محدب ہو۔

(۳) **ذاتی مساوات**۔ فرض کرو کہ ایک منحنی کی قوس کا طول منحنی کے ایک ثابت نقطہ سے نقطہ ن تک س ہے اور ن پر کا مماس ایک ثابت مماس کے ساتھ زاویہ فما بناتا ہے۔ جو مساوات س اور فما کا باہمی ربط ظاہر کرتی ہے اسے منحنی کی ذاتی مساوات کہتے ہیں۔

یہ مساوات حوالہ کے ایسے خطوط پر منحصر نہیں ہے جو منحنی کے باہر واقع ہوں مثلاً کوئی قائم محور۔ اس بناء پر اسے منحنی کی ذاتی مساوات کہتے ہیں۔

جب منحنی کی ذاتی مساوات دی ہوئی ہو تو تفرق کرنے سے ں فوراً معلوم ہو سکتا ہے لیکن ابتدائی کام میں ذاتی مساوات چنداں اہمیت نہیں رکھتی، اسے بالعموم معمولی مساوات سے عمل تکمل کے ذریعہ حاصل کرنا پڑتا ہے، اس صورت میں کسی ثابت مماس کو محددوں کا ایک محور مانتے ہیں۔ اس صورت میں فما پر حادہ زاویہ ہونے کی قید نہیں ہونا چاہئے۔

مثال ۱ ۔ $لا^{\frac{۲}{۳}} + ما^{\frac{۲}{۳}} = ا^{\frac{۲}{۳}}$

فرض کرو کہ $لا = ا\,جم^{۳}ت$ ، $ما = ا\,جب^{۳}ت$ ، ضابطہ (ب) استعمال کرو

$لاَ = -۳\,ا\,جم^{۲}ت\,جب\,ت$ ، $لاً = ۳\,ا\,جم\,ت\,(۲\,جب^{۲}ت - جم^{۲}ت)$

$ماَ = ۳\,ا\,جب^{۲}ت\,جم\,ت$ ، $ماً = ۳\,ا\,جب\,ت\,(۲\,جم^{۲}ت - جب^{۲}ت)$

$لاَ^{۲} + ماَ^{۲} = ۹\,ا^{۲}\,جب^{۲}ت\,جم^{۲}ت$ ، $لاَ\,ماً - ماَ\,لاً = -۹\,ا^{۲}\,جب^{۲}ت\,جم^{۲}ت$

$$ر = -۳\,ا\,جب\,ت\,جم\,ت = -۳\,(ا\,لا\,ما)^{\frac{۱}{۳}}$$

اس صورت میں $عف^{۲}_{ا}\,ما = \frac{۱}{۳\,ا\,جب\,ت\,جم\,ت}$ اور ر اگر دفعہ ۲۳ کے دستور کے موافق لیا جائے تو یہ $۳\,ا\,جب\,ت\,جم\,ت$ ہوگا۔

مثال ۲ ۔ $ر^{م} = ا^{م}\,جم\,م\,طہ$

اس منحنی کی ع ، ر مساوات مرتب کرو اور ضابطہ (د) استعمال کرو۔

$$مس\,سا = \frac{ر\,قر\,طہ}{قر\,ر} = -مم\,م\,طہ = مس\,(م\,طہ + \frac{\pi}{۲})$$

ہم لینگے $سا = م\,طہ + \frac{\pi}{۲}$ ، اس طرح

$$ع = ر\,جب\,سا = ر\,جم\,م\,طہ = \frac{ر^{م+۱}}{ا^{م}}$$

اس لئے $ر = \frac{ر\,قر\,ر}{قر\,ع} = \frac{ا^{م}}{(م+۱)\,ر^{م-۱}}$

م کو مختلف قیمتیں دینے سے ہمیں کئی مشہور مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

ملاحظہ ہو مشق ۱۰ سوال (۱۰)

مثال ۳ ۔ قطع ناقص کے انحنا کا مرکز اور اس مرکز کا طریق معلوم کرو۔

ترقیم دفعہ ۱۳۲ مثال ۲ کے موافق یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ

$$\text{جب فہ} = -\frac{\text{ع لا}}{\text{ا}^2} ،\ \text{جم فہ} = \frac{\text{ع ما}}{\text{ب}^2} ،\ \text{ر} = -\frac{\text{ا}^2\text{ب}^2}{\text{ع}^3}$$

$$\text{ضا} = \text{لا} - \text{ر جب فہ} = \text{لا}\left(۱ - \frac{\text{ب}^2}{\text{ع}^2}\right) ،\ \text{عا} = \text{ما}\left(۱ - \frac{\text{ا}^2}{\text{ع}^2}\right)$$

اگر ن (لا، ما) کا خارج المرکز زاویہ طہ ہو تو یہ قیمتیں ہو جائینگی

$$\text{ا ضا} = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{جم}^3\,\text{طہ} ،\ \text{ب عا} = -(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{جب}^3\,\text{طہ}$$

مرکز انحنا کا طریق معلوم کرنے کے لئے طہ کو ساقط کرو

$$(\text{ا ضا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ب عا})^{\frac{2}{3}} = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)^{\frac{2}{3}}$$

اب اگر رواں محدد لا، ما ہوں تو

$$(\text{ا لا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ب ما})^{\frac{2}{3}} = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)^{\frac{2}{3}}$$

اس منحنی کی ترسیم کے لئے ملاحظہ ہو شکل ۳۰ دفعہ ۳۴ -

مثال ۴ - ثابت کرو کہ ایک منحنی کے کسی نقطہ ن پر کا عمودی اسراع $\frac{\text{و}^2}{\text{ر}}$ ہے

جہاں و مماسی رفتار ہے اور $\frac{۱}{\text{ر}}$ نقطہ ن پر منحنی کا انحنا ہے -

(شکل ۲۹) فرض کرو کہ ق پر مماسی رفتار و + مف و ہے، ن ح کی سمت میں ن اور ق پر کی رفتاروں کے اجزاء ترکیبی بالترتیب صفر اور (و + مف و) جب مف فہ ہیں، اس لئے ن پر کا عمادی اسراع ہے

$$\text{نہا}_{\text{مف ت} \to ۰} \frac{(\text{و} + \text{مف و})\,\text{جب مف فہ}}{\text{مف ت}} = \text{و}\frac{\text{مف فہ}}{\text{مف ت}} = \text{و}\frac{\text{مف فہ}}{\text{مف س}} \times \frac{\text{مف س}}{\text{مف ت}}$$

$$= \text{و} \times \frac{۱}{\text{ر}} \times \text{و}$$

اور یہی ثابت کرنا مطلوب تھا -

مشق ۱۰

۱- کسی مخروطی کی مساوات اس شکل میں لکھی جا سکتی ہے $ما^2 = ۲ ا لا + ب لا^2$ جہاں محور لا اسکی محور ہے اور ۲ ا وتر خاص کا طول ہے۔ اگر ن پر کا عماد محور لا سے گ پر ملے اور ن گ اور اسکی فاصلہ س ن کے درمیان زاویہ عہ بنے تو ثابت کرو کہ

$$ر = - \frac{ن گ^2}{ا^2} = - \frac{ن گ}{جم^2 عہ}$$

یہ قابل توجہ ہے کہ ن گ کا ظل س ن پر نیم وتر خاص کے مساوی ہے۔

۲- مثال ایں جو ر کی قیمت عہ کی رقوم میں معلوم کی گئی ہے اس سے کسی مخروطی تراش کے مرکز انحنا معلوم کرنے کا یہ عمل ثابت کرو۔ گ ح کو ن گ پر عمود وار کھینچو اور فرض کرو کہ یہ ن س سے ح پر ملتا ہے۔ پھر ح ک کو ح ن پر عمود وار کھینچو اور اسے اتنا بڑھاؤ کہ ن گ سے یہ ك پر ملے۔ ك مرکز انحنا ہو گا۔

۳- قائم زائد کے لئے $لا ما = ج^2$، ثابت کرو کہ

$$ر = (لا^2 + ما^2)^{\frac{3}{2}} / ۲ ج^2$$

۴- قطع ناقص کا مرکز ج ہے اور اسکے محیط پر کے ایک نقطہ ن کا خارج المرکز زاویہ طہ ہے۔ ج ق ناقص کا ایک نیم قطر ہے جو ن پر کے مماس کے متوازی ہے۔

ثابت کرو کہ (عددی لحاظ سے)

$$ر = (ا^2 جب^2 طہ + ب^2 جم^2 طہ)^{\frac{3}{2}} / ا ب = \frac{ج ق^3}{ا ب}$$

یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ ق کا خارج المرکز زاویہ $طہ \pm \frac{\pi}{2}$ ہے۔ ج ن اور ج ق کو مزدوج نیم قطر کہتے ہیں کیونکہ ہم باآسانی دیکھ سکتے ہیں کہ ان میں سے

کوئی سا قطر دوسرے کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے۔

۵۔ ناقص کے ایک نقطہ ن کا مرکزی نیم قطر ر ہے اور اگر مرکز سے ن پر کے مماس پر عمود نکالا جائے تو اس کا طول ع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ا}^2+\text{ب}^2-\text{ر}^2=\frac{\text{ا}^2\text{ب}^2}{\text{ع}^2}\text{،}\quad \text{ں}=\frac{\text{ا}^2\text{ب}^2}{\text{ع}^3}$$

زائد کے لئے ثابت کرو (متشابہ ترقیم کے موافق)

$$\text{ر}^2-\text{ا}^2+\text{ب}^2=\frac{\text{ا}^2\text{ب}^2}{\text{ع}^2}\text{،}\quad \text{ں}=-\frac{\text{ا}^2\text{ب}^2}{\text{ع}^3}$$

۶۔ منحنی $\text{ا}^2\text{ما}=\text{لا}^3$ کے لئے ثابت کرو کہ $\text{ں}=(\text{ا}^4+9\,\text{لا}^4)^{\frac{3}{2}}/6\,\text{ا}^4\,\text{لا}$ اور

منحنی $\text{ا}\,\text{ما}^2=\text{لا}^3$ کے لئے $\text{ں}=\text{لا}^{\frac{1}{2}}(4\,\text{ا}+9\,\text{لا})^{\frac{3}{2}}/6\,\text{ا}$

۷۔ ایک منحنی کی مساوات $\text{ا}\,\text{ما}=\text{ب}\,\text{لا}^2+2\,\text{ج}\,\text{لا}\,\text{ما}+\text{گ}\,\text{ما}^2+\text{ع}_3+\text{ع}_4+\ldots+\text{ع}_\text{ن}$ ہے
جہاں $\text{ع}_\text{ن}$، لا، ما میں ن ویں درجہ کا متجانس جملہ ہے
ثابت کرو کہ مبدأ پر جو منحنی پر واقع ہے

$$\text{عف}\,\text{ما}=0\text{،}\quad \text{عف}^2\,\text{ما}=\frac{2\,\text{ب}}{\text{ا}}\text{،}\quad \text{ں}=\frac{\text{ا}}{2\,\text{ب}}$$

۸۔ مبدأ پر منحنی $\text{ما}=2\,\text{لا}+3\,\text{لا}^2-2\,\text{لا}\,\text{ما}+\text{ما}^2$ کی صورت میں ثابت کرو کہ نیم قطر انحنا $\frac{5\sqrt{5}}{6}$ ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ زنجیرہ

$$\text{ما}=\frac{\text{ا}}{2}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ا}}}+\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ا}}}\right)$$

کے انحنا کا نصف قطر $\frac{\text{ما}^2}{\text{ا}}$ ہے اور یکساں مضبوطی کے زنجیرہ

ما = ج لوک قط $\left(\frac{\text{ل}}{\text{ج}}\right)$ کے لئے ں = ج قط $\left(\frac{\text{ل}}{\text{ج}}\right)$

۱۰۔ دفعہ ۳۳ مثال ۲ میں جو عام نتائج مرتب کئے گئے ہیں ذیل کی خاص صورتوں میں ان کی تصدیق کرو

(۱) اٹیرن کی شکل کا منحنی $\text{ر}^{2} = \text{ا}^{2}$ جم ۲ طا ، $\text{ر}^{3} = \text{ا}^{2}\text{ع}$ ، ں = $\frac{\text{ا}^{2}}{\text{۳ر}}$

(۲) قائم زائد ر^{2} جم ۲ طا = ا^{2} ، ع ر = ا^{2} ، ں = $\frac{\text{ر}^{3}}{\text{ا}^{2}}$

(۳) مکافی ر(۱ + جم طا) = ۲ا ، ا ر = ع^{2} ، ں = $\frac{\text{۲ر}^{3/2}}{\text{ا}^{1/2}}$

(۴) خط صنوبری ر = ا(۱ + جم طا) ، $\text{ر}^{3} = \text{۲ا ع}^{2}$ ، ں = $\frac{\text{۴ا ع}}{\text{۳ر}}$

مکافی کے لئے م = $-\frac{1}{2}$ ، صنوبری کے لئے م = $\frac{1}{2}$ اور ۲ا ، ا کی بجائے۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ مبدأ میں سے گذرنیوالا وتر انحنا ۲ع $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ع}}$ ہے،

منحنی $\text{ر}^{\text{م}} = \text{ا}^{\text{م}}$ جم م طا کے لئے یہ وتر $\frac{\text{۲ر}}{\text{۱+م}}$ ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ مساوی الزاویہ لولبی ر = ا $\text{قو}^{\text{طا مم عا}}$ کی صورت میں نیم قطر انحنا رقم عا ہے، نیز نیم قطر انحنا کے سامنے مبدأ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

۱۳۔ اگر ایک مخروطی تراش میں ماسکی نیم قطر اور ن پر کے مماس کے درمیان زاویہ سا ہو اور ماسکی نیم قطر اور عماد کا درمیانی زاویہ عا ہو تو ضابطہ (ع) کی مدد سے ثابت کرو کہ

ں = $\frac{\text{ل}}{\text{جب}^{3}\text{سا}}$ = $\frac{\text{ل}}{\text{جم}^{3}\text{عا}}$ جہاں مخروطی کی مساوات ہے

ل ع = ۱ + ز جم طا

اگر ر، رَ ماسکی فاصلے ہوں تو ثابت کرو کہ

ر رَ جم^{2} عا = ب^{2} = ا ل

اور ر = (ر رَ)$^{\frac{3}{2}}$ ÷ ا ب = ر رَ ÷ ا جم عا

۱۴۔ زبروں سے مراد تفرق بلحاظ س کے ہے۔ اگر مرکز انحنا کے محدد (ضا، عا) ہوں تو مساواتوں جم فا = لاَ، جب فا = ماَ کو تفرق کرنے سے ثابت کرو کہ

۱ ÷ ر = − لاً ÷ ماَ = ماً ÷ لاَ ، ۱ ÷ ر^{2} = (لاً)^{2} + (ماً)^{2}

اور ضا = لا + ر^{2} لاً ، عا = ما + ر^{2} ماً

۱۵۔ ضابطہ (ع) سے ثابت کرو کہ نقطۂ انعطاف کے لئے شرط ہے

ع + د^{2}ع ÷ دط^{2} = ۰

۱۶۔ دائرہ (لا − عا)^{2} + (ما − با)^{2} = د^{2} اور منحنی ما = ف (لا)

ایک دوسرے کو نقطہ ن (ا، ب) پر قطع کرتے ہیں، اگر نقطہ ن پر عف ما اور عف^{2} ما کی قیمتیں دائرہ اور منحنی دونوں کے لئے ایک ہی ہوں تو ثابت کرو کہ دائرہ نقطہ ن پر منحنی کا دائرہ انحنا ہے۔

نقطہ ن پر دائرہ اور منحنی دونوں کا مماس ایک ہی ہے کیونکہ ن دائرہ اور منحنی دونوں پر واقع ہے اور دائرہ کا ڈھال نقطہ ن پر مساوی ہے منحنی کے ڈھال کے اسی نقطہ پر۔ دائرہ کی مساوات کو دو مرتبہ تفرق کرو اور تفرق کے بعد

لا، ما، عف ما، عف^{2} ما کی بجائے بالترتیب ا، ب، (فَ (ا))، فً (ا) رکھو۔ اس طرح حاصل ہوگا

(ا − عا)^{2} + (ب − با)^{2} = د^{2} .... (۱)

(ا − عا) + (ب − با) فَ (ا) = ۰ .... (۲)

۱ + [فَ (ا)]^{2} + (ب − با) فً (ا) = ۰ .... (۳)

(۲) اور (۳) سے حاصل ہوتا ہے

ب - بہ = -[۱ + {فَ (ا)}²] ÷ فً (ا)

ا - عہ = فَ (ا) [۱ + {فَ (ا)}²] ÷ فً (ا)

یہ قیمتیں (۱) میں مندرج کرنے سے

د = [۱ + {فَ (ا)}²]^(۳/۲) ÷ فً (ا) .... (۴)

لیکن (۴) سے جو د کی قیمت حاصل ہوتی ہے وہ نقطہ ن پر نیم قطر انحنا ہے اور (عہ، بہ) نقطہ ن پر کے مرکز انحنا کے محدد ہیں۔

تعریف۔ دو منحنی ما = فا (لا) اور ما = ف (لا) جو ایکدوسرے کو نقطہ ن (ا، ب) پر قطع کریں وہ ن پر ایک دوسرے کے ساتھ ن ویں رتبہ کا تماس رکھتے ہیں اگر فاَ (ا) = فَ (ا)، فاً (ا) = فً (ا)، ....

فا^ن (ا) = ف^ن (ا) لیکن فا^(ن+۱) (ا) مساوی نہ ہو ف^(ن+۱) (ا) کے

اس لحاظ سے دائرہ انحنا اصلی منحنی کے ساتھ دوسرے رتبہ کا تماس رکھتا ہے۔

ٹیلر کے مسئلہ (دفعہ ۴۳) سے معلوم ہوگا کہ جب دو منحنی ایک دوسرے کے ساتھ نقطہ (ا، ب) پر ن ویں رتبہ کا تماس رکھیں تو (ا، ب) کے نزدیک متناظر معینوں کا فرق فا (لا) - ف (لا)، (ن + ۱) ویں رتبہ کا صغاریہ ہوگا جبکہ لا - ا کو صدر صغاریہ خیال کیا جائے۔ کیونکہ

فا (لا) - ف (لا) = [(لا - ا)^(ن+۱) / ن+۱] {فا^(ن+۱) (ا) - ف^(ن+۱) (ا) + ح}

جہاں ح صفر ہوتا ہے جبکہ لا = ا

۴۳۔ برپیچ، درپیچ، متوازی منحنی۔

تعریف۔ کسی منحنی کے مرکز انحنا کے طریق کو ہم اس منحنی کا برپیچ کہینگے۔

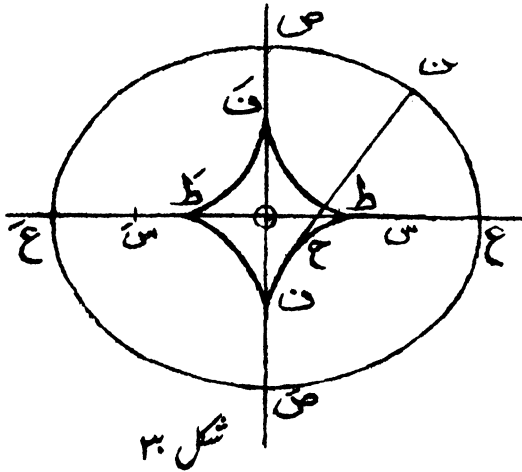
منحنی کے کسی نقطہ ن (لا، ما) کے جواب میں جو مرکز انحنا ح ہے اس کے محدد (ضا، عا) ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں

ضا = لا - ر جب فما، عا = ما + ر جم فما .... (۱)

چاروں مقداریں لا، ما فما، ر ایک ہی مقدار لا یا س یا ت کی رقوم میں بیان ہوسکتی ہیں۔ اگر اس مقدار کو مساواتوں (۱) سے ساقط کیا جائے تو ضا، عا میں ربط ملیگا جو منحنی کے برپیچہ کی مساوات ہوگی۔

ناقص کے برپیچہ کی مساوات $(ا لا)^{\frac{2}{3}} + (ب ما)^{\frac{2}{3}} = (ا^2 - ب^2)^{\frac{2}{3}}$

پہلے معلوم کی گئی ہے (ملاحظہ ہو دفعہ ۳۲ مثال ۳) اور اس کی ترسیم شکل ۲۰ میں کھینچی گئی ہے۔

شکل ۲۰

ناقص کے راسوں ع، عَ، ص، صَ کے جواب میں انحنا کے مرکز ط، طَ، فَ، ف

ہیں اور ع ط = عَ طَ = $\frac{ب^2}{ا}$، ف ص = صَ فَ = $\frac{ا^2}{ب}$

یہ واضح ہے کہ نصف قطر انحنا کو منحنی کے مرتسم کرنے میں کسطرح استعمال کر سکتے ہیں۔

ذیل میں برپیچہ کی مشہور خاصیتیں مندرج ہیں۔

(۱) مفروضہ منحنی کے نقطہ ن پر کا عماد برپیچہ کے نقطہ ح پر مماس ہے۔

(۲) برپیچہ کی کسی قوس کا طول اصلی منحنی میں انحنا کے ان نیم قطروں کے فرق کے مساوی ہوتا ہے جو قوس کے سروں کے متناظر نقطوں پر کھینچے جائیں۔

(۱) مساواتوں (۱) میں س کو جو مفروضہ منحنی کی قوس کا طول ہے متغیر متبوع مانو، تب

$$\frac{\text{فضا}}{\text{فس}} = \frac{\text{فلا}}{\text{فس}} - \text{ر جم فا} \frac{\text{ففا}}{\text{فس}} - \text{جب فا} \frac{\text{فر}}{\text{فس}}$$

$$= - \text{جب فا} \frac{\text{فر}}{\text{فس}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

کیونکہ $\frac{\text{فلا}}{\text{فس}} = \text{جم فا}$، $\frac{1}{\text{ر}} = \frac{\text{ففا}}{\text{فس}}$

اسی طرح سے $\frac{\text{فعا}}{\text{فس}} = \text{جم فا} \frac{\text{فر}}{\text{فس}} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$

اس لئے $\frac{\text{فعا}}{\text{فضا}} = \frac{\frac{\text{فعا}}{\text{فس}}}{\frac{\text{فضا}}{\text{فس}}} = - \text{مم فا}$

اب مرکز انحنا ح (ضا، عا)، ن پر کے عماد پر واقع ہے اور برپیچہ کا ڈھال نقطہ ح پر $\frac{\text{فعا}}{\text{فضا}}$ یعنی − مم فا ہے۔ لیکن مفروضہ منحنی کے نقطہ ن پر جو عماد ہے اس کا ڈھال − مم فا ہے۔ اسلئے عماد ن ح برپیچہ کے مماس پر منطبق ہوتا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ فسا برپیچہ کی قوس کا تفرقہ ہے، (۲) اور (۳) سے

$$\text{فضا} = - \text{جب فا فر}، \quad \text{فعا} = \text{جم فا فر}$$

پس $\frac{d s}{d r} = \pm \sqrt{\left(\frac{d x}{d r}\right)^2 + \left(\frac{d y}{d r}\right)^2} = \pm 1$ .... (۴)

یہ علامت مثبت ہوگی اگر r کے بڑھنے کے ساتھ s بڑھے اور منفی ہوگی اگر r کے بڑھنے کے ساتھ s گھٹے۔
مثبت علامت لینے سے

$s = r +$ مستقل .....(۵)

شکل ۳۱ میں فرض کرو کہ s کو $ح_1$ سے ناپنا شروع کرتے ہیں اور

$ن_1 ح_1$، $ن_2 ح_2$، $ن_3 ح_3$

کے طول بالترتیب r_1، r_2، r_3 ہیں۔

شکل ۳۱

(۵) کی رو سے

قوس $ح_1 ح_2 = r_2 +$ مستقل

$= r_2 - r_1$

قوس $ح_1 ح_3 = r_3 - r_1$

جس سے مطلوبہ نتیجہ ثابت ہوتا ہے۔

اگر منحنی $ح_1 ح_3$ پر تاگا لپیٹ دیا جائے جس کا طول r_3 ہو اور اس کا ایک سرا $ح_3$ پر ثابت کر دیا جائے تو ظاہر ہے کہ جب تاگے کو منحنی پر سے خوب تان کر اتارا (اکیلا) جائیگا تو اس کا آزاد سرا منحنی $ن_1 ن_2 ن_3$ کو مرتسم کرے گا۔ برپیچہ کی وجہ تسمیہ یہی ہے۔

منحنی $ن_1 ن_3$ کو $ح_1 ح_3$ کا دربیچہ کہتے ہیں، ظاہر ہے کہ تاگے پر کا کوئی نقطہ

ایک دریچہ مرتسم کریگا۔ پس کسی مفروضہ منحنی کا صرف ایک پریچہ ہوتا ہے لیکن اسکے بیشمار دریچے ہوتے ہیں۔

دو دریچوں ف ا ح ا ہ ، ک ا ح ک م کو متوازی منحنی کہتے ہیں کیونکہ ان کا باہمی عمودی فاصلہ مستقل ہے۔

۳۵ - لفاف مساوات $\text{ما} = \text{عا}\,\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{عا}}$ .... (۱)

جہاں عا اور ا مستقل ہیں ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ اگر عا کو کوئی مختلف مستقل قیمت مثلاً $\text{عا}_{۱}$ دی جائے تو مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{ما} = \text{عا}_{۱}\,\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{عا}_{۱}} \quad \text{.........(۲)}$$

اور یہ ایک مختلف خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

(۱) اور (۲) کے نقطہ تقاطع کے محدد ہیں

$$\text{لا} = \frac{\text{ا}}{\text{عا}\,\text{عا}_{۱}} ،\quad \text{ما} = \frac{\text{ا}}{\text{عا}} + \frac{\text{ا}}{\text{عا}_{۱}} \quad \text{.........(۳)}$$

اب فرض کرو کہ $\text{عا}_{۱}$ بلحاظ قیمت عا کے قریب آتا جاتا ہے، اس کا نتیجہ یہ ہوگا کہ خط (۲) خط (۱) کے قریب آتا جائیگا لیکن مساواتوں (۳) سے ظاہر ہے کہ جب، $\text{عا}_{۱}$ انتہا میں مائل بہ عا ہو تو نقطہ تقاطع انتہائی صورت میں ایک محدود مقام کی طرف مائل ہوتا ہے جس کے محدد

$$\text{لا} = \frac{\text{ا}}{\text{عا}^{۲}} ،\quad \text{ما} = \frac{۲\text{ا}}{\text{عا}} \quad \text{.........(۴)}$$

ہیں۔ اگر ہم مساواتوں (۴) سے عا کو ساقط کردیں تو مساوات

$$\text{ما}^{۲} = ۴\,\text{ا}\,\text{لا} \quad \text{.........(۵)}$$

حاصل ہوتی ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ عا خواہ کوئی قیمت اختیار کرے، انتہائی نقطہ تقاطع مکافی (۵) پر واقع ہوتا ہے نیز اسکی بآسانی تصدیق ہو سکتی ہے کہ عا کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو خط (۱) مکافی کا مماس ہے۔

بالعموم کسی منحنی کی مساوات ف (لا، ما) = ۰ میں ایسے مستقل شامل ہوتے ہیں جو منحنی کی شکل، ناپ اور مقام کا تعین کرتے ہیں، ان مستقلوں کو سلسلہ وار مختلف قیمتیں دینے سے مختلف منحنیات کا ایک سلسلہ حاصل ہوتا ہے لیکن اس جگہ ہم صرف اس صورت پر غور کرینگے جس میں صرف ایک مستقل کو مختلف قیمتیں دینے سے منحنیات کا سلسلہ حاصل ہو۔ اس سلسلہ کو ہم قبیل منحنیات کہینگے۔ ایسی صورت میں مستقل کو قبیل کا متبدل کہتے ہیں، مثلاً (۱) میں عا خطوط مستقیم کے قبیل کا متبدل ہے۔

کسی قبیل کے کوئی دو منحنی بالعموم ایکدوسرے کو قطع کرینگے، اگر قبیل کے دو منحنیات م۱ اور م۲ کے لئے متبدل کی قیمتیں عا اور عا + مف عا ہوں تو انکا نقطہ یا نقاط تقاطع محدود انتہائی مقام اختیار کرینگے جبکہ مف عا مائل بہ صفر ہو۔ ان انتہائی مقامات کے طریق کو قبیل منحنیات کا لفاف کہتے ہیں۔

مثلاً مکافی (۵) قبیل (۱) کا لفاف ہے، کسی منحنی کا بر پیچ ایسے خطوط مستقیم کے قبیل کا لفاف ہے جو منحنی کے عماد ہوں۔ (دفعات ۳۲، ۳۴)

۳۶ ـ لفاف کی مساوات ـ فرض کرو کہ مساوات

ف (لا، ما، عا) = ۰ .... (۱)

ایک قبیل منحنیات کو تعبیر کرتی ہے اور قبیل کا متبدل تفاعلی علامت میں جداگانہ دکھایا گیا ہے، نظام کے کسی ایک منحنی کے لئے عا مستقل ہے

فرض کرو کہ مساوات

ف (لا، ما، عا + مف عا) = ۰ .... (۲)

نظام کے ایک اور منحنی کو تعبیر کرتی ہے۔ (۱) اور (۲) کے نقاط تقاطع کے محدد

ف (لا، ما، عا + مف عا) ـ ف (لا، ما، عا) = ۰

کو یعنی { ف (لا، ما، عا + مف عا) ـ ف (لا، ما، عا) } / مف عا = ۰ .... (۳)

کو پورا کرینگے۔

(۳) کی انتہا مف عا ← ۰ کے لئے

$$\frac{\text{جف ف (لا، ما، عا)}}{\text{جف عا}} = ۰ \quad \text{.............. (۴)}$$

ہے، اسلئے لفاف پر کے نقاط کے محدد مساواتوں (۱) اور (۴) کو پورا کرتے ہیں اور لفاف کی مساوات ان دو مساواتوں سے عا کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اوپر کے ثبوت سے ظاہر ہے کہ (۴) کے مرتب کرنے میں لا اور ما دونوں کو مستقل قرار دیا گیا ہے۔

مثلاً اگر $\text{ف (لا، ما، عا)} = -\text{ما} + \text{عا لا} + \frac{۱}{\text{عا}}$

$$\frac{\text{جف ف (لا، ما، عا)}}{\text{جف عا}} = \text{لا} - \frac{۱}{\text{عا}^۲}$$

مساواتوں $-\text{ما} + \text{عا لا} + \frac{۱}{\text{عا}} = ۰$ اور $\text{لا} - \frac{۱}{\text{عا}^۲} = ۰$

سے عا کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے $\text{ما}^۲ = ۴\,\text{لا}$ پس لفاف مکافی ہے جیسا کہ دفعہ ۳۵ میں حاصل کیا گیا۔

دفعہ ۳۵ میں ہم نے دیکھا کہ قبیل (۱) کا ہر ایک رکن مکافی (۵) کا مماس ہے۔ اب ہم ذیل کا مسئلہ ثابت کرینگے۔

مسئلہ۔ بالعموم کسی قبیل منحنیات کا لفاف قبیل کے ہر ایک رکن کو مس کرتا ہے۔

(۱) کے نقطہ (لا، ما) پر ڈھال ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \cdot \frac{\text{د ما}}{\text{د لا}} = ۰ \quad \text{.............. (۵)}$$

جہاں عمل تفرق میں عا کو مستقل رکھنا چاہیئے

بخلاف اس کے لفاف کی مساوات حاصل کرنے میں عا کو (۱) اور (۴) میں سے ساقط کیا جاتا ہے۔ اس لئے (۱) کو لفاف کی مساوات مانا جا سکتا ہے بشرطیکہ عا کو لا، ما کا ایک ایسا تفاعل قرار دیا جائے جس کا تعین (۴) سے ہوتا ہے۔ پس لفاف کے کسی نقطہ

(لا، ما) پر کا ڈھال (۱) کا پورا مشتق لینے سے حاصل ہوگا پورا مشتق ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{ڈ ما}}{\text{ڈ لا}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف عہ}}\,\frac{\text{ڈ عہ}}{\text{ڈ لا}} = 0 \quad \ldots\ldots (6)$$

اب فرض کرو کہ نقطہ (لا، ما) کے محدد (۱) اور (۴) دونوں کو پورا کرتے ہیں، اس طرح یہ نقطہ منحنی (۱) اور لفاف دونوں پر واقع ہوگا۔ نیز (۴) کی رد سے مساوات (۶) مساوات (۵) میں تحویل ہو جاتی ہے۔ پس معلوم ہوا کہ نقطہ (لا، ما) پر ڈھال $\frac{\text{ڈ ما}}{\text{ڈ لا}}$ منحنی (۱) اور لفاف دونوں کے لئے وہی ہے۔ مسئلہ ثابت ہوا۔

یہ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}$، $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$ دونوں صفر نہیں ہیں۔

اگر یہ صفر ہوں تو $\frac{\text{ڈ ما}}{\text{ڈ لا}}$ کی قیمت جو (۵) یا (۶) سے حاصل ہوتی ہے غیر معیّن ہوگی، اس صورت میں ممکن ہے کہ مسئلہ درست نہ ہو مگر ایسی صورتوں کی بحث اس کتاب کی حدود سے باہر ہے۔

تحلیلی نقطہ نظر سے قبیل (۱) کے لفاف معلوم کرنے کا عمل وہی ہے جو تغیر عہ کے تفاعل ف (لا، ما، عہ) کے موڑ کی قیمتیں معلوم کرنے کا عمل ہے جبکہ لا، ما کو مستقل مانا جائے۔

طالب علم عہ کی مثبت اور منفی قیمتوں کے لئے قبیل ما = عہ لا + $\frac{1}{\text{عہ}}$ کے چند خطوط کھینچے، اس طرح اُسے ایک ایسے منحنی کا اچھا اندازہ ہو جائیگا جو اپنے مماسوں کا لفاف ہے۔ یہ خط بآسانی کھینچ سکینگے کیونکہ ان کے مقطوع محاور پر بالترتیب $\frac{1}{\text{عہ}}$، $-\frac{1}{\text{عہ}^2}$ ہیں۔

مثال ۱۔ مکانی ما^2 = ۴ ا لا کا پیچہ مکانی کے عمادوں کا لفاف خیال کیا جا سکتا ہے۔

(ھ، ک) پر کا عماد ہے

۲ ا (ما - ک) + ک (لا - ھ) = ۰

یا ۸ اُ ما + ۴ ا (لا - ۲ ا) ک - ک۳ = ۰ .... (۱)

کیونکہ مکافی کی مساوات سے ھ = ک۲ / ۴ ا

ک کو خطوط مستقیم (۱) کے قبیل کا متبدل مانکر اس کے لفاف کی مساوات دریافت کرو۔

(۱) کو بلحاظ ک کے تفرق کرو، اس طرح حاصل ہوگا

۴ ا (لا - ۲ ا) - ۳ ک۲ = ۰ .... (۲)

(۱) اور (۲) کے درمیان ک کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

۲۷ ا ما۲ = ۴ (لا - ۲ ا)۳

جو پیچہ کی مساوات ہے۔

مثال ۲۔ اُن دائروں کا لفاف معلوم کرو جو مبدأ میں سے گذرتے ہیں اور جن کے مرکز زائد لا۲ - ما۲ = ج۲ پر واقع ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ قبیل کے کسی دائرہ کا مرکز (عما، بما) ہے، دائرہ کی مساوات ہے

لا۲ + ما۲ - ۲ عما لا - ۲ بما ما = ۰ .... (۱)

مساوات میں مستقل رقم نہیں ہے کیونکہ دائرہ مبدأ میں سے گذرتا ہے۔

چونکہ مرکز زائد پر واقع ہیں، اس لئے

عما۲ - بما۲ = ج۲ .... (۲)

ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ مساوات (۲) کو بما کے لئے عما کی رقوم میں حل کیا گیا ہے اور پھر اس قیمت کو (۱) میں درج کر دیا گیا ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات (۱) میں دراصل ایک متبدل ہے لیکن اس میں زیادہ سہولت ہے کہ بما کو عما کا ایک ایسا تفاعل سمجھکر جس کی تعیین (۲) سے ہوتی ہے مساواتوں کو بلحاظ عما کے تفرق کیا جائے پھر ھ، بما اور فر بما / فر عما کو ساقط کیا جائے۔

(۱) اور (۲) کو بلحاظ عما کے تفرق کرنے سے

$$\text{لا} + \text{ما}\,\frac{\text{فربہ}}{\text{فرعہ}} = 0 \text{ ، } \text{عہ} - \text{بہ}\,\frac{\text{فربہ}}{\text{فرعہ}} = 0 \ldots\ldots\ldots (۳)$$

$$(۳) \text{ سے } \frac{\text{عہ}}{\text{لا}} = - \frac{\text{بہ}}{\text{ما}}$$

$$\text{اس لئے } (۲) \text{ سے } \frac{\text{عہ}}{\text{لا}} = - \frac{\text{بہ}}{\text{ما}} = \frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{لا}^2 - \text{ما}^2}}$$

(۱) میں عہ اور بہ کے لئے مندرج کردہ تحویل سے حاصل ہوتا ہے

$$(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)^2 = ۴\,\text{ج}^2\,(\text{لا}^2 - \text{ما}^2)$$

جو ابیرن کی شکل کے منحنی کی مساوات ہے۔
ظاہر ہے کہ اوپر کا عمل وہی ہے جو اعظم و اقل قیمتیں معلوم کرنیکا عمل ہے۔

۳۷۔ چونکہ خط تدویر علم حرکت میں کچھ اہمیت رکھتا ہے ہم اجمالی طور پر اسکی مشہور خاصیتوں پر غور کرینگے۔

تعریف جب ایک دائرہ ایک ثابت خط مستقیم پر لڑھکتا ہے (بغیر پھسلنے کے) تو اس کے محیط پر کا کوئی نقطہ ایک مستوی منحنی مرتسم کرتا ہے جسے ہم خط تدویر کہینگے۔

شکل ۳۲ میں فرض کرو کہ و د قاعدہ ہے ن مکون دائرہ ص ن ے پر مرتسم نقطہ ہے اور طہ نصف قطر س ن اور نصف قطر س ے کے درمیان کا زاویہ ہے جہاں ے دائرہ کا قاعدہ کے ساتھ نقطہ تماس ہے۔

فرض کرو کہ ن ، و پر ہوتا ہے جبکہ دائرہ لڑھکنا شروع کرتا ہے ، ن ل ، و د پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ و ل = لا ، ل ن = ما ، تب اگر نصف قطر ا ہو تو

$$\text{و ے} = \text{قوس ن ے} = \text{ا طہ}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{لا} &= \text{و ے} - \text{س ن جب طہ} = \text{ا(طہ} - \text{جب طہ)} \\ \text{ما} &= \text{ے س} + \text{س ن جم ص س ن} = \text{ا(ا} - \text{جم طہ)} \end{aligned}\right\} \ldots (۱)$$

شکل ۳۲

جہاں ے س ص نقطہ ے میں سے گذرنیوالا قطر ہے، (۱) خط تدویر کی مساواتیں ہیں۔

اگر طا = π تو لا = π ا = و ب اور ن اسوقت نقطہ ا پر ہوتا ہے اور اس حالت میں اس کا فاصلہ قاعدہ سے زیادہ ہے، ا کو راس کہتے ہیں۔

جسوقت طا = ۲π تو لا = ۲π ا = و د، اس وقت ن د پر ہوتا ہے۔

محراب و ا د ب ا کے گرد متشاکل ہے، ب ا کو محور کہتے ہیں۔ اگر دائرہ اور لڑکتا رہے تو ن سلسلہ وار کئی محراب مرتسم کریگا جو و ا د کے متماثل ہونگے۔ جب خط تدویر کا ذکر کیا جائے تو بالعموم اسکے ایک محراب سے مراد ہوتی ہے۔ ا اُس صورت میں راس ہے اور ب ا محور۔

خاصیتیں ذیل کے خواص بآسانی ثابت ہو سکتے ہیں۔

(۱) س فا = عف لا ما = جم (طا/۲) = س (π/۲ − طا/۲) = س ن ے ص

اسلئے فا = π/۲ − طا/۲ = د ن ے ص

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ ن ص مماس ہے اور ن ے نقطہ ن پر کا عماد ہے۔

(۲) س = قوس و ن = ۴ ا (۱ - جم $\frac{طا}{۲}$) قوس و ا = ۴ ا

(۳) ر = ن ح = ۴ ا جب $\frac{طا}{۲}$ = ۲ ن ے (تعداداً)

[اگر مماس ا ت اور عماد ا ب کو محور مانا جائے اور ن م، ا ت پر عمود کھینچا جائے تو رکھو طاَ = ص س ن = ۲ - طا۔

اس صورت میں

لا = ا م = ا (طاَ + جب طاَ)، ما = م ن = ا (۱ - جم طاَ) ....(اَ)

(۱ا) فہ = د ن ص م = $\frac{۱}{۲}$ طاَ = د ن ے ص

(۲ا) س = قوس ا ن = ۴ ا جب $\frac{طاَ}{۲}$، س^{۲} = ۸ ا × م ن = ۸ ا ما]

مرکز انحنا ح کے محدد ہیں

ضا = و ل + ۴ ا جب $\frac{طا}{۲}$ جم $\frac{طا}{۲}$ = ا (طا + جب طا)

عا = - ے ح جب $\frac{طا}{۲}$ = - ا (۱ - جم طا)

مساواتوں (اَ) کے ساتھ مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ خط تدویر و ا د کا پیچہ ایک مساوی تدویر ہے جو وہ نصفوں و ح ب، ب ک پر مشتمل ہے۔ (اَ) میں محور ما کی مثبت سمت نیچے کی طرف ہے اور جب و مبدأ ہو تو مثبت سمت اوپر کیطرف ہے، پس اس لئے عا منفی ہے۔

ب ا پیچہ پر ایک قرن ہے، و اور د اصلی تدویر کے قرن اور پیچہ کے راس ہیں۔

بر تدویر اور در تدویر جب ایک دائرہ ایک ثابت دائرہ کے محیط پر لڑکتا ہو (بغیر پھسلنے کے) تو اول الذکر کے محیط پر کا کوئی نقطہ جو منحنی مرتسم کرتا ہے اسے ہم بر تدویر کہینگے اگر متحرک دائرہ ثابت دائرہ کے باہر ہو اور در تدویر کہینگے اگر یہ دائرہ اندر ہو۔

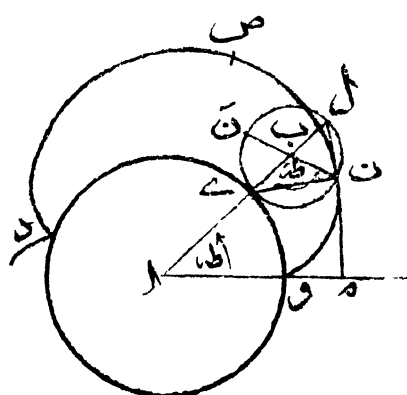
جب لڑکنے والا دائرہ ثابت دائرہ کے گرد پورا حائط ہو تو برتدویر کو حول تدویر کہا جا سکتا ہے۔

شکل ۳۳ میں برتدویر کی تکوین دکھائی گئی ہے، نقطہ ن مرسم نقطہ ہے اور و نقطہ ابتدائی ہے۔ فرض کرو کہ ثابت اور لڑکنے والے دائروں کے نصف قطر بالترتیب ا، ب ہیں، زاویہ و ا ے = طہ اور زاویہ ے ب ن = طہَ، ام = لا، من = ما، تب

قوس ن ے = قوس و ے یعنی ب طہَ = ا طہ

لا = (ا + ب) جم طہ - ب جم (طہ + طہَ)

$$= (ا + ب) \text{ جم طہ} - \text{ب جم } \frac{ا + ب}{ب} \text{ طہ}$$

$$ما = (ا + ب) \text{ جب طہ} - \text{ب جب } \frac{ا + ب}{ب} \text{ طہ} \quad \ldots\ldots (۲)$$

شکل ۳۳

جب دائرے ے پر کے مماس کے ایک ہی جانب واقع ہوں یعنی درتدویر کے لئے (ب < ا) اور حول تدویر کے لئے (ب > ا) صرف ب کی علامت بدل دینا کافی ہوگا، درتدویر کی مساواتیں اس شکل کی ہونگی

$$\text{لا} = (\text{ا} - \text{ب})\ \text{جم طہ} + \text{ب جم} \frac{(\text{ا} - \text{ب})\text{طہ}}{\text{ب}}$$

$$\text{ما} = (\text{ا} - \text{ب})\ \text{جب طہ} - \text{ب جب} \frac{(\text{ا} - \text{ب})\text{طہ}}{\text{ب}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اگر نسبت ب : ا کوئی متوافق عدد ہو تو دائرہ ب کا مرسم نقطہ ن پھر ابتدائی نقطہ ق پر واپس آئیگا جبکہ متحرک دائرہ ب ثابت دائرہ کے گرد ایک یا زیادہ دفعہ پورا لڑک جائے۔ اگر نسبت ب : ا متباین ہو تو ن پھر ق پر واپس نہیں آئے گا۔

استداری خط یا استداری۔ اگر مرسم نقطہ ن محیط پر واقع نہ ہو بلکہ ایک نصف قطر پر یا نصف قطر مخروجہ پر واقع ہو تو مرتسمہ منحنی کو ہم استداری یا براستداری یا دراستداری کہینگے۔

طالب علم بآسانی دیکھ لیگا کہ اگر دائرہ کے مرکز سے ن کے فاصلہ کو نصف قطر کے ساتھ نسبت لہ : ۱ ہو تو مساواتوں (۱) میں جب طہ اور جم طہ کو لہ کے ساتھ ضرب دینے سے **استداری** کی مساواتیں حاصل ہونگی اور مساواتوں (۲) اور (۳) میں دوسری رقم کے سر جب کو لہ کے ساتھ ضرب دینے سے بالترتیب دراستداری اور براستداری خطوط کی مساواتیں حاصل ہونگی۔

مشق ۱۱

۱۔ ثابت کرو کہ مکافی $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$ کی صورت میں

$\text{س} = -۲\,\text{ا تم}^3\,\text{فہ}$، $\text{ضا} = ۲\,\text{ا} + ۳\,\text{ا تم}^2\,\text{فہ}$، $\text{عا} = -۲\,\text{ا تم}^3\,\text{فہ}$

پھر برپیچہ کی مساوات حاصل کرو۔

۲۔ زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کی صورت میں ثابت کرو کہ

$$\text{ا}^4\,\text{ضا} = (\text{ا}^2 + \text{ب}^2)\,\text{لا}^3 ،\quad \text{ب}^4\,\text{عا} = -(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)\,\text{ما}^3$$

اور برپیچہ کی مساوات ہے

$$(\text{ا لا})^{\frac{2}{3}} - (\text{ب ما})^{\frac{2}{3}} = (\text{ا}^2 + \text{ب}^2)^{\frac{2}{3}}$$

۳۔ ثابت کرو کہ قائم زائد $\text{لا ما} = \text{ج}^2$ کے لئے

$$\text{ضا} = \frac{3}{2}\text{لا} + \frac{\text{ما}^3}{2\text{ج}^2}،\quad \text{عا} = \frac{3}{2}\text{ما} + \frac{\text{لا}^3}{2\text{ج}^2}$$

اور برپیچہ کی مساوات ہے

$$(\text{لا}+\text{ما})^{\frac{2}{3}} - (\text{لا}-\text{ما})^{\frac{2}{3}} = (4\,\text{ج})^{\frac{2}{3}}$$

۴۔ ثابت کرو کہ منحنی $\text{لا}^{\frac{2}{3}} + \text{ما}^{\frac{2}{3}} = \text{ا}^{\frac{2}{3}}$ کے لئے (ملاحظہ ہو دفعہ ۳۴، مشق ۱)

$$\text{ضا} = \text{ا}\,\text{جم}^3\text{ت} + 3\,\text{ا}\,\text{جم ت}\,\text{جب}^2\text{ت}،\quad \text{عا} = \text{ا}\,\text{جب}^3\text{ت} + 3\,\text{ا}\,\text{جب ت}\,\text{جم}^2\text{ت}$$

اور برپیچہ کی مساوات ہے

$$(\text{لا}+\text{ما})^{\frac{2}{3}} + (\text{لا}-\text{ما})^{\frac{2}{3}} = 2\,\text{ا}^{\frac{2}{3}}$$

۵۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم $\frac{\text{لا}}{\text{عا}} + \frac{\text{ما}}{\text{بہا}} = 1$ کے قبیل کا لفاف

(۱) جبکہ $\text{عا بہا} = \text{ا}^2$ زائد $4\,\text{لا ما} = \text{ا}^2$ ہے

(۲) جبکہ $\text{عا} + \text{بہا} = \text{ا}$ مکافی $\sqrt{\text{لا}} + \sqrt{\text{ما}} = \sqrt{\text{ا}}$ ہے

(۳) جبکہ $\text{عا}^2 + \text{بہا}^2 = \text{ا}^2$ منحنی $\text{لا}^{\frac{2}{3}} + \text{ما}^{\frac{2}{3}} = \text{ا}^{\frac{2}{3}}$ ہے

متبدل عا، بہا جن شرائط کے تابع ہیں اُن کا ہندسی مفہوم بیان کرو۔

۶۔ ثابت کرو کہ ناقصوں $\frac{\text{لا}^2}{\text{عا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{بہا}^2} = 1$ کے قبیل کا لفاف

(۱) جبکہ $\text{عا بہا} = \text{ا}^2$ دو زائد $2\,\text{لا ما} = \pm\,\text{ا}^2$ ہے

(۲) جبکہ عہ + بہ = ا منحنی لا$^{2/3}$ + ما$^{2/3}$ = ا$^{2/3}$ ہے

متبدل عہ، بہ جن شرائط کے تابع ہیں ان کا ہندسی مفہوم بیان کرو۔

۷۔ ثابت کرو کہ مکافی کے دوہرے معینوں کو قطر مان کر جو دائرے کھنچ سکتے ہیں ان کا لفاف ایک مساوی مکافی ہے۔

۸۔ اگر ن، ق، ر ایک نقطہ کے محددوں کے تفاعل ہوں اور عہ متبدل ہو تو ن عہ^2 + ۲ ق عہ + ر = ۰ کا لفاف ق^2 − ن ر = ۰ ہے۔ اور ن جم عہ + ق جب عہ = ر کا لفاف ن^2 + ق^2 = ر^2 ہے۔

۹۔ م کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو ثابت کرو کہ خط مستقیم

$$\text{ما} = \text{م لا} + \sqrt{\{(\text{ا} + \text{ب م}^2)/\text{اب}\}}$$

مخروطی ا لا^2 + ب ما^2 = ا کو مس کرتا ہے۔

۱۰۔ ایک متحرک خط مستقیم ہے، دو ثابت نقطوں (ج، ۰) اور (−ج، ۰) سے اس پر جو عمود کھنچ سکتے ہیں ان کے مربعوں کا (۱) حاصل ضرب (۲) مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ ہر صورت میں لفاف ایک مرکز دار مخروطی تراش ہے۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ ناقص کے مرکزی نصف قطروں کو قطر مان کر جو دائرے بنائے جا سکتے ہیں ان کا لفاف (لا^2 + ما^2)^2 = ا^2 لا^2 + ب^2 ما^2 ہے۔

۱۲۔ ناقصوں $\frac{(\text{لا} - \text{عہ})^2}{\text{ا}^2} + \frac{(\text{ما} - \text{بہ})^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کا لفاف جبکہ عہ، بہ مساوات $\frac{\text{عہ}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{بہ}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے ذریعہ مربوط ہوں ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ ہے۔ ہندسی زبان میں اس مسئلہ کو بیان کرو۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم کے قبیل

لا قط عا - ب ما قم عا = ا۲ - ب۲

کا لفاف منحنی $(ا لا)^{\frac{2}{3}} + (ب ما)^{\frac{2}{3}} = (ا^{2} - ب^{2})^{\frac{2}{3}}$ ہے۔

۱۴۔ اگر شکل ۲۹ میں و ے = ع تو ثابت کرو کہ ن پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں ہیں

لا جب فا - ما جم فا = ع ....(۱)

لا جم فا + ما جب فا = فرع / فرفا ....(۲)

اور (۲) سے ثابت کرو کہ ے ن = فرع / فرفا

منحنی کو اس کے مماسوں کا لفاف تصور کرو۔

۱۵۔ مثال ۱۴ میں جو ترقیم استعمال کی گئی ہے اس کے موافق ثابت کرو کہ مرکز انحنا کے محدد (ضا، عا) ذیل کی مساواتوں سے معلوم ہوتے ہیں

ضا جم فا + عا جب فا = فرع / فرفا، - ضا جب فا + عا جم فا = فر۲ع / فرفا۲

یا ضا = فرع / فرفا جم فا - فر۲ع / فرفا۲ جب فا، عا = فرع / فرفا جب فا + فر۲ع / فرفا۲ جم فا

۱۶۔ اوپر کی دو مثالوں کی ترقیم کے موافق ثابت کرو کہ و ح کا ظل ن ح پر جہاں ح مرکز انحنا ہے

- ضا جب فا + عا جم فا

ہے اور ر = ع - ضا جب فا + عا جم فا = ع + فر۲ع / فرفا۲

۱۷۔ ثابت کرو کہ کسی منحنی کے بریچیہ کا نصف قطر انحنا ر فرر / فرس ہے جہاں ر اصلی منحنی کے متناظر نقطہ پر نصف قطر انحنا ہے۔

دفعہ ۲۴۳، (۲) کو استعمال کرو، منحنی اور بر پیچہ کے لئے فر فما وہی ہے۔

۱۸- ایک منحنی، اس کے بر پیچہ اور اس کے انحنا کے دو نصف قطروں کے درمیان جو رقبہ گھر جاتا ہے وہ ا ہے، ثابت کرو کہ

$$\frac{فر ا}{فر لا} = \frac{1}{2} ر^2 \frac{فر فما}{فر لا} = \frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{فر ما}{فر لا}\right)^2\right\}^2 \div \frac{فر^2 ما}{فر لا^2}$$

۱۹- اب ج ایک دائرہ کی قوس ہے جس کا مرکز و ہے اور نصف قطر ر، ج ن نقطہ ج پر مماس ہے اور ا ن دائرہ کے در پیچہ کا ایک حصہ ہے، و ا کو محور لا اور فما کو زاویہ ا و ج مان کر ثابت کرو کہ ن کے محدد (لا، ما) ہیں

$$لا = ا جم فما + ا فما جب فما، \quad ما = ا جب فما - ا فما جم فما$$

اور در پیچہ کی ذاتی مساوات ہے $س = \frac{1}{2} ا فما^2$

دائرہ کے سب در پیچے منطابقاً مساوی ہیں، اس لئے حوالہ کے وقت صرف دائرہ کا "در پیچہ" کہا جا سکتا ہے۔

۲۰- ثابت کرو کہ دائرہ کے در پیچہ کی ع، ر مساوات ہے

$$ر^2 = ع^2 + ا^2$$

۲۱- ناقص کے بر پیچہ کا کل طول ہے

$$۴ (ا^۳ - ب^۳) / ا ب$$

۲۲- ثابت کرو کہ خط تدویر کی ذاتی مساوات جبکہ راس ا مبدا ہو جہاں سے س ناپا جائیگا اور ا ت ثابت مماس ہو س = ۴ ا جب فما ہے [شکل ۳۲]

۲۳- ثابت کرو کہ شکل (۳۳) میں ن مر نقطہ ن پر کا مماس ہے اور ن ل ہے عماد۔

کیونکہ مس فما $= \frac{فر ما}{فر لا} = \frac{جم طما - جم (طما + طمَا)}{جب (طما + طمَا) - جب طما} = مس (طما + \frac{1}{2} طمَا)$

اور ن ل محور لا کے ساتھ زاویہ طما + $\frac{1}{2}$ طمَا بناتا ہے۔

اسی طرح کے نتائج در تدویریہ کے لئے بھی درست ہیں۔

۲۴۔ شکل ۳۳ میں اگر برتدویر کی قوس و ط = س تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}} = ۲ (ا + ب) \text{جب} \frac{\text{ا طہ}}{۲ \text{ب}} ، \quad \text{س} = \frac{۴ \text{ب} (ا + ب)}{ا} \left(۱ - \text{جم} \frac{\text{ا طہ}}{۲ \text{ب}} \right)$$

اور و ط د کا طول ہے $\frac{۸ \text{ب} (ا + ب)}{ا}$ ہے۔

۲۵۔ ثابت کرو کہ برتدویر کی ذاتی مساوات ہے $\text{س} = \frac{۴ \text{ب} (ا + ب)}{ا} \left\{ ۱ - \text{جم} \frac{\text{ا فہ}}{ا + ۲ \text{ب}} \right\}$

اور نصف قطر انحنا ہے $\text{ر} = \frac{۴ \text{ب} (ا + ب)}{ا + ۲ \text{ب}} \text{جب} \left(\frac{\text{ا فہ}}{ا + ۲ \text{ب}} \right)$

اسی طرح کے نتائج درتدویر کے لئے بھی درست ہیں اگر ب کی علامت بدل دی جائے۔

۲۶۔ اگر $\text{ب} = \frac{ا}{۴}$ تو ثابت کرو کہ اس درتدویر کے چار قرن ہیں اور اس کی مساواتیں ہیں $\text{لا} = ا \text{جم}^۳ \text{طہ} ، \text{ما} = ا \text{جب}^۳ \text{طہ}$

طہ کو ساقط کرنے سے $\text{لا}^{\frac{۲}{۳}} + \text{ما}^{\frac{۲}{۳}} = ا^{\frac{۲}{۳}}$ حاصل ہوتا ہے۔

۲۷۔ اگر $\text{ب} = \frac{ا}{۲}$ تو ثابت کرو کہ خط درتدویر ثابت دائرہ کا قطر بن جاتا ہے

۲۸۔ اگر ب = ا اور مبدا نقطہ و پر ہو تو ثابت کرو کہ برتدویر خط صنوبری $\text{ر} = ۲ ا (۱ - \text{جم طہ})$ بن جاتا ہے۔ یعنی

$$\text{ر جم طہ} = \text{لا} - ا ، \quad \text{ر جب طہ} = \text{ما}$$

۲۹۔ مثال ۲۵ میں رکھو

$$\text{فہ} = \frac{(ا + ۲ \text{ب})}{۲ ا} \pi + \text{فہَ} ، \quad \text{س} = \frac{۴ \text{ب} (ا + ب)}{ا} + \text{سَ}$$

یعنی قوس کو و ن د کے نقطہ وسطی ص (راس) سے ناپنا شروع کرو، اس طرح حاصل ہوگا

$$س' = \frac{۴ب(ا+ب)}{ا} جبا \frac{ا فما}{ا+۲ب}$$

ثابت کرو کہ مساوات س = ل جب ن فما ایک برتدویر کو تعبیر کرے گی اگر ن ایک سے کم ہو اور درتدویر کو اگر ن ایک سے بڑا ہو۔

۳۰۔ اگر ایک منحنی اور اس کے برپیچہ کی متناظر قوسیں س اور ثما ہوں تو

$$ثما = \pm \frac{فر س}{فر فما} + مستقل$$

مثال ۲۹ کے نتیجہ سے ثابت کرو کہ برتدویر کا برپیچہ ایک برتدویر ہے اور درتدویر کا درتدویر ہے۔

۳۱۔ ایک دائرہ کے محیط پر متوازی شعاعیں پڑتی ہیں اور منعکس ہوتی ہیں اور زاویہ انعکاس زاویہ وقوع کے مساوی ہے دائرہ کا نیم قطر ا ہے اور نقطہ وقوع (ا جم طما، ا جب طما) ہے محددوں کا مبدا دائرہ کا مرکز ہے اور محور لا سمت وقوع کے متوازی ہے، ثابت کرو کہ شعاع منعکسہ کی مساوات ہے

$$ما جم ۲طما - لا جب ۲طما + ا جب طما = ۰$$

اور شعاع منعکسہ کا لفاف ذیل کی برتدویر ہے

$$لا = \frac{ا}{۴}(۳ جم طما - جم ۳طما)، ما = \frac{ا}{۴}(۳ جب طما - جب ۳طما)$$

۳۲۔ اگر ایک ذرہ مرکزی مدار ایک ایسی قوت ق کے ماتحت مرتسم کرے جو سمتی نیم قطر کی سمت میں باہر کی طرف عمل کرتی ہو تو مستعملہ ترقیم کے مطابق

$$و^۲ = \frac{ھ^۲}{ع^۲}$$ جہاں و رفتار ہے اور ع عمود کا طول۔

ثابت کرو کہ

$$ق = \frac{فر}{فر ر}\left(\frac{۱}{۲} و^۲\right) = - ھ^۲ ع^۲ \left(\frac{فر^۲ ع}{فر طما^۲} + ع\right) \text{ جہاں } ع = \frac{۱}{ر}$$

یہ مساوات مدار کی تفرقی مساوات ہے۔ اگر ق = ± صہ ع′ تو
ثابت کرو کہ مدار ایک مخروطی ہے جہاں قوت کا مرکز اس کے ایک ماسکہ پر ہے۔
(ملاحظہ ہوں دفعات ۶۰، ۶۱)

لا متناہی سلسلے

۲۸ - لا متناہی سلسلے - لا متناہی سلسلوں کی مکمل بحث کے لئے طالب علم کرسٹل کے جبر و مقابلہ حصۂ دوم کے متعلقہ ابواب کا مطالعہ کرے، انکے متعلق نہایت عمدہ ابتدائی بیان اوسگڈ کی کتاب "لا متناہی سلسلوں کی تمہید" (انٹروڈکشن ٹو انفنٹ سیریز، کمبرج، صوبجات متحدہ امریکہ، ہارورڈ یونیورسٹی) میں ملے گا - یہاں ہم اپنی توجہ صرف اُن مسائل تک محدود رکھینگے جن کو آئندہ اکثر استعمال کرنے کی ضرورت ہوگی -

لا متناہی سلسلہ کی تعریف - فرض کرو کہ ع_1، ع_2، ع_3، ..... مقادیر کی ایک جمعیت ہے جو تعداد میں لا انتہا ہے، اور $\text{ع}_{\text{ن}}$ عدد ن کا ایک وحید القیمت تفاعل ہے، - نیز فرض کرو کہ $\text{س}_{\text{ن}}$ پہلی ن رقموں کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے، تب

$$\text{س}_{\text{ن}} = \text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 + \dots + \text{ع}_{\text{ن}} \qquad \dots\dots\dots (1)$$

اگر ن کو لا انتہا بڑھایا جائے تو سلسلہ (۱) لا متناہی سلسلہ ہو جائیگا۔

اگر ن کے لا انتہا بڑھنے سے مجموعہ $\text{س}_{\text{ن}}$ ایک معین محدود انتہا س کی طرف مائل ہو تو لا متناہی سلسلہ کو مستدق کہتے ہیں اور اس امر کو کئی طرح سے بیان کرتے ہیں، سلسلہ کا مجموعہ س ہے سلسلہ کی قیمت س ہے، سلسلہ قیمت س کی طرف مستدق ہوتا ہے -

مثال ۱ - فرض کرو کہ $\text{س}_{\text{ن}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{\text{ن}-1}}$

یہاں $س_ن = ۲ - \frac{۱}{۲^{ن-۱}}$، نہا $س_ن = ۲ = س$

اگر ن کے لاانتہا بڑھنے سے $س_ن$ کسی معین محدود انتہا کی طرف مائل نہ ہو تو سلسلہ کو غیر مستدق کہتے ہیں۔ اس صورت میں یا تو $س_ن$ تعداداً لاانتہا بڑھے گا اور سلسلہ متسع کہلائے گا یا $س_ن$ کی کوئی معین انتہا نہیں ہوگی اور اس حالت میں سلسلہ کو اہتزازی سلسلہ کہینگے۔

مثال ۲۔ فرض کرو کہ $س_ن = ۱ + ۲ + ۳ + ... + ن$

یہاں $س_ن$ لاانتہا بڑھتا ہے، اس لئے سلسلہ متسع ہے۔

مثال ۳۔ فرض کرو کہ $س_ن = ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ... (-۱)^{ن-۱} \times ۱$

اگر ن جفت ہو تو $س_ن$ صفر ہوتا ہے اور اگر طاق ہو تو ایک۔ اگرچہ اس صورت میں $س_ن$ لامتناہی نہیں ہوتا تاہم اس کی انتہا ایک معین محدود مقدار نہیں ہے، اس لئے سلسلہ اہتزاز کرتا ہے۔

ظاہر ہے کہ اگر $ع_۱$، $ع_۲$، .... سب متحد العلامت ہوں تو سلسلہ اہتزاز نہیں کرسکتا۔

ترقیم لامتناہی سلسلہ کو ہم اس طرح تعبیر کرینگے

$$ع_۱ + ع_۲ + ...، \text{ یا } \sum ع \text{ یا } \sum_{۱}^{\infty} ع_ن$$

ذیل کے مسائل بآسانی ثابت ہوسکتے ہیں۔

مسئلہ ۱۔ اگر $ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + ...$ قیمت س کی طرف استدقاق کرے تو سلسلہ $ج ع_۱ + ج ع_۲ + ج ع_۳ + ...$ ج س کی طرف استدقاق کریگا جہاں ج کوئی محدود مقدار ہے

اس کا ثبوت آسان ہے اور طالب علم کے لئے چھوڑ دیا گیا ہے۔

مسئلہ ۲۔ اگر $ع_۱ + ع_۲ + ...$ مائل بہ س ہو اور $ف_۱ + ف_۲ + ...$ مائل بہ ت تو سلسلہ $(ع_۱ + ف_۱) + (ع_۲ + ف_۲) + ...$ مائل بہ $(س + ت)$ ہوگا

فرض کرو کہ $س_ن = ع_۱ + ع_۲ + \ldots\ldots + ع_ن$

اور $ت_ن = و_۱ + و_۲ + \ldots + و_ن$، تو ن کی تمام قیمتوں کے لئے

$$(ع_۱ + و_۱) + (ع_۲ + و_۲) + \ldots + (ع_ن + و_ن) = س_ن + ت_ن$$

جس سے نتیجہ ثابت ہوتا ہے۔

پہلے مسئلہ سے واضح ہوتا ہے کہ ج اور ح ع کا حاصل ضرب ح ج ع ہے
اور دوسرے سے کہ ح ع اور ح و کا حاصل جمع ح (ع + و) ہے،
ظاہر ہے کہ اصطلاح حاصل جمع کو حاصل تفریق پر بھی مشتمل خیال کیا جا سکتا ہے۔

$س_ن$ کے مرتب کرنے میں یہ مان لیا گیا ہے کہ رقموں کو اسی ترتیب میں جمع کیا گیا ہے جس ترتیب میں یہ سلسلے کے اندر واقع ہوتی ہیں اور یہ ظاہر ہے کہ اگر سلسلہ مستدق ہو تو اسکے لئے قانون اجتماع درست ہوگا یعنی رقموں کو خواہ کسی طرح گروہوں میں تقسیم کیا جائے (جبتک ان کی ترتیب نہ بدلی جائے) سلسلہ کی قیمت میں فرق نہیں آئے گا۔ لیکن اس سے یہ نتیجہ نہیں نکلتا کہ اگر رقموں کو مختلف ترتیب میں لکھنے سے ایک نیا سلسلہ مرتب کیا جائے تو یہ سلسلہ بھی اسی قیمت کی طرف مستدق ہوگا جس کی طرف اصلی سلسلہ مستدق ہوتا ہے (ملاحظہ ہو دفعہ ۴۱)۔

جملات "عددی قیمت" یا "مطلق قیمت" کے لئے ہم یہ ترقیم اختیار کرتے ہیں۔
$|ا|$ سے مراد ہے ا کی عددی یا مطلق قیمت۔ مثلاً

$$|۲| = ۲، \quad |-۲| = ۲، \quad |-۱۰ + ۶| = ۴$$

ذیل کے بیانات بآسانی ثابت ہو سکتے ہیں۔

$$|ا + ب + ج + \ldots| \leqq |ا| + |ب| + |ج| + \ldots\ldots$$

تساوی صرف اسی صورت میں درست ہوگی جبکہ ا، ب، ج، ..... سب کے سب ایک ہی علامت رکھتے ہوں۔

(۲) اگر ج مثبت ہو تو لاتساوی $|ا - ب| < ج$
ذیل کی کسی ایک لاتساوی کے مترادف ہے۔

ا + ج > ب ، ا - ج < ب + ج ، ا > ب - ج

٣٩ - انتہا کا وجود کسی تفاعل کا تعین ایک لامتناہی سلسلہ سے ہوسکتا ہے بشرطیکہ سلسلہ مستدق ہو، مثلاً لامتناہی سلسلہ

ا + ا لا + ا لا^{٢} + ...

قیمت $\frac{\text{ا}}{\text{ا} - \text{لا}}$ کی طرف مستدق ہوتا ہے جب تک کہ لا تعداداً ایک سے کم رہے۔ اس صورت میں ہم کہ سکتے ہیں کہ اگر -ا < لا < ا تو تفاعل $\frac{\text{ا}}{\text{ا} - \text{لا}}$ اس لامتناہی سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے یا سلسلہ تفاعل کا تعین کرتا ہے۔ اگر لا ایک سے بڑا ہو تو سلسلہ متسع ہوتا ہے اور یہ تفاعل $\frac{\text{ا}}{\text{ا} - \text{لا}}$ کو مطلق تعبیر نہیں کرسکتا۔ عملی نقطہ نظر سے صرف مستدق سلسلے زیادہ تر کارآمد ہوتے ہیں، سوائے بعض قیود کے اُن پر اسی آسانی سے ریاضی اعمال صادر ہوسکتے ہیں جو محدود رقموں والے جملات پر، غیر مستدق سلسلے صرف خاص خاص حالات کے ماتحت استعمال میں آتے ہیں۔

جب ایک سلسلہ دیا گیا ہو تو سلسلہ ہندسیہ کی طرح اُس عدد کی فوراً تخصیص کرلینا جو س$_{\text{ن}}$ کی انتہا ہو ایسا آسان نہیں ہوتا، پس اس امر کی تحقیق کے لئے کہ کسی خاص صورت میں سلسلہ کی انتہا ہے بھی یا نہیں کسی جانچ کا قائم کرنا ضروری ہے۔ اس غرض سے ہم ذیل کے تین مسائل بیان کرتے ہیں جو علاوہ ازیں سلسلوں کے استدقاق کے متعلق چند سادہ آزمائشی اصولوں کے منضبط کرنے میں کارآمد ہوں گے۔ ہم مان لیتے ہیں کہ متغیر س$_{\text{ن}}$، ن کا ایک قیمت والا تفاعل ہے، اس میں ن کو لاانتہا بڑھانا پڑے گا۔ چونکہ تمام انتہاؤں میں ن ← ∞، اس لئے عمل میں ہم لاحقہ ن ← ∞ کو حذف کردینگے۔

مسئلہ ا - اگر س$_{\text{ن}}$، ن کا ایک ایسا تفاعل ہو جو (ا) ن کے بڑھنے سے

ہمیشہ بڑھے لیکن (۲) ایک محدود مقدار ا سے ہمیشہ کم رہے تو ن کے لاانتہا بڑھنے سے یہ ایک خاص انتہا کی طرف مستدق ہوگا جو ا سے کم یا ا کے مساوی ہوگی۔

مسئلہ ۲۔ اگر $س_{ن}$، ن کا ایک ایسا تفاعل ہو جو (۱) ن کے بڑھنے سے ہمیشہ گھٹے لیکن (۲) ایک خاص مقدار ب سے ہمیشہ بڑا رہے تو ن کے لاانتہا بڑھنے سے یہ ایک خاص مقدار کی طرف مستدق ہوگا جو ب سے زیادہ یا ب کے مساوی ہوگی۔

مسئلہ ۳۔ اس امر کے لئے ضروری اور کافی شرط کہ ن کے لاانتہا بڑھنے سے $س_{ن}$ ایک معین انتہا کی طرف مائل ہو یہ ہے کہ ن کے لاانتہا بڑھنے سے $(س_{ن+ف} - س_{ن})$ کی انتہا ف کی ہر ایک قیمت کے لئے صفر ہو۔ دوسرے الفاظ میں فرض کرو کہ صہ کوئی اختیاری چھوٹی مثبت مقدار ہے۔ اگر ن کی ایسی قیمت مثلاً ن = م معلوم ہو سکے کہ جب ن $\geq$ م تو فرق $(س_{ن+ف} - س_{ن})$ تعداداً کم ہو صہ سے ف کی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لئے تو $س_{ن}$ کے استدقاق کے لئے یہ شرط ضروری اور کافی ہوگی۔

ہم ان مسئلوں کے یہاں ثبوت نہیں دینگے، مسئلہ ۱ اور ۲ بطور مشق کے اس سے قبل (مشق، سوال ۱۴، ۱۵ حصۂ اول میں) دئے گئے ہیں اور جو ہندسی توضیح ان کی یہاں دی گئی ہے اس کی بنا پر ہم ان کی صداقت کو ماننے کے مجاز ہیں۔ مسئلہ ۳ کے متعلق ہم بآسانی دیکھ سکتے ہیں کہ اوپر کی شرط ضروری ہے۔ کیونکہ اگر $س_{ن}$ کی معین انتہا س ہو تو

$$(س_{ن+ف} - س_{ن}) = (س_{ن+ف} - س) + (س - س_{ن})$$

اسلئے $نہا\,(س_{ن+ف} - س_{ن}) = نہا\,(س_{ن+ف} - س) + نہا\,(س - س_{ن}) =$

یہ ثابت کرنے کے لئے کہ یہ شرط کافی ہے محور لا پر نقطے $ا_۱$، $ا_۲$، $ا_۳$، $ا_۴$ ......
لو جن کے فصلے بالترتیب $س_۱$، $س_۲$، $س_۳$، $س_۴$ ...... ہیں۔ اس صورت میں
$ا_{ن+۱}$، $ا_ن$ کے دائیں بائیں کسی جانب واقع ہو سکتا ہے کیونکہ ن کے بڑھنے
سے $س_ن$ لازمی طور پر نہ ہمیشہ بڑھتا ہے اور نہ ہمیشہ گھٹتا ہے۔ لیکن حسب
مفروض اگر ن $\geqq$ م تو

$$|س_{ن+ف} - س_ن| < صہ، \text{ یعنی } س_م - صہ < س_{م+ف} < س_م + صہ$$

اگر ط، ق وہ نقطے ہوں جنکے فصلے $س_م - صہ$ اور $س_م + صہ$
ہیں تو حصے ط ق کا طول ۲ صہ ہوگا اور ہر ایسا نقطہ $ا_ن$ جس کی صورت
میں ن بڑا ہے م سے اس حصہ کے اندر واقع ہوگا۔ صہ کو بتدریج چھوٹی
اور چھوٹی قیمتیں دینے سے یہ حصے بتدریج کم ہوتی جائینگے $ط′ق′$، $ط″ق″$
$ط‴ق‴$ ...... جن میں سے ہر ایک حصہ پہلے کے اندر واقع ہوتا ہے
نقاط $ط′$، $ط″$، $ط‴$ ...... دائیں جانب حرکت کرتے ہیں اور $ق′$
$ق″$، $ق‴$ ...... بائیں جانب۔ مسئلہ (۱) کی رو سے $ط′$، $ط″$، $ط‴$ ......
ایک محدود انتہا کی طرف مائل ہوتے ہیں اور مسئلہ (۲) کی رو سے $ق′$، $ق″$
...... بھی ایک محدود انتہا کی طرف مائل ہوتے ہیں۔ نیز چونکہ صہ کو ہم اتنا
چھوٹا مان سکتے ہیں جتنا چاہیں اس لئے یہ دونوں انتہائیں (فرض کرو کہ نقطہ
ل پر منطبق ہوتی ہیں۔ پس معلوم ہوا کہ نقاط $ا_ن$ کی انتہا ل کی طرف مائل
ہوتی ہے اور ل کا فصلہ س، $س_ن$ کی انتہا ہے۔

مشق۔ حصہ اول کے سوالات ۱۶ اور ۱۷ سے مسئلہ (۱) کی توضیح ہوتی ہے۔ مسئلہ
(۳) کی توضیح کے لئے فرض کرو کہ

$$س_ن = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \dots\dots + (-۱)^{ن-۱}\frac{۱}{ن}$$

یہاں $س_{ن+ف} - س_ن = \pm\left(\frac{۱}{ن+۱} - \frac{۱}{ن+۲} + \dots \pm \frac{۱}{ن+ف}\right)$

اور $\frac{1}{ن+1} - \frac{1}{ن+2} + \dots \pm \frac{1}{ن+ف} = \frac{1}{ن+1} - \left(\frac{1}{ن+2} - \frac{1}{ن+3}\right) - \dots$

$< \frac{1}{ن+1}$ کیونکہ ہر خطوط وحدانی کے اندر کا جملہ مثبت ہے۔

اگر ف جفت ہو تو آخری خطوط وحدانی میں صرف ایک رقم ہوگی $\frac{1}{ن+ف}$۔

نیز $\frac{1}{ن+1} + \frac{1}{ن+2} + \frac{1}{ن+3} + \dots \pm \frac{1}{ن+ف} = \left(\frac{1}{ن+1} - \frac{1}{ن+2}\right)$

$+ \left(\frac{1}{ن+3} - \frac{1}{ن+4}\right) + \dots$

بائیں طرف کا جملہ مثبت ہے۔ اسلئے $|س_{ن+ف} - س_ن|$ صفر اور $\frac{1}{ن+1}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ اسلئے $س_{ن+ف} - س_ن$ کی انتہا صفر ہے اور $س_ن$ ایک معین انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے۔ بعد میں ہم دیکھینگے کہ یہ انتہا لوک ۲ ہے (دفعہ ۴۴ (۵))۔ پس

$$لوک\ 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots$$

ظاہر ہے کہ اگر $س_ن$ کی بجائے کوئی لا کا مسلسل تفاعل ف (لا) ہو تو بھی یہ تینوں مسئلے (۱)، (۲)، (۳) اسکی صورت میں درست رہینگے۔
اگر لا ایک محدود انتہا $لا_1$ کیطرف مائل ہوتا ہو تو ہم لا کی بجائے $لا_1 \pm \frac{1}{ن}$ رکھ سکتے ہیں، اس طرح ن کے لا انتہا بڑھنے سے لا کی انتہا $لا_1$ ہوگی۔ اگر لا مائل بہ $-\infty$ ہوتا ہو تو ہم لا کی بجائے -ن رکھ سکتے ہیں۔

۴۰- استدقاق پرکھنے کے طریقے۔ اگر لامتناہی سلسلے مج ع کا

مجموعہ س سے تعبیر کیا جائے اور اس کی ن رقموں کا $س_ن$ سے تو فرق س - $س_ن$ کو باقی کہتے ہیں ن رقموں کے بعد۔
اگر اس باقی کو $ب_ن$ لکھیں تو

$$س = س_ن + ب_ن$$

صریحاً $ب_ن$ خود ایک لامتناہی سلسلہ ہے $ع_{ن+۱} + ع_{ن+۲} + ع_{ن+۳} + \dots$
اور $ب_ن$ کی انتہا صفر ہے۔ اگر سلسلہ ایسا ہو کہ | $ب_ن$ | چھوٹا ہو جبکہ ن چھوٹا ہو تو سلسلہ سرعت سے مستدق ہوتا ہے کیونکہ سلسلہ کی صرف چند رقمیں لینے سے س کی قیمت کا اچھا اندازہ لگ سکتا ہے۔ سلسلوں کی قیمتوں کے محسوب کرنے میں استدقاق کی سرعت خاص اہمیت رکھتی ہے۔ لیکن یاد رہے کہ ایک سلسلہ مستدق ہی کہلائے گا خواہ اسکی قیمت کا معمولی اندازہ لگانے میں دس لاکھ رقموں کی ضرورت ہو۔

بنیادی پرکھ یا جانچ۔ فرض کرو کہ $_فب_ن$ ، $س_{ن+ف} - س_ن$ کو تعبیر کرتا ہے یعنی

$$_فب_ن = ع_{ن+۱} + ع_{ن+۲} + ع_{ن+۳} + \dots + ع_{ن+ف}$$

تب $_فب_ن$ کو ن رقموں کے بعد جزوی باقی کہینگے۔ دفعہ ۳۹ مسئلہ ۳ کی رُو سے اس امر کے لئے ضروری اور کافی شرط کہ $\sum ع$ مستدق ہو یہ ہے کہ $_فب_ن$ کی انتہا ف کی ہر قیمت کے لئے صفر ہو۔

اگر ف = ۱ تو $_فب_ن = ع_{ن+۱}$ ، اس لئے استدقاق کی ایک ضروری شرط یہ ہے کہ $ع_{ن+۱}$ یا (جو وہی بات ہے کہ) $ع_ن$ مائل بہ صفر ہو، مگر ہم آگے دیکھینگے (مثال ۱) کہ یہ شرط کافی نہیں ہے۔

اس جانچ کو آسانی سے استعمال نہیں کیا جا سکتا، اس لئے ہم ایک دو اور جانچ کے طریقے حاصل کرتے ہیں جو آسانی استعمال میں آسکیں۔

مقابلہ کی جانچ۔ فرض کرو کہ $ع_{۱} + ع_{۲} + ...$ مثبت رقموں کا ایک سلسلہ ہے۔ اگر اس سلسلہ کی ہر ایک رقم، ایک اور مثبت رقموں والے مستدق سلسلہ $ا_{۱} + ا_{۲} + ا_{۳} + ...$ کی متناظر رقم سے کم ہو یا مساوی ہو تو سلسلہ $ع_{۱} + ع_{۲} + ع_{۳} + ...$ بھی مستدق ہوگا لیکن اگر اس سلسلہ کی ہر ایک رقم مثبت رقموں والے ایک منتشع سلسلہ $ب_{۱} + ب_{۲} + ...$ کی متناظر رقم کے مساوی ہو یا اس سے بڑی ہو تو سلسلہ $ع_{۱} + ع_{۲} + ...$ بھی منتشع ہوگا۔

فرض کرو کہ $س_{ن} = \sum_{۱}^{ن} ع$ ، $ص_{ن} = \sum_{۱}^{ن} ا$ ، $ص = \text{نہا}\, ص_{ن}$

تب $س_{ن} \leqq ص_{ن}$ ، $ص_{ن} < ص$ کیونکہ سلسلہ $ا_{۱} + ا_{۲} + ...$ کی سب رقمیں مثبت ہیں، اس لئے $س_{ن}$، جو ن کے بڑھنے سے بڑھتا ہے ہمیشہ ص سے کم رہتا ہے یعنی $س_{ن}$ ایک ایسی انتہا س کی طرف مستدق ہوتا ہے جو ص سے کم ہے یا اس کے مساوی ہے [دفعہ ۲۹ مسئلہ ۱]
انتشاع کی صورت میں ثبوت طالب علم خود مہیا کرے۔

نوٹ۔ یہاں ایک بات قابل توجہ ہے کہ استدقاق کے لئے کسی سلسلہ کی جانچ کرنے میں اگر ہم ضرورت خیال کریں تو رقموں کی کسی محدود تعداد سے قطع نظر کرسکتے ہیں، ان رقموں کا اخراج صرف انتہا کی قیمت پر اثر رکھیگا لیکن انتہا کے وجود پر اس کا کوئی اثر نہیں ہوگا۔

مثال ۱۔ سلسلہ $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + ...$ کو موسیقی سلسلہ کہتے ہیں، ثابت کرو کہ یہ منتشع ہے باوجود اس کے کہ $ع_{ن} =$
تیسری رقم سے شروع ہو کر سلسلہ وار ۲ رقمیں، پھر ۴ یا $۲^{۲}$ رقمیں، پھر ۸ یا $۲^{۳}$ رقمیں وغیرہ لو۔

اب $\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ یا $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > \frac{4}{8}$ یا $\frac{1}{2}$

اور اسی طرح۔

پس $2^{م}$ رقموں تک مجموعہ بڑا ہے ذیل کے سلسلہ سے

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots\dots\right) \text{ م رقموں تک}$$

یعنی بڑا ہے $1+\frac{م}{2}$ سے۔ اسلئے ن کو ہم اتنا بڑا لے سکتے ہیں کہ سن کسی بڑے سے بڑے مفروضہ عدد سے بڑا ہو یعنی سلسلہ متسع ہے۔

مثال ۲۔ سلسلہ $1+\frac{1}{2^{عا}}+\frac{1}{3^{عا}}+\frac{1}{4^{عا}}+\dots\dots$ مستدق ہوگا اگر $عا > 1$ اور متسع ہوگا اگر $عا \leqq 1$

(۱) $عا > 1$ دوسری رقم سے شروع ہو کر رقموں کو اکھٹا کرو جیسے مثال ایک

$$\frac{1}{2^{عا}}+\frac{1}{3^{عا}} < \frac{1}{2^{عا}}+\frac{1}{2^{عا}} \text{ یا } \frac{1}{2^{عا-1}}$$

$$\frac{1}{4^{عا}}+\frac{1}{5^{عا}}+\frac{1}{6^{عا}}+\frac{1}{7^{عا}} < \frac{4}{4^{عا}} \text{ یا } \left(\frac{1}{2^{عا-1}}\right)^2$$

وغیرہ وغیرہ

پس مجوزہ سلسلہ ذیل کے سلسلہ سے کم ہے

$$1+\frac{1}{2^{عا-1}}+\left(\frac{1}{2^{عا-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{عا-1}}\right)^3+\dots\dots$$

جو ایک سلسلہ ہندسیہ ہے جسکی نسبت مشترک ایک سے کم ہے۔ اس لئے یہ مستدق ہے۔ مجوزہ سلسلہ بھی اس لئے مستدق ہے۔

(۲) $عا \leqq 1$ صورت $عا = 1$ پر مثال (۱) میں بحث کی گئی ہے۔

جب $عا < 1$ تو سلسلہ کی رقمیں موسیقی سلسلہ کی متناظر رقموں سے بڑی ہوتی ہیں۔ اس لئے اس صورت میں سلسلہ متسع ہے۔

جانچ کی نسبت۔ فرض کرو کہ $ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \dots\dots$ مثبت رقموں کا ایک سلسلہ ہے اور ن ← ∞ کے لئے $\frac{ع_{ن+۱}}{ع_ن}$ کی انتہا ک ہے یہ سلسلہ مستدق ہوگا اگر ک < ۱ اور متسع ہوگا اگر ک > ۱، اگر ک = ۱ تو یہ جانچ استدقاق پرکھنے میں کارگر نہیں ہوگی۔

(۱) ک < ۱، انتہا کی تعریف کے بموجب ہم ن کو اسقدر بڑا لے سکتے ہیں (مثلاً ن = م) کہ جب، ن ≧ م تو نسبت $\frac{ع_{ن+۱}}{ع_ن}$ اور ک کا فرق اسقدر کم ہو جسقدر ہم چاہیں گویا یہ نسبت اس منزل کے بعد ایک کسر واجب ر سے کم ہو۔

اگر م کا اس طرح انتخاب کیا جائے کہ

تو $ع_{م+۱} < ع_م ر$، $ع_{م+۲} < ع_{م+۱} ر < ع_م ر^۲$، $ع_{م+۳} < ع_م ر^۳$

وغیرہ، اسلئے رقم $ع_م$ کے بعد سلسلہ کی ہر ایک رقم ذیل کے سلسلہ ہندسیہ کی متناظر رقم سے کم ہوگی

$$ع_م ر + ع_م ر^۲ + ع_م ر^۳ + \dots\dots\dots$$

چونکہ ر < ۱، اس لئے مجوزہ سلسلہ مستدق ہے۔

(۲) ک > ۱، حسب بالا ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ سلسلہ متسع ہوگا جبکہ ک > ۱

نتیجہ صریح۔ دئے ہوئے سلسلہ کی باقی $ب_م$ کم ہے ذیل کے سلسلہ سے

$ع_م ر + ع_م ر^۲ + \dots\dots$ یعنی $ع_م ر/(۱ - ر)$ سے۔

مثال ۳۔ $۱ + لا + \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۳}{۳} + \dots\dots\dots$ (لا مثبت)

$$\frac{ع_{ن+۱}}{ع_ن} = \frac{لا^ن}{ن} \div \frac{لا^{ن-۱}}{ن-۱}$$

$$= \frac{ن-۱}{ن} لا$$

$$ک = لا$$

اس لئے سلسلہ مستدق ہوگا اگر $لا < ۱$ اور منتشر ہوگا اگر $لا > ۱$
اگر $لا = ۱$ تو یہ موسیقی سلسلہ ہے اور منتشر ہے۔

مثال ۴ - $۱ + لا + \frac{لا^۲}{\lfloor ۲} + \frac{لا^۳}{\lfloor ۳} + \ldots\ldots$ (لا مثبت)

$$\frac{ع_{ن+۱}}{ع_ن} = \frac{لا}{ن}، \quad ک = ۰$$

اس لئے یہ سلسلہ (قوت نمائی سلسلہ، دفعہ ۹۴ حصہ اول) لا کی ہر مثبت قیمت کے لئے مستدق ہے۔ ابھی ہم دیکھینگے کہ یہ لا کی ہر مثبت یا منفی قیمت کے لئے مستدق ہے۔

۴۱ - استدقاق مطلق، قوتی سلسلے

مسئلہ ۱ - اگر کسی سلسلہ میں ہر دو مثبت اور منفی رقمیں موجود ہوں اور یہ مستدق ہو جبکہ تمام منفی رقموں کی علامت بدل دیجائے تو یہ اپنی اصلی حالت میں بھی مستدق ہوگا۔

یہ ظاہر ہے کیونکہ منفی علامتوں کو بحال کرنے سے $|س_ن|$ اور $|ب_ن|$ دونوں مقدار میں کم ہونگے۔

تعریف ۱ - اگر کسی سلسلہ میں مثبت، منفی رقمیں دونوں طرح کی موجود ہوں اور اس کی منفی رقموں کو مثبت بنانے سے جو سلسلہ بنے وہ مستدق ہو تو اصطلاحاً اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ اصلی سلسلہ مطلق طور پر یا بلا قید مستدق ہے۔

یعنی $ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + ع_۴ + \ldots\ldots$ مطلق طور پر مستدق ہوگا اگر $|ع_۱| + |ع_۲| + |ع_۳| + \ldots$

مستدق ہو۔ کسی اور طرح کے مستدق سلسلے کو نیم مستدق یا مستدق بالشرط کہینگے۔
مسئلہ ا کا عکس درست نہیں، سلسلہ $ع_1 + ع_2 + ع_3 + \ldots$ مستدق ہو سکتا ہے
اور $|ع_1| + |ع_2| + |ع_3| + \ldots$ منتسع (ملاحظہ ہو مثال ا)

نتیجہ صریح۔ ایک سلسلہ مطلق طور پر مستدق ہوگا اگر $\frac{ع_{ن+1}}{ع_ن}$ کی انتہا **تعداداً** ایک کسر واجب کے مساوی ہو۔

مطلق طور پر مستدق سلسلے خاص اہمیت رکھتے ہیں، رقموں کی ترتیب کے بدلنے سے مجموعہ پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔ مستدق بالشرط سلسلہ کی رقموں کو اسی طرح پر ترتیب دینا ممکن ہے کہ نیا سلسلہ جو پیدا ہو وہ مستدق ہو لیکن کسی اور انتہا کی طرف استدقاق کرے یا یہاں تک کہ منتسع ہو جائے۔ الفاظ "بالشرط" اور "بلا شرط" کی یہی وجہ تسمیہ ہے۔ [ملاحظہ ہو جبر و مقابلہ کرسٹل حصہ دوم باب ۲۶ دفعہ ۱۳]

مسئلہ ۲۔ اگر مقادیر $ع_1$، $ع_2$، $ع_3$، ..... سب مثبت ہوں اور ان میں سے ہر ایک اپنی رقم ماقبل سے کم ہو (یا اس کے مساوی ہو) نیز اگر $ع_ن$ کی انتہا صفر ہو تو سلسلہ

$$ع_1 - ع_2 + ع_3 - ع_4 + \ldots + (-1)^{ن-1} ع_ن + \ldots\ldots$$

مستدق ہوگا۔ اس سلسلہ کو متبادل سلسلہ کہا جا سکتا ہے۔
رقموں کی جفت تعداد کا مجموعہ ہم ذیل کی دو صورتوں میں لکھ سکتے ہیں۔

$$س_{2ن} = (ع_1 - ع_2) + (ع_3 - ع_4) + \ldots + (ع_{2ن-1} - ع_{2ن})$$

$$= ع_1 - (ع_2 - ع_3) - (ع_4 - ع_5) - \ldots\ldots - ع_{2ن}$$

پہلی صورت سے ظاہر ہے کہ $س_{2ن}$ مثبت ہے اور ن کے بڑھنے سے بڑھتا ہے
دوسری صورت سے ظاہر ہے کہ $س_{2ن}$، $ع_1$ سے کم ہے کیونکہ ہر فرق مثبت ہے

اس لئے $س_{۲ن}$ ایک انتہا (مثلاً س) کی طرف مستدق ہوتا ہے۔

نیز $س_{۲ن+۱} = س_{۲ن} + ع_{۲ن+۱}$، اب چونکہ نہا $ع_{۲ن+۱}$ صفر ہے،

اس لئے $س_{۲ن+۱}$ اور $س_{۲ن}$ کی ایک ہی انتہا ہے، اس لئے سلسلہ مستدق ہے۔

نتیجہ صریح $|ب_ن|$ کم ہے $ع_{ن+۱}$ سے۔

مثال ۱۔ $۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \ldots\ldots$

سلسلہ تمام شرائط کو پورا کرتا ہے، اس لئے مستدق ہے جیسا کہ اس سے قبل (دفعہ ۳۹) میں بتایا گیا۔ لیکن سلسلہ

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \ldots\ldots$$ متسع ہے۔

مسئلہ ۲۔ اگر سلسلہ $ع_۱ + ع_۲ + \ldots\ldots$ مطلق طور پر مستدق ہو اور

$و_۱$، $و_۲$، $و_۳$ ...... میں سے ہر ایک مقدار ایک محدود مقدار ج سے کم ہو تو سلسلہ $ع_۱ و_۱ + ع_۲ و_۲ + ع_۳ و_۳ + \ldots\ldots$ مطلق طور پر مستدق ہوگا۔

سلسلہ $|ع_۱ و_۱| + |ع_۲ و_۲| + \ldots\ldots$ کی رقمیں ذیل کے سلسلہ کی متناظر رقموں سے کم ہیں

$$|ع_۱|ج + |ع_۲|ج + \ldots\ldots \text{ یا } ج\{|ع_۱| + |ع_۲| + \ldots\}$$

اس لئے $|ع_۱ و_۱| + |ع_۲ و_۲| + \ldots\ldots$ مستدق ہے اور اسلئے $ع_۱ و_۱ + ع_۲ و_۲ + \ldots\ldots$ مطلق طور پر مستدق ہے۔

مثال ۲۔ $\frac{جب\,۱}{۱} - \frac{جب\,۲ا}{۲^۲} + \frac{جب\,۳ا}{۳^۲} - \frac{جب\,۴ا}{۴^۲} + \ldots\ldots$

سلسلہ $\frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} - \frac{۱}{۴^۲} + \ldots\ldots$ مطلق طور پر مستدق ہے اور

کوئی جیب ایک سے بڑی نہیں ہوسکتی۔ اس لئے لا کی سب قیمتوں کے لئے سلسلہ مطلق طور پر مستدق ہے۔

تعریف ۲ ۔ لا کی صعودی صحیح قوتوں میں ذیل کی شکل کے سلسلہ کو

$$ا + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + \ldots\ldots + ا_ن لا^ن + \ldots\ldots \quad (ع ۰)$$

جہاں سر مستقل ہیں ہم لا کا قوتی سلسلہ کہینگے، زیادہ تر قوتی سلسلے ہی بحث میں آتے ہیں۔ ذیل کے مسائل ضروری ہیں۔

مسئلہ ۴۔ اگر $\frac{ا_{ن+۱}}{ا_ن}$ کی انتہا تعداداً $\frac{۱}{ر}$ ہو، تو قوتی سلسلہ (ع) مطلق طور پر مستدق ہوگا جبکہ لا تعداداً ر سے کم ہو اور متسع ہوگا جبکہ لا تعداداً ر سے بڑا ہو، نیز اس صورت میں جبکہ لا، ر کے مساوی ہو تو یہ جانچ کارگر نہیں ہوتی، سلسلہ مستدق ہوسکتا ہے یا متسع۔

پہلی رقم ا سے قطع نظر کرکے

$$\frac{ع_{ن+۱}}{ع_ن} = \frac{ا_{ن+۱}}{ا_ن} \; لا \; (تعداداً)$$

$$\text{نہا} \; \frac{ع_{ن+۱}}{ع_ن} = لا \; \text{نہا} \; \frac{ا_{ن+۱}}{ا_ن} = \frac{لا}{ر}$$

مسئلہ ا نتیجہ صریح کی رو سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

ذیل کا مسئلہ زیادہ عام ہے۔

مسئلہ ۵۔ اگر سلسلہ (ع) میں لا کی بجائے ر لکھا جائے اور اس طرح جو سلسلہ حاصل ہو اس کی کوئی رقم بھی ایک محدود مقدار ج سے بڑی نہ ہو تو سلسلہ (ع) مطلق طور پر مستدق ہوگا جب تک کہ لا تعداداً ر سے کم رہے۔

سلسلہ (ع) کو اس شکل میں

$$ا + ا_۱ ر \left(\frac{لا}{ر}\right) + ا_۲ ر^۲ \left(\frac{لا}{ر}\right)^۲ + \ldots\ldots$$

میں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اس کی رقمیں ذیل کے ہندسی سلسلہ کی متناظر رقموں سے بڑی ہیں

$$ج + ج\left(\frac{لا}{ر}\right) + ج\left(\frac{لا}{ر}\right)^{۲} + \cdots\cdots$$

اس لئے سلسلہ مطلق طور پر مستدق ہے جبتک کہ $\frac{لا}{ر}$ تعداداً ایک سے کم ہو۔ اُس صورت میں جبکہ لا = ر سلسلہ مستدق ہوسکتا ہے یا متسع، لیکن اگر یہ مستدق ہو تو سلسلہ کی ہر ایک رقم جبکہ لا = ر محدود ہوگی اور سلسلہ مطلق طور پر مستدق ہوگا جبکہ لا، ر سے تعداداً کم ہو۔

استدقاق کا وقفہ۔ جب ایک سلسلہ جسکی رقمیں لا کے تفاعل ہوں مستدق ہو جبکہ ا < لا < ب تو ہم اسے یوں بیان کرسکتے ہیں کہ سلسلہ وقفہ (ا، ب) کے اندر مستدق ہے، جب سلسلہ لا کی قیمتوں ا < لا < ب کے لئے مستدق ہو اور متسع ہو لا < ا اور لا > ب کے لئے تو (ا، ب) کو استدقاق کا وقفہ کہتے ہیں۔

مثال ۳۔ سلسلہ $لا - \frac{لا^{۲}}{۲} + \frac{لا^{۳}}{۳} - \frac{لا^{۴}}{۴} + \cdots\cdots$

مستدق ہے (شرطاً) جبکہ لا = ۱، اسلئے مطلق طور پر مستدق ہے جبکہ -۱ < لا < ۱، یہ متسع ہے جبکہ لا = -۱ اور جبکہ |لا| > ۱

مثال ۴۔ سلسلہ $لا - \frac{لا^{۲}}{۲^{۲}} + \frac{لا^{۳}}{۳^{۲}} - \frac{لا^{۴}}{۴^{۲}} + \cdots\cdots$

مطلق طور پر مستدق ہے جبکہ -۱ ≦ لا ≦ ۱، متسع ہے جبکہ |لا| > ۱۔ دونوں سلسلوں کے لئے (-۱، ۱) استدقاق کا وقفہ ہے۔

۴۲۔ یکساں استدقاق۔ جب ایک سلسلہ کی رقمیں لا کے تفاعل ہوں اور سلسلہ ایک وقفہ کے اندر مستدق ہو تو وقفہ میں کی کسی ایک معلومہ قیمت لا کے لئے ن کو اس طور پر منتخب کرنا ممکن ہوگا کہ باقی حـن ایک دی ہوئی مقدار

کم ہو لیکن لا کی مختلف قیمتوں کے لئے بالعموم ن کی مختلف قیمتیں ہونگی جو باقی کو دی ہوئی مقدار سے کم بنائینگی۔ اسلئے

تعریف۔ ایک سلسلہ جسکی رقمیں لا کے تفاعل ہوں ایک وقفہ کے اندر یکساں طور پر مستدق کہلاتا ہے اگر ن کو اس طور پر منتخب کرنا ممکن ہو مثلاً ن = م کہ ن کی ہر ایسی قیمت کے لئے جو م کے مساوی یا اس سے بڑی ہو اور لا کی

ہر ایسی قیمت کے لئے جو وقفہ مل کو رہ کے اندر واقع ہو باقی ب ایک دی ہوئی مثبت مقدار صہ سے کم رہے۔

متغیر کو پیش نظر رکھنے کے لئے ہم یہ ترقیم اختیار کرینگے

ع~ن~ (لا)، س~ن~ (لا)، ب~ن~ (لا)، س (لا)

مسئلہ ۱۔ اگر ایک سلسلہ ع~۱~ (لا) + ع~۲~ (لا) + ... یکساں طور پر مستدق ہو جبکہ ا ≦ لا ≦ ب اور اگر اسی وقفہ کے اندر سلسلہ کی ہر رقم لا کا مسلسل تفاعل ہو تو مجموعہ س (لا) بھی اس وقفہ میں مسلسل تفاعل ہوگا۔

فرض کرو کہ سعت کے اندر متغیر کی دو قیمتیں لا اور لا~۱~ ہیں، ہمیں ثابت کرنا ہے کہ اگر صہ مقرر کرلیا جائے تو لا~۱~ کو لا کے اسقدر قریب لینا ممکن ہے کہ

|س (لا~۱~) - س (لا)| صہ سے کم ہو۔ معمولی ترقیم کے مطابق

س (لا~۱~) - س (لا) = س~ن~ (لا~۱~) - س~ن~ (لا) + ب~ن~ (لا~۱~) - ب~ن~ (لا)

اور اسلئے |س (لا~۱~) - س (لا)| ≦ |س~ن~ (لا~۱~) - س~ن~ (لا)| + |ب~ن~ (لا~۱~)| + |ب~ن~ (لا)|

اولاً چونکہ سلسلہ یکساں طور پر مستدق ہے ہم م کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ اس صورت میں جبکہ ن ≦ م، دونوں ب~ن~ (لا~۱~) اور ب~ن~ (لا)، صہ/۳ سے کم ہوں۔ فرض کرو کہ م کو اس طرح پر منتخب کرلیا گیا ہے۔

دوسرے س~م~ (لا) مسلسل تفاعلوں کی محدود تعداد کا مجموعہ ہے، اسلئے ہم

لا، کو لا کے اتنا قریب لا سکتے ہیں کہ | سم (لا،) - سم (لا) | ، صہ/۳ سے کم ہو۔

ان دو نتائج کو ملانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ہم لا، کو لا کے اتنا قریب لا سکتے ہیں کہ | س (لا،) - س (لا) | ، صہ/۳ کے تین گنا یعنی صہ سے کم ہو۔

پس مسئلہ اُس صورت میں ثابت ہوا جبکہ لا وقفہ کے اندر واقع ہو۔ اگر لا = ا یا ب تو ثبوت میں تھوڑی ترمیم کی ضرورت ہوگی۔ اس کو طالب علم کے لئے چھوڑا گیا ہے۔

مسئلہ ۲۔ قوتی سلسلہ ا۰ + ا۱ لا + ا۲ لا² + ... اپنے وقفہ استدقاق (- ر، ر) کے اندر ایک مسلسل تفاعل ہوتا ہے۔ لیکن ایسا ممکن ہے کہ وقفہ کے سرے پر یہ غیر مسلسل ہو جائے۔

ہم ثابت کرینگے کہ اگر - ر < ا ≦ لا ≦ ب < ر تو سلسلہ یکساں طور پر مستدق ہوگا، اسکے بعد نتیجہ مطلوبہ مسئلہ (۱) سے حاصل ہو جائیگا۔

عدد د ایسا لو جو ر سے کم ہو لیکن | ا | یا | ب | دونوں سے بڑا ہو، تب دفعہ ۴۱ مسئلہ ۵ کی رُو سے سلسلہ مطلق طور پر مستدق ہوگا جبکہ لا = د، نیز اگر ا ≦ لا ≦ ب

اںلاⁿ = اں دⁿ (لا/د)ⁿ، | اں لاⁿ | < | اں دⁿ |

اس لئے جںِ (لا) < | اں دⁿ | + | اں+۱ دⁿ⁺¹ | + ...

لیکن سلسلہ ا۰ + ا۱ د + ا۲ د² + ... مطلق طور پر مستدق ہے، ہم م کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ

جب، ن ≧ م تو باقی | اں دⁿ | + | اں+۱ دⁿ⁺¹ | + ...

صہ سے کم ہو یعنی اس م کے لئے باقی جںِ (لا)، صہ سے کم ہوگی، لیکن یہ یکساں استدقاق کے لئے شرط ہے۔

ثبوت کے لئے ضروری ہے کہ لا وقفہ کے اندر ہو' ذیل کے مسئلہ (ابیل کے مسئلہ) کے ثبوت کے لئے ملاحظہ ہو کرسٹل کا الجبرا' حصۂ دوم' باب ۲۶' دفعہ ۲۰ یعنی اگر ایک سلسلہ مستدق ہو جبکہ لا = ر (یا - ر) تو جو تفاعل سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے وہ مسلسل ہوگا قیمت ر (یا - ر) تک اور شمولیت خود ان قیمتوں کے' دوسرے الفاظ میں تفاعل کی قیمت جبکہ لا = ر وہی ہوگی جو کہ سلسلہ کی قیمت ہے جبکہ لا = ر۔

جس طریقہ سے قوتی سلسلہ کا یکساں استدقاق قائم کیا گیا ہے اس کی باآسانی توسیع ہو سکتی ہے ذیل کے مسئلہ کے اثبات میں۔

مسئلہ ۳۔ اگر ایک سلسلہ کی رقمیں لا کے مسلسل تفاعل ہوں جبکہ ا $\geq$ لا $\geq$ ب اور یہ رقمیں' ایک مطلق طور پر مستدق سلسلہ کی متناظر رقموں سے جن میں لا شامل نہیں ہوتا تعداداً کم ہوں تو اول الذکر سلسلہ وقفہ مذکورہ کے اندر یکساں طور پر مستدق ہوگا۔

طالب علم یکساں اور مطلق استدقاق میں التباس نہ کرے' سلسلے یکساں طور پر مستدق ہو سکتے ہیں حالانکہ وہ مطلق طور پر مستدق نہ ہوں' مگر ایسے سلسلے ہماری کتاب کی حدود سے باہر ہیں۔

ذیل کی مشق میں سوالات ۹' ۱۰' ۱۱ خاص طور پر قابل توجہ ہیں۔

مشق ۱۲

۱۔ ثابت کرو کہ ذیل کے سلسلے مستدق ہیں

(۱) $۱ + ۲^{-۲} + ۳^{-۳} + ۴^{-۴} + \ldots\ldots$　　(۲) $\text{لا} + \text{لا}^{۴} + \text{لا}^{۹} + \text{لا}^{۱۶} + \ldots$ $(۰ < \text{لا} < ۱)$

(۳) $\frac{۱}{(\text{ل} + ۱)^{\text{ع}}} + \frac{۱}{(\text{ل} + ۲)^{\text{ع}}} + \frac{۱}{(\text{ل} + ۳)^{\text{ع}}} + \ldots\ldots$ $(\text{ل} > ۰، \text{ع} > ۱)$

۲۔ ثابت کرو کہ ذیل کے سلسلے متنشع ہیں

(۱) $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶} + \ldots\ldots$　　(۲) $۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \ldots\ldots$

(۳) $\sum \frac{۱}{(ا+ن)}$　　　(۴) $\sum \frac{ن+۱}{ن^{۲}+۱}$

(۵) $\sum \frac{ان+ب}{جن^{۲}+د}$　$[ا \neq ۰]$

۳- اگر $\frac{۱}{۱^{۲}} + \frac{۱}{۲^{۲}} + \frac{۱}{۳^{۲}} + \dots\dots = ج$

تو ثابت کرو کہ (۱) $\frac{۱}{۲^{۲}} + \frac{۱}{۴^{۲}} + \frac{۱}{۶^{۲}} + \dots\dots = \frac{۱}{۴} ج$

(۲) $\frac{۱}{۱^{۲}} + \frac{۱}{۳^{۲}} + \frac{۱}{۵^{۲}} + \dots\dots = \frac{۳}{۴} ج$

ج کی قیمت $\frac{\pi^{۲}}{۶}$ ہے (مشق ۱۳ سوال ۲۲)

۴- ثابت کرو کہ ذیل کا سلسلہ (سلسلۂ ثنائی)

$$۱ + م\,لا + \frac{م(م-۱)}{۱\times۲} لا^{۲} + \frac{م(م-۱)(م-۲)}{۱\times۲\times۳} لا^{۳} + \dots\dots$$

م کی ہر قیمت کے لئے مطلق طور پر مستدق ہے جبکہ $|لا| < ۱$، لیکن متسع ہے جبکہ $|لا| > ۱$

کیونکہ $\frac{ع_{ن+۱}}{ع_{ن}} = \frac{م-ن+۱}{ن} لا = \left(\frac{م+۱}{ن} - ۱\right) لا$ نہا $\left|\frac{ع_{ن+۱}}{ع_{ن}}\right| = |لا|$

۵- اگر ف(ن)، ن کا ایک منطق، صحیح تفاعل ہو تو سلسلہ $\sum ف(ن)\, لا^{ن}$ مطلق طور پر مستدق ہوگا جبکہ $|لا| < ۱$ لیکن متسع ہوگا جبکہ $|لا| > ۱$

فرض کرو کہ $ف(ن) = ا\,ن^{ل} + ب\,ن^{ل-۱} + \dots\dots$ جہاں ف(ن) کا درجہ ل ہے، تب

$$\frac{ع_{ن+۱}}{ع_ن} = \frac{ا_۱(ن+۱)^ر + \ldots}{ا ن^ر + \ldots} \to لا ، نہا \frac{ع_{ن+۱}}{ع_ن} = لا$$

۶- اگر سلسلے $\sum ا$ ، $\sum ب$ مطلق طور پر مستدق ہوں تو ثابت کرو کہ سلسلے

(۱) $ا_۰ + ا_۱ جم لا + ا_۲ جم ۲ لا + ا_۳ جم ۳ لا + \ldots\ldots$

(۲) $ب_۱ جب لا + ب_۲ جب ۲ لا + ب_۳ جب ۳ لا + \ldots\ldots$

لا کی ہر قیمت کے لئے مطلق طور پر مستدق ہیں اور لا کے مسلسل تفاعلوں کو تعبیر کرتے ہیں، اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر (۱) [یا (۲)] ایک غیر مسلسل تفاعل کو تعبیر کرے تو $\sum ا$ (یا $\sum ب$) مطلق طور پر مستدق نہیں ہو سکتا۔

۷- ثابت کرو کہ اگر لا > ۰ تو سلسلہ

$$قو^{-لا} جم(لا - ع_۱) + قو^{-۲لا} جم(۲ لا - ع_۲) + قو^{-۳لا} جم(۳ لا - ع_۳) + \ldots$$

ایک مسلسل تفاعل کو تعبیر کرتا ہے۔

۸- اگر لا ≧ ۰ اور اگر $\sum ا$ مطلق طور پر مستدق ہو تو سلسلہ

$$ا_۱ قو^{-لا} جم(لا - ع_۱) + ا_۲ قو^{-۲لا} جم(۲ لا - ع_۲) + ا_۳ قو^{-۳لا} جم(۳ لا - ع_۳) + \ldots$$

ایک مسلسل تفاعل کو تعبیر کرتا ہے۔

۹- اگر وقفہ (-ر، ر) کے اندر لا کی ہر قیمت کے لئے قوتی سلسلہ

$ا_۰ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + \ldots\ldots$ صفر ہو تو ثابت کرو کہ سلسلہ کا ہر ایک سر صفر ہے۔

اگر لا = ۰ تو سلسلہ کی ایک ہی رقم $ا_۰$ رہ جاتی ہے، اس لئے $ا_۰ = ۰$۔

اب $۰ = ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + \ldots = لا(ا_۱ + ا_۲ لا + ا_۳ لا^۲ + \ldots) = لا ف_۱(لا)$ [فرض کرو]

پس لا = ۰ یا $ف_۱(لا) = ۰$، فرض کرو کہ لا ≠ ۰، اس لئے $ف_۱(لا) = ۰$۔

لیکن $ف_۱(لا)$ ایک مسلسل تفاعل ہے، اسلئے $ف_۱(لا)$ کی انتہا لا = ۰ کے لئے

وہی ہے جو $ف(لا)$ کی قیمت ہے $لا = ۰$ کے لئے۔ اسلئے $ا_۰ = ۰$، اسی طرح
$ا_۱ = ۰$، $ا_۲ = ۰$ وغیرہ

۱۰۔ متطابقتاً مساوی ہونے کا مسئلہ۔ اگر دو سلسلے

$ا_۰ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + \ldots\ldots$ اور $ب_۰ + ب_۱ لا + ب_۲ لا^۲ + \ldots\ldots$ وقفہ
$(-ر، ر)$ کے اندر لا کی ہر قیمت کے لئے مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ
$ا_۰ = ب_۰$، $ا_۱ = ب_۱$، ......

اس صورت میں $۰ = (ا_۰ - ب_۰) + (ا_۱ - ب_۱) لا + (ا_۲ - ب_۲) لا^۲ + \ldots\ldots$

اور نتیجہ مثال ۹ سے ثابت ہوتا ہے۔

۱۱۔ سلسلوں کا باہم ضرب دینا۔ فرض کرو کہ دو سلسلے

$س = ا_۰ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + \ldots\ldots$، $ت = ب_۰ + ب_۱ لا + ب_۲ لا^۲ + \ldots\ldots$
ہیں، انکی سب رقمیں مثبت ہیں اور سلسلے مستدق ہیں جبکہ $لا \leq ر$،

فرض کرو $ص_ن = ا_۰ب_۰ + (ا_۰ب_۱ + ا_۱ب_۰) لا + (ا_۰ب_۲ + ا_۱ب_۱ + ا_۲ب_۰) لا^۲ + \ldots$

$$+ (ا_۰ب_{ن-۱} + ا_۱ب_{ن-۲} + \ldots + ا_{ن-۱}ب_۰) لا^{ن-۱}$$

جہاں $ص_ن$ کی رقمیں $س_ن$ اور $ت_ن$ کو باہم ضرب دینے سے مرتب کیجاتی ہیں

اور $ص_ن$ میں $(ن-۱)$ ویں درجہ سے کوئی اعلیٰ درجہ کی رقم نہیں شریک کیجاتی۔
ثابت کرو کہ $ص_ن$ کی انتہا $س\,ت$ ہے یعنی دو سلسلوں کا حاصل ضرب ہے۔
ذرا سا غور کرنے سے ظاہر ہوگا کہ

$$س_ن ت_ن < ص_{۲ن} < س_{ن+۱} ت_{ن+۱}$$

$$س_{ن+۱} ت_{ن+۱} = ص_{۲ن} + ص'_{۲ن}$$

اِن لاتساویوں سے ظاہر ہے کہ $ص_ن$ (یا جو وہی بات ہے کہ) $ص_ن$ انتہا میں $س ت$ کی طرف مستدق ہوتا ہے۔

اس کے بعد فرض کرو کہ $س$ اور $ت$ میں ہر دو مثبت اور منفی رقمیں شریک ہوتی ہیں اور فرض کرو کہ یہ سلسلے مطلق طور پر مستدق ہیں جبکہ $|لا| \leq ر$

فرض کرو کہ $صا_ن$ کی قیمت $صَا_ن$ ہے جبکہ تمام رقموں کو مثبت بنا دیا جائے۔

پہلے حصہ کی رو سے جو تمام رقموں کے مثبت ہونے کی صورت میں صادق آتا ہے $صَا_ن$ کی انتہا صفر ہے، لیکن $صا_ن$، $صَا_ن$ سے بڑا نہیں ہے، اس لئے $صا_ن$ کی انتہا صفر ہے۔ اس لئے $ص_ن$ کی انتہا $س ت$ ہے۔

یہ قاعدہ ناکام رہ سکتا ہے اگر سلسلے صرف شرطاً مستدق ہوں۔

۱۲۔ $ا_۰$، $ا_۱$، $ا_۲$ ...... کی قیمتیں معلوم کرو جبکہ

$$\frac{جم\,طہ + لا}{۱ + ۲\,لا\,جم\,طہ + لا^۲} = ا_۰ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + \dots\dots$$

سلسلہ کو مستدق مان کر $۱ + ۲\,لا\,جم\,طہ + لا^۲$ سے ضرب دو اور سروں کو مساوی رکھو، اس طرح

$$جم\,طہ + لا = ا_۰ + (ا_۱ + ۲\,ا_۰\,جم\,طہ)\,لا + (ا_۲ + ۲\,ا_۱\,جم\,طہ + ا_۰)\,لا^۲ + \dots$$

اسلئے $جم\,طہ = ا_۰$، $۱ = ا_۱ + ۲\,ا_۰\,جم\,طہ$، $۰ = ا_۲ + ۲\,ا_۱\,جم\,طہ + ا_۰$، .....

مساواتوں کو حل کرنے سے

$ا_۰ = جم\,طہ$، $ا_۱ = -جم\,۲\,طہ$، $ا_۲ = جم\,۳\,طہ$، ... $ا_ن = (-۱)^ن\,جم(ن+۱)\,طہ$

اور سلسلہ بن جاتا ہے

$$جم\,طہ - لا\,جم\,۲\,طہ + لا^۲\,جم\,۳\,طہ - لا^۳\,جم\,۴\,طہ + \dots\dots$$

سلسلہ مستدق ہے جبکہ $|لا| < ۱$

اس لئے توتی سلسلہ کو مستدق ماننا درست تھا۔

۱۳۔ مثال ۱۲ سے یا بلاواسطہ ثابت کرو کہ جب $|\text{لا}| < ۱$ تو

$$\frac{۱ - \text{لا}^۲}{۱ + ۲\,\text{لا جم طہ} + \text{لا}^۲} = ۱ - ۲\,\text{لا جم طہ} + ۲\,\text{لا}^۲\,\text{جم ۲طہ} - ۲\,\text{لا}^۳\,\text{جم ۳طہ} + \dots$$

۱۴۔ ثابت کرو کہ اگر طہ نہ صفر ہو اور نہ ہی یہ ۲π کا ضعف ہو،

تو سلسلہ $\text{جم طہ} + \frac{۱}{۲}\,\text{جم ۲طہ} + \frac{۱}{۳}\,\text{جم ۳طہ} + \dots\dots$ مستدق ہے۔

$\text{س}_\text{ن}$ کو $۲\,\text{جب}\,\frac{\text{طہ}}{۲}$ کے ساتھ ضرب دو اور ہر حاصل ضرب کو جیبوں کے فرق کے طور پر بیان کرو بعد ترتیب بدلنے سے حاصل ہوگا

$$۲\,\text{س}_\text{ن}\,\text{جب}\,\frac{\text{طہ}}{۲} = -\text{جب}\,\frac{\text{طہ}}{۲} + \frac{۱}{۲}\,\text{جب}\,\frac{۳\text{طہ}}{۲} + \frac{۱}{۲\times۳}\,\text{جب}\,\frac{۵\text{طہ}}{۲} +$$

$$\dots\dots + \frac{۱}{(\text{ن}-۱)\text{ن}}\,\text{جب}\,\frac{۲\text{ن}-۱}{۲}\,\text{طہ} + \frac{۱}{\text{ن}}\,\text{جب}\,\frac{۲\text{ن}+۱}{۲}\,\text{طہ}$$

$$\text{اسلئے}\quad ۲\,\text{س}_\text{ن}\,\text{جب}\,\frac{\text{طہ}}{۲} = -\text{جب}\,\frac{\text{طہ}}{۲} + \frac{۱}{\text{ن}}\,\text{جب}\,\frac{۲\text{ن}+۱}{۲}\,\text{طہ}$$

$$+\left\{\frac{۱}{۲}\,\text{جب}\,\frac{۳\text{طہ}}{۲} + \dots\dots + \frac{۱}{(\text{ن}-۱)\text{ن}}\,\text{جب}\,\frac{۲\text{ن}+۱}{۲}\,\text{طہ}\right\}$$

لیکن خطوط وحدانی کے اندر جو جملہ ہے اسکی انتہا $\text{ن} \to \infty$ کے لئے محدود ہے

کیونکہ لامتناہی سلسلہ $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲\times۳} + \frac{۱}{۳\times۴} + \dots\dots$ مستدق ہے۔

اسلئے $۲\,\text{س}_\text{ن}\,\text{جب}\,\frac{\text{طہ}}{۲}$ کی انتہا محدود ہے یعنی $\text{س}_\text{ن}$ کی بشرطیکہ $\text{جب}\,\frac{\text{طہ}}{۲}$ صفر نہ ہو۔

۱۵۔ سوال ۱۴ کی سی قیود کے ماتحت ثابت کرو کہ جن سلسلوں کی ن ویں رقمیں

$$\frac{۱}{\text{ن}}\,\text{جب ن طہ}،\quad (-۱)^{\text{ن}-۱}\frac{۱}{\text{ن}}\,\text{جم ن طہ}،\quad (-۱)^{\text{ن}-۱}\frac{۱}{\text{ن}}\,\text{جب ن طہ}$$

ہیں وہ مستدق ہیں۔

۴۳۔ ٹیلر کا مسئلہ۔ دفعہ ۲۷ حصۂ اول میں ہم نے ذیل کی مساوات حاصل کی۔

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{ف}(\text{ا}) + (\text{لا} - \text{ا})\,\text{فَ}(\text{ا}) + \frac{1}{2}(\text{لا} - \text{ا})^2\,\text{فً}(\bar{\text{لا}})$$

اور اگرچہ $\bar{\text{لا}}$ کے متعلق جو کچھ ہم جانتے ہیں وہ صرف اتنا کچھ ہے کہ یہ ا اور لا کے درمیان واقع ہوتا ہے تاہم جب (لا ۔ ا) چھوٹا ہو تو تفاعل ف (لا) تقریبی طور پر ذیل کے درجہ دوم کے تفاعل سے تعبیر ہوتا ہے

$$\text{ف}(\text{ا}) + (\text{لا} - \text{ا})\,\text{فَ}(\text{ا}) + \frac{1}{2}(\text{لا} - \text{ا})^2\,\text{فً}(\text{ا})$$

جس میں مختلف سر ف (لا)، فَ (لا)، فً (لا) کی قیمتوں پر منحصر ہیں جبکہ لا = ا

یہ ایک عام مسئلہ کی خاص صورت ہے، اب ہم عام مسئلہ پر بحث کرینگے۔
پہلے ہم ف (لا) کے لئے ایک بند جملہ حاصل کرینگے جس میں $\bar{\text{لا}}$ جیسا ایک نامعلوم عدد شریک ہوگا، اس کے بعد تفاعل درجہ دوم کی بجائے ہم ایک قوتی سلسلہ حاصل کرینگے۔ دفعہ ۲۷ حصۂ اول میں جو طریقہ استعمال کیا گیا ہے اس کی ذرا سی ترمیم ضروری ہوگی تاکہ **رول** کا مسئلہ صرف ایک مرتبہ لگانا پڑے۔

فرض کرو کہ ف (لا) اور اس کے پہلے ن مشتق لا = ا سے لا = ب تک مسلسل ہیں۔

ایک مقدار **ق** فرض کرو جسکی تعیین ذیل کی مساوات سے ہوتی ہے۔

$$\text{ف}(\text{ب}) - \{\text{ف}(\text{ا}) + (\text{ب}-\text{ا})\,\text{فَ}(\text{ا}) + \tfrac{1}{2}(\text{ب}-\text{ا})^{2}\,\text{فً}(\text{ا}) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(\text{ب}-\text{ا})^{\text{ن}-1}}{\lfloor \text{ن}-1}\,\text{ف}^{(\text{ن}-1)}(\text{ا})\} = (\text{ب}-\text{ا})^{\text{ن}}\,\text{ق} \ldots (1)$$

رول کے مسئلہ کی مدد سے ہم ق کے لئے ایک اور جملہ حاصل کر سکتے ہیں جسکو (۱) میں مندرج کرنے سے مطلوبہ عام مسئلہ حاصل ہو گا۔

فرض کرو کہ فا (لا) ایک لا کا تفاعل ہے جس کی تعیین ذیل کی مساوات سے ہوتی ہے۔

$$\text{فا}(\text{لا}) = \text{ف}(\text{ب}) - \text{ف}(\text{لا}) - (\text{ب}-\text{لا})\,\text{فَ}(\text{لا}) - \tfrac{1}{2}(\text{ب}-\text{لا})^{2}\,\text{فً}(\text{لا})$$

$$\ldots - \frac{(\text{ب}-\text{لا})^{\text{ن}-1}}{\lfloor \text{ن}-1}\,\text{ف}^{\text{ن}-1}(\text{لا}) - (\text{ب}-\text{لا})^{\text{ن}}\,\text{ق} \ldots (2)$$

مساوات (۱) کی رو سے فا (ا) = ۰ نیز فا (ب) = ۰ متطابقاً۔

نیز فا (لا) اور فَا (لا) دونوں مسلسل ہیں لا = ا سے لا = ب تک کیونکہ ف (لا) اور اس کے پہلے ن مشتق حسب مفروض مسلسل ہیں۔ اسلئے رول کے مسئلہ کی رو سے فَا (لا) صفر ہے لا کی کم از کم ایک قیمت لا کے لئے جو ا اور ب کے درمیان واقع ہوتی ہے، (۲) کو تفرق کرنے اور تحویل سے

$$\text{فَا}(\text{لا}) = -\frac{(\text{ب}-\text{لا})^{\text{ن}-1}}{\lfloor \text{ن}-1}\,\text{ف}^{\text{ن}}(\text{لا}) + \text{ن}(\text{ب}-\text{لا})^{\text{ن}-1}\,\text{ق} \ldots (3)$$

اور چونکہ (ب - لا) صفر نہیں ہے، اس لئے

$$\text{ق} = \frac{1}{\lfloor \text{ن}}\,\text{ف}^{\text{ن}}(\text{لا}_1) = \frac{1}{\lfloor \text{ن}}\,\text{ف}^{\text{ن}}\{\text{ا} + \text{ط}(\text{ب}-\text{ا})\}$$

$$\ldots (4)$$

جہاں ۰ < ط < ۱ کیونکہ ا اور ب کے درمیان کا کوئی عدد ا + ط (ب - ا) سے تعبیر ہو سکتا ہے۔

(۴) سے ق کی جو قیمت حاصل ہوتی ہے اسکو (۱) میں مندرج کرو اور ارقام ف (ا)، (ب - ا) فَ (ا)، ...... کو مساوات کی دوسری

جانب لے جاؤ، اس طرح حاصل ہوگا

$$\text{ف}(\text{ب}) = \text{ف}(\text{ا}) + (\text{ب}-\text{ا})\,\text{فَ}(\text{ا}) + \frac{(\text{ب}-\text{ا})^{2}}{\underline{|2}}\,\text{فً}(\text{ا}) + \dots + \frac{(\text{ب}-\text{ا})^{\text{ن}-1}}{\underline{|\text{ن}-1}}\,\text{ف}^{\text{ن}-1}(\text{ا}) + \frac{(\text{ب}-\text{ا})^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\,\text{ف}^{\text{ن}}\left\{\text{ا} + \text{طہ}(\text{ب}-\text{ا})\right\} \quad \dots\dots (5)$$

اب ہم ب کی بجائے لا استعمال کر سکتے ہیں۔ (۱) میں ب کو ہم نے صرف اس لئے استعمال کیا ہے کہ اوسط قیمت کا مسئلہ لگانے میں التباس پیدا نہو۔

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{ف}(\text{ا}) + (\text{لا}-\text{ا})\,\text{فَ}(\text{ا}) + \frac{(\text{لا}-\text{ا})^{2}}{\underline{|2}}\,\text{فً}(\text{ا}) + \frac{(\text{لا}-\text{ا})^{3}}{\underline{|3}}\,\text{فٌ}(\text{ا}) + \dots + \frac{(\text{لا}-\text{ا})^{\text{ن}-1}}{\underline{|\text{ن}-1}}\,\text{ف}^{(\text{ن}-1)}(\text{ا}) + \frac{(\text{لا}-\text{ا})^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\,\text{ف}^{(\text{ن})}\left\{\text{ا} + \text{طہ}(\text{لا}-\text{ا})\right\} \quad \dots\dots (6)$$

مساوات (۶) کا مسئلہ ٹیلر کے مسئلہ سے موسوم ہوتا ہے، اسکی خاص صورت جبکہ ا = ۰ حسب ذیل ہے۔

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{ف}(0) + \text{لا}\,\text{فَ}(0) + \frac{\text{لا}^{2}}{\underline{|2}}\,\text{فً}(0) + \dots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}-1}}{\underline{|\text{ن}-1}}\,\text{ف}^{\text{ن}-1}(0) + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\,\text{ف}^{\text{ن}}(\text{طہ}\,\text{لا}) \quad \dots\dots (7)$$

اسے **مکلارن کا مسئلہ** کہتے ہیں۔

جن شرائط کے ماتحت ٹیلر کا مسئلہ ثابت کیا گیا ہے وہ یہ ہیں، ف(لا) اور اس کے پہلے ن مشتق مسلسل (اور اس لیے محدود) ہیں لا = ا سے لا کی اس قیمت تک جس کے لئے ف(لا) کی قیمت محسوب کی جاتی ہے۔ عدد طہ کے لئے صرف یہی کہا جا سکتا ہے کہ یہ ایک مثبت کسر واجب ہے۔

عام طور پر اسکی قیمت ن اور (ا) کی مختلف قیمتوں کے لئے مختلف ہوگی۔

ٹیلر کے مسئلہ میں باقی مساوات (۶) میں پہلی ن رقموں کے مجموعہ کو سن (لا) سے تعبیر کرو اور آخری رقم کو بن (لا) سے۔ اس طرح

ف (لا) = سن (لا) + بن (لا) اور

بن (لا) = ((لا - ا)^ن / ن!) فن {ا + طہ (لا - ا)} ...... (۸)

اگر ہم ن کو لاانتہا بڑھا دیں تو (۶) کے بائیں جانب کا مجموعہ ایک لامتناہی سلسلہ ہو جاتا ہے اور اگر بن (لا) صفر ہو تو یہ سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔ ف (لا) اور اس کے پہلے ن مشتق حسب مفروض مسلسل ہیں اور ہر مشتق کو مسلسل رہنا چاہئے تاکہ ہم ن کو لاانتہا فرض کر سکیں۔ اس لئے

مسئلہ۔ اگر ف (لا) اور اس کے سب مشتق سعت زیر بحث میں مسلسل ہوں اور اگر بن (لا) کی انتہا صفر ہو تو لامتناہی سلسلہ

ف (ا) + (لا - ا) فَ (ا) + ((لا - ا)^۲ / ۲!) فً (ا) + ... (۹)

جو (۶) میں ن کو لامتناہی فرض کرنے سے حاصل ہوتا ہے مستدق ہوگا اور تفاعل ف (لا) کو تعبیر کرے گا یعنی یہ سلسلہ ف (لا) کی جانب مستدق ہوگا۔

[نوٹ ایسی صورتیں مرتب ہو سکتی ہیں جن میں (۹) مستدق ہو لیکن قیمت ف (لا) کی جانب مستدق نہ ہو، لیکن عام عملی حالات میں ایسی صورتیں واقع نہیں ہونگی]

سلسلہ (۹) کو ف (لا) کے لئے **ٹیلر کا سلسلہ** کہتے ہیں جب (۶) اور (۹) میں تمیز کرنا مقصود ہو تو (۶) کو ٹیلر کے ضابطہ سے ہم موسوم کرینگے۔ ظاہر ہے کہ اوپر جو کچھ ٹیلر کے سلسلہ کے متعلق ذکر کیا گیا ہے وہ سب کچھ اس کی خاص صورت مکلارن کے سلسلہ

ف (۰) + لا فَ (۰) + (لا^۲ / ۲!) فً (۰) + ... (۱۰)

پر بھی صادق آتا ہے۔

(۸) میں $ب_ن(لا)$ کی جو قیمت درج ہے وہ ٹیلر کے سلسلہ میں لنگرانج کی صورت باقی کہلاتی ہے۔ باقی کی ایک اور مفید صورت مساوات (۱) میں $(ب-ا)^ن ق$ کی بجائے $(ب-ا) ق$ رکھنے سے حاصل ہو سکتی ہے۔ ایسا کرنے سے مساوات (۳) کی آخری رقم محض ق رہ جاتی ہے اور $(ب-ا) ق$ کی بجائے

$$\frac{(ب-ا)(ب-لا)^{ن-۱}}{\lfloor ن-۱} ف^{ن}(لا) \text{ یعنی } \frac{(ب-ا)^ن(۱-ط)^{ن-۱}}{\lfloor ن-۱} ف^{ن}\{ا+ط(ب-ا)\}$$

حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{اسلئے } ب_ن(لا) = \frac{(لا-ا)^ن(۱-ط)^{ن-۱}}{\lfloor ن-۱} ف^{(ن)}\{ا+ط(لا-ا)\} \quad ......(۱۱)$$

یہ کوشی کی صورت باقی ہے۔

اگر ہم (۱) میں $(ب-ا)^ن ق$ کی بجائے $(ب-ا)^ع ق$ رکھیں تو

$$ب_ن(لا) = \frac{(لا-ا)^ن(۱-ط)^{ن-ع}}{ع \lfloor ن-۱} ف^{ن}\{ا+ط(لا-ا)\} \quad ......(۱۲)$$

یہ شلوملش روش کی صورت باقی ہے، اس میں ع = ن رکھنے سے لنگرانج کی اور ع = ۱ رکھنے سے کوشی کی صورت باقی حاصل ہوتی ہے۔

(۵) میں ا کی بجائے لا اور ب کی بجائے لا + ھ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ف(لا+ھ) = ف(لا) + ھ ف'(لا) + \frac{ھ^۲}{\lfloor ۲} ف''(لا) + ...$$

$$..... + \frac{ھ^ن}{\lfloor ن} ف^{(ن)}(لا+ط ھ) \quad ....(۱۳)$$

ف(لا + ھ) کی یہ قیمت اکثر استعمال ہوتی ہے۔

اب ہم ان مسائل کو تفاعلوں کے پھیلانے میں استعمال کرینگے، بالعموم مکلارن کے

مسئلہ سے کام لینا پڑیگا اور باقی کی دو ذیل کی صورتیں استعمال میں آئینگی۔

$$ب_ن(لا) = \frac{لا^ن}{|ن} ف^{(ن)}(طہ لا)، \quad ب_ن(لا) = \frac{لا^ن(۱-طہ)^{ن-۱}}{|ن-۱} ف^{(ن)}(طہ لا)$$

پہلی لنگرانج کی شکل ہے اور دوسری کوشی کی۔

۴۴ - (۱) جب لا

$$ف(لا) = جب لا، \quad فَ(لا) = جم لا، \quad فً(لا) = - جب لا، \quad فٌ(لا) = - جم لا$$

$$ف^{(۴)}(لا) = جب لا، \quad ف^{(ن)}(لا) = جب \left(لا + \frac{ن\pi}{۲}\right)$$

اسلئے $ف(۰) = ۰، \quad فَ(۰) = ۱، \quad فً(۰) = ۰، \quad فٌ(۰) = -۱$

$$ف^{(۴)}(۰) = ۰، \quad ف^{(ن)}(۰) = جب \frac{ن\pi}{۲}، \quad ف^{(ن)}(طہ لا) = جب \left(طہ لا + \frac{ن\pi}{۲}\right)$$

چونکہ جب $\left(\frac{ن\pi}{۲}\right)$ صفر ہے یا ± ۱ ہو جب اسکے کہ ن جفت ہے یا طاق اس لئے لا کی جفت قوتوں کے سر صفر ہونگے اور پھیلاؤ میں صرف لا کی طاق قوتیں شریک ہونگی اور رقمیں متبادلاً مثبت اور منفی ہونگی۔ پس

$$جب لا = لا - \frac{لا^۳}{|۳} + \frac{لا^۵}{|۵} - \frac{لا^۷}{|۷} + \ldots + \frac{لا^ن}{|ن} جب \left(طہ لا + \frac{ن\pi}{۲}\right)$$

نیز $ب_ن(لا) = \frac{لا^ن}{|ن} جب \left(طہ لا + \frac{ن\pi}{۲}\right)$ جو تعداداً $\frac{لا^ن}{|ن}$ سے بڑا نہیں ہے اور $\frac{لا^ن}{|ن}$ کی انتہا صفر ہے۔ پس ہمیں ذیل کا سلسلہ حاصل ہوتا ہے

$$جب لا = لا - \frac{لا^۳}{|۳} + \frac{لا^۵}{|۵} - \frac{لا^۷}{|۷} + \ldots\ldots$$

جو لا کی ہر محدود قیمت کے لئے مطلق طور پر مستدق ہے۔

(۲) جم لا - اسی طرح سے

$$\text{جم لا} = ۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{|۲}} + \frac{\text{لا}^{۴}}{\underline{|۴}} - \frac{\text{لا}^{۶}}{\underline{|۶}} + \ldots\ldots\ldots$$

اور سلسلہ لا کی ہر محدود قیمت کے لئے مطلق طور پر مستدق ہے۔

(۳) $\text{و}^{\text{لا}}$ ـ $\text{ف}(\text{لا}) = \text{و}^{\text{لا}}$ ، $\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا}) = \text{و}^{\text{لا}}$

$\text{ف}(۰) = ۱$ ، $\text{ف}^{(\text{ن})}(۰) = ۱$ ، ن کی ہر قیمت کے لئے

اسلئے $$\text{و}^{\text{لا}} = ۱ + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{|۲}} + \frac{\text{لا}^{۳}}{\underline{|۳}} + \ldots\ldots\ldots$$

اور سلسلہ لا کی ہر محدود قیمت کے لئے مطلق طور پر مستدق ہے۔

(۴) $(۱ + \text{لا})^{\text{م}}$

$\text{ف}(\text{لا}) = (۱ + \text{لا})^{\text{م}}$ ، $\text{ف}^{\text{ن}}(\text{لا}) = \text{م}(\text{م}-۱)(\text{م}-۲)\ldots(\text{م}-\text{ن}+۱)(۱+\text{لا})^{\text{م}-\text{ن}}$

$\text{ف}(۰) = ۱$ ، $\text{ف}^{\text{ن}}(۰) = \text{م}(\text{م}-۱)\ldots\ldots(\text{م}-\text{ن}+۱)$

$$\text{ف}^{\text{ن}}(\text{ط لا}) = \text{م}(\text{م}-۱)\ldots\ldots(\text{م}-\text{ن}+۱)(۱+\text{ط لا})^{\text{م}-\text{ن}}$$

اسلئے $$(۱+\text{لا})^{\text{م}} = ۱ + \text{م لا} + \frac{\text{م}(\text{م}-۱)}{۱\times۲}\text{لا}^{۲} + \ldots + \frac{\text{م}(\text{م}-۱)\ldots(\text{م}-\text{ن}+۲)}{\underline{|\text{ن}-۱}}\text{لا}^{\text{ن}-۱}$$
$$+ \text{ب}_{\text{ن}}(\text{لا})$$

م مثبت صحیح عدد ہو تو سلسلہ (م + ۱) ویں رقم پر ختم ہو جاتا ہے کیونکہ $\text{ف}^{\text{ن}}(\text{لا}) = ۰$ جبکہ ن > م، اگر م مثبت صحیح عدد نہ ہو تو ہمیں $\text{ب}_{\text{ن}}(\text{لا})$ پر غور کرنا ہوگا۔ ہم کوشی کی شکل لینگے

$$\text{ب}_{\text{ن}}(\text{لا}) = \frac{\text{م}(\text{م}-۱)\ldots(\text{م}-\text{ن}+۱)}{\underline{|\text{ن}-۱}}\text{لا}^{\text{ن}}(۱-\text{ط})^{\text{ن}-۱}(۱+\text{ط لا})^{\text{م}-\text{ن}}$$

لامتناہی سلسلہ $$۱ + \text{م لا} + \frac{\text{م}(\text{م}-۱)}{۱\times۲}\text{لا}^{۲} + \ldots\ldots\ldots$$

مطلق طور پر مستدق ہوتا ہے اگر |لا| > ۱ اور متسع ہوتا ہے اگر |لا| < ۱

(مشق ۱۲ سوال ۴)، اسلئے ہم لا کی صرف اُن قیمتوں پر غور کرینگے جن کے لئے
|لا| ≧ ۱

(ا) |لا| < ۱، ب~ن~ (لا) کو تین اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے مساوی لکھو

$$\text{م لا (۱+ طہ لا)}^{\text{م}-۱}، \left(\frac{۱-\text{طہ}}{۱+\text{طہ لا}}\right)^{\text{ن}-۱}، \frac{(\text{م}-۱)(\text{م}-۲)\ldots(\text{م}-\text{ن}+۱)}{\lfloor \text{ن}-۱}\ \text{لا}^{\text{ن}-۱}$$

پہلا جزوِ ضربی ن کی ہر قیمت کے لئے محدود ہے کیونکہ (۱+ طہ لا)^م-۱^ ، ۱ اور (۱+ لا)^م-۱^ کے درمیان واقع ہوتا ہے، دوسرا جزو ضربی ایک سے تجاوز نہیں ہوسکتا، تیسرے جزوِ ضربی کی انتہا صفر ہے کیونکہ یہ مستدق سلسلہ

$$۱+(\text{م}-۱)\,\text{لا}+\frac{(\text{م}-۱)(\text{م}-۲)}{۱\times۲}\,\text{لا}^۲+\ldots\ldots\ldots$$

کی ن ویں رقم ہے۔ اسلئے ب~ن~ (لا) صفر ہے اور م کی تمام قیمتوں کے لئے جبتک کہ -۱ < لا < ۱ یہ لامتناہی سلسلہ (۱+ لا)^م^ کی طرف مستدق ہوتا ہے۔

(ب) لا = ± ۱، یہ صورتیں ایسی ضروری نہیں اور ب~ن~ (لا) کی تحقیق طولانی ہے، اس جگہ صرف ہم نتائج کا حوالہ دینگے، ثبوت کے لئے ملاحظہ ہو کرسٹل کا الجبرا، حصۂ دوم، باب ۲۶ دفعہ ۶۔

لا = + ۱، سلسلہ مطلق طور پر مستدق ہے اگر م > ۰ اور مستدق بالشرط ہے اگر ۰ > م > -۱، سلسلہ اہتزازی ہے اگر م = -۱ اور متسع اگر م < -۱

لا = -۱، سلسلہ مطلق طور پر مستدق ہوتا ہے اگر م > ۰ اور متسع ہوتا ہے اگر م <

اگر ا ≠ ب تو جملہ ثنائی (ا + ب)^م^ کو لکھو ایسے ا^م^ (۱ + ب/ا)^م^ یا ب^م^ (۱ + ا/ب)^م^ اور پھر ب/ا کی بجائے لا لکھو اگر ب کم ہو تعداداً ا سے یا ا/ب کی بجائے لا لکھو اگر ا کم ہو

ب سے -

(۵) لوک (۱+لا) - لوک لا کو مکلارن کے مسئلہ کے ذریعہ پھیلانا ممکن نہیں کیونکہ لوک لا لامتناہی ہو جاتا ہے جبکہ لا = ۰۔ لیکن ہم لوک لا کو ٹیلر کے مسئلہ کی مدد سے (لا - ۱) کی قوتوں میں پھیلا سکتے ہیں اگر ا مثبت ہو۔ لوک (۱+لا) کو پھیلانا آسان ہے۔

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{لوک}(\text{۱}+\text{لا})\text{،}\quad \text{ف}'(\text{لا}) = \frac{\text{۱}}{\text{۱}+\text{لا}}\text{،}\quad \text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا}) = \frac{(-\text{۱})^{\text{ن}-\text{۱}}\,\underline{|\text{ن}-\text{۱}}}{(\text{۱}+\text{لا})^{\text{ن}}}$$

$$\text{ف}(\text{۰}) = \text{۰}\text{،}\quad \text{ف}'(\text{ن}) = \text{۱}\text{،}\quad \text{ف}^{(\text{ن})}(\text{۰}) = (-\text{۱})^{\text{ن}-\text{۱}}\,\underline{|\text{ن}-\text{۱}}$$

$$\text{لوک}(\text{۱}+\text{لا}) = \text{لا} - \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۲}} + \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\text{۳}} - \frac{\text{لا}^{\text{۴}}}{\text{۴}} + \ldots\ldots + \text{ب}_{\text{ن}}(\text{لا})$$

لامتناہی سلسلہ منتشر ہے اگر |لا| > ۱ اور اگر لا = -۱

اسلئے ہم باقی پر اس صورت میں غور کرتے ہیں جبکہ -۱ < لا ≤ ۱
اگر لا مثبت ہو تو لگرانج کی صورت باقی یہ ہے

$$\text{ب}_{\text{ن}}(\text{لا}) = (-\text{۱})^{\text{ن}-\text{۱}}\,\frac{\text{۱}}{\text{ن}}\left(\frac{\text{لا}}{\text{۱}+\text{ط}\,\text{لا}}\right)^{\text{ن}}$$

اسکی انتہا صفر ہے کیونکہ $\left(\frac{\text{لا}}{\text{۱}+\text{ط}\,\text{لا}}\right)^{\text{ن}}$ کبھی ایک سے بڑا نہیں ہو سکتا اور $\frac{\text{۱}}{\text{ن}}$ کی انتہا صفر ہے۔

اگر لا منفی ہو تو کوشی کی صورت

$$\text{ب}_{\text{ن}}(\text{لا}) = (-\text{۱})^{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{لا}^{\text{ن}} \times \frac{\text{۱}}{\text{۱}+\text{ط}\,\text{لا}}\left(\frac{\text{۱}-\text{ط}}{\text{۱}+\text{ط}\,\text{لا}}\right)^{\text{ن}-\text{۱}}$$

جس سے ظاہر ہے کہ اگر |لا| < ۱ تو انتہا صفر ہوگی کیونکہ $\text{لا}^{\text{ن}}$ کی انتہا صفر ہے اور ن کی ہر قیمت کے لئے دوسرے اجزائے ضربی محدود ہیں۔

اس لئے لوک (۱ + لا) = لا − $\frac{لا^2}{2}$ + $\frac{لا^3}{3}$ − $\frac{لا^4}{4}$ + ...

جہاں − ۱ < لا ≦ ۱، یہ سلسلہ بالشرط متدق ہے جبکہ لا = ۱ واضح ہو کہ لا = ۱ رکھنے سے

لوک ۲ = ۱ − $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{3}$ − $\frac{1}{4}$ + ...

(۶) **لوکارثم محسوب کرنا۔** اوپر جو سلسلہ معلوم کیا گیا ہے وہ سرعت سے متدق نہیں ہوتا اس لئے حسابات کی غرض سے چنداں موزوں نہیں۔

لوک (۱ + لا) = لا − $\frac{لا^2}{2}$ + $\frac{لا^3}{3}$ − $\frac{لا^4}{4}$ + ... (۱)

لا کی بجائے − لا لکھنے سے

لوک (۱ − لا) = − لا − $\frac{لا^2}{2}$ − $\frac{لا^3}{3}$ − $\frac{لا^4}{4}$ − ...... (۲)

چونکہ لوک (۱ + لا) − لوک (۱ − لا) = لوک $\frac{1 + لا}{1 - لا}$

اس لئے تفریق سے

لوک $\frac{1 + لا}{1 - لا}$ = ۲ { لا + $\frac{لا^3}{3}$ + $\frac{لا^5}{5}$ + ... + $\frac{لا^{2ن-1}}{2ن-1}$ + ... } (۳)

فرض کرو کہ لا مثبت ہے اور $\frac{1 + لا}{1 - لا}$ = $\frac{ط + 1}{ط}$ جس سے لا = $\frac{1}{2ط + 1}$ < ۱

مساوات (۳) ہو جاتی ہے

لوک (ط + ۱) = لوک ط + ۲ { $\frac{1}{2ط+1}$ + $\frac{1}{3}$ $\left(\frac{1}{2ط+1}\right)^3$ + $\frac{1}{5}$ $\left(\frac{1}{2ط+1}\right)^5$ + .. }

.... (۴)

اس سے لوک (ط + ۱) معلوم ہو سکتا ہے اگر لوک ط معلوم ہو۔ یاد رہے کہ (۴)، ط میں ایک قوتی سلسلہ نہیں ہے۔

مفرد اعداد ۲، ۳، ۵، ۷، ...... کے لوکارتم بآسانی معلوم ہو سکتے ہیں۔ مثلاً

$$ھا = ۱، لوک ۲ = ۲ \left\{ \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳ \times ۳^{۳}} + \frac{۱}{۵ \times ۳^{۵}} + \ldots\ldots \right\}$$

$$ھا = ۲، لوک ۳ = لوک ۲ + ۲ \left\{ \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۳ \times ۵^{۳}} + \frac{۱}{۵ \times ۵^{۵}} + \ldots\ldots \right\}$$

اب لوک ۴ = ۲ لوک ۲، لوک ۵، ھا کی بجائے ۴ لکھنے سے حاصل ہوگا اور لوک ۶ = لوک ۲ + لوک ۳ وغیرہ۔ سلسلہ (۴) سرعت سے مستدق ہوتا ہے ھا = ۲ کی صورت میں بھی۔ خاص اعداد کے لئے خاص ترکیبیں استعمال ہو سکتی ہیں۔ مثلاً اگر ھا = ۴۹ تو مساوات (۴) سے لوک ۷ معلوم ہوگا لوک ۲ اور لوک ۵ کی رقوم میں اور سلسلہ بڑی سرعت سے مستدق ہوگا۔

طالب علم مزید معلومات اور حوالہ کی غرض سے کرسٹل کا جبر و مقابلہ حصۂ دوم، باب ۲۸، دفعہ ۱۱ دیکھے۔

(۷) دائرہ کی قوس کے طول کے متعلق ہائی گن کا قاعدہ۔

اگر کل قوس کے وتر کا طول ا ہو اور نصف قوس کا وتر ب ہو تو قوس کا طول (ل) تقریباً $\frac{۸ب - ا}{۳}$ ہوگا۔

فرض کرو کہ قوس کے سامنے دائرہ کے مرکز پر زاویہ طھ نیم قطری بنتا ہے اور دائرہ کا نصف قطر ر ہے۔ تب ل = ر طھ اور

$$ا = ۲ ر جب \frac{طھ}{۲} = ۲ ر \left\{ \frac{طھ}{۲} - \frac{۱}{۶} \left(\frac{طھ}{۲} \right)^{۳} + \frac{۱}{۱۲۰} \left(\frac{۱}{۲} طھ \right)^{۵} - \ldots\ldots \right\}$$

.... (۱)

$$ب = ۲ ر جب \frac{طھ}{۴} = ۲ ر \left\{ \frac{طھ}{۴} - \frac{۱}{۶} \left(\frac{طھ}{۴} \right)^{۳} + \frac{۱}{۱۲۰} \left(\frac{طھ}{۴} \right)^{۵} - \ldots\ldots \right\}$$

.... (۲)

(۲) کو ۸ سے ضرب دو اور (۱) کو تفریق کرو، اس طرح طھ^۳ والی رقم ساقط

ہو جائے گی۔

اس لئے $۸ ب - ا = ۲ ر \left\{ \frac{۳}{۲} طہ - \frac{۳ طہ^{۵}}{۲ \times ۱۲۰} + \ldots \right\}$

$= ۳ ل \left\{ ۱ - \frac{طہ^{۴}}{۶۸۰} + \ldots \right\}$

اس لئے $طہ^{۴}$ اور اس سے اعلیٰ قوتوں کو نظر انداز کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ل = \frac{۸ ب - ا}{۳}$$

یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ ۳۰° کے زاویہ کی صورت میں اضافی غلطی $\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$ سے کم ہے

اور ۴۵° " " " " $\frac{۱}{۲۰۰۰}$ " "

اور ۶۰° " " " " $\frac{۱}{۶۰۰}$ " "

۴۵ - ن ویں مشتق کا محسوب کرنا۔

مکلارن کے سلسلہ کی مدد سے کسی تفاعل کے لئے قوتی سلسلہ معلوم کرنے میں جو عملی مشکل پیش آتی ہے وہ $ف^{(ن)}(لا)$ کا نکالنا ہے۔ مذکورہ بالا صورتوں کے علاوہ بہت کم صورتیں ایسی ہیں جن میں ن واں مشتق زیادہ بے قابو شکل اختیار نہیں کرتا۔ باقی $ب_{ن}(لا)$ کی بحث ناممکن ہے جب تک کہ $ف^{(ن)}(لا)$ معلوم نہ ہو جائے۔ بعض خاص صورتوں میں $ف^{(ن)}(۰)$ معلوم ہو سکتا ہے اور مکلارن کا لاانتناہی سلسلہ اگر یہ مستدق ہو تو (بالعموم) وقفہ استدقاق کے اندر $ف(لا)$ کو تعبیر کرتا ہے۔

اس تعلق میں لیب نیز کا مسئلہ (دفعہ ۶۸ حصۂ اول) نہایت کارآمد ثابت ہوتا ہے۔

بطور مثال کے $ف(لا) = جب(ا جب^{-۱} لا)$ پر غور کرو۔

اس صورت میں $ف^{(ن)}(لا)$ کو بلاواسطہ معلوم کرنا مشکل ہوگا اسلئے ہم

پہلے فَ (لا) اور فً (لا) معلوم کرکے ایک تفرقی مساوات بناتے ہیں' جس پر لیبنیٹز کا مسئلہ لگ سکیگا' اس طرح $\text{ف}^{\text{ن}}$ (۰) کی قیمت معلوم ہو جائیگی۔

$$\text{ف (لا)} = \text{جب (ا جب}^{-۱}\text{ لا)}$$

$$\text{فَ (لا)} = \text{ا جم (ا جب}^{-۱}\text{ لا)} \times \frac{۱}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\text{فً (لا)} = -\text{ا}^{۲}\text{ جب (ا جب}^{-۱}\text{ لا)} \times \frac{۱}{(۱ - \text{لا}^{۲})} + \text{ا جم (ا جب}^{-۱}\text{ لا)} \frac{\text{لا}}{(۱ - \text{لا}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$= -\text{ا}^{۲}\text{ ف (لا)} \frac{۱}{(۱ - \text{لا}^{۲})} + \frac{\text{لا فَ (لا)}}{۱ - \text{لا}^{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

اس لئے $(۱ - \text{لا}^{۲})\ \text{فً (لا)} - \text{لا فَ (لا)} + \text{ا}^{۲}\ \text{ف (لا)} = ۰ \quad \ldots\ldots (۳)$

ف (لا)' فَ (لا)' فً (لا) میں لا کو صفر بنانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ف (۰)} = ۰،\ \text{فَ (۰)} = \text{ا}،\ \text{فً (۰)} = ۰$$

(۳) کی رو سے دائیں جانب کا تفاعل ہمیشہ صفر ہوتا ہے' اس لئے اس کا ن' واں مشتق بھی صفر ہوگا۔ یہ تفاعل حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے' اسلئے اسکی ہر رقم لیب نیٹز کا مسئلہ لگانے سے ن دفعہ تفرق ہو سکتی ہے۔
پہلی رقم کے لئے فرض کرو کہ

فً (لا) = ع' $(۱ - \text{لا}^{۲})$ = و' دوسرے سے اعلیٰ و کا ہر مشتق صفر ہے' فً (لا) کا ن' واں مشتق $\text{ف}^{\text{ن}+۲}$ (لا) ہے' (ن-۱)' واں $\text{ف}^{\text{ن}+۱}$ (لا) وغیرہ' پس

$$\text{عف}^{\text{ن}}\{(۱ - \text{لا}^{۲})\ \text{فً (لا)}\} = (۱ - \text{لا}^{۲})\ \text{ف}^{(\text{ن}+۱)}\text{(لا)} + \text{ج}^{\text{ن}}_{۱}\ (-۲\ \text{لا})\ \text{ف}^{(\text{ن}+۱)}\text{(لا)}$$

$$+ \text{ج}^{\text{ن}}_{۲}\ (-۲)\ \text{ف}^{\text{ن}}\text{ (لا)}$$

اسی طرح $\text{عف}^{\text{ن}}\{\text{لا فَ (لا)}\} = \text{لا ف}^{(\text{ن}+۱)}\text{(لا)} + \text{ن ف}^{(\text{ن})}\text{ (لا)}$

نیز۔ $ع ف^{ن} \{ ا^{٢} ف(لا) \} = ا^{٢} ف^{(ن)}(لا)$

جمع کرنے سے تھوڑی تحویل کے بعد حاصل ہوگا

$$(١ - لا^{٢}) ف^{(ن+٢)}(لا) - (٢ن+١) لا ف^{(ن+١)}(لا) - (ن^{٢} - ا^{٢}) ف^{(ن)}(لا) = ٠ \quad .... (٤)$$

اس لئے جب، $لا = ٠$ تو

$$ف^{(ن+٢)}(٠) = (ن^{٢} - ا^{٢}) ف^{(ن)}(٠) \quad .... (٥)$$

مساوات (٥) سے سب مشتق دوسرے سے اعلےٰ رتبہ کے $لا = ٠$ کے لئے معلوم ہوسکتے ہیں کیونکہ پہلے دو معلوم ہیں

$$ف^{(٤)}(٠) = (٢^{٢} - ا^{٢}) ف''(٠) = ٠$$

$$ف^{(٦)}(٠) = (٤^{٢} - ا^{٢}) ف^{(٤)}(٠) = ٠$$ وغیرہ، پس ہر جفت مشتق صفر ہے۔ نیز

$$ف^{(٣)}(٠) = (١^{٢} - ا^{٢}) ف'(٠) = (١^{٢} - ا^{٢}) ا$$

$$ف^{(٥)}(٠) = (٣^{٢} - ا^{٢}) ف^{(٣)}(٠) = (٣^{٢} - ا^{٢})(١^{٢} - ا^{٢}) ا$$

اور اسی طرح سے عام قیمت یہ ہے

$$ف^{(٢ن-١)}(٠) = ا(١^{٢} - ا^{٢})(٣^{٢} - ا^{٢}) ..... \{(٢ن-٣)^{٢} - ا^{٢}\}$$ اسلئے

$$جب(ا جب^{-١} لا) = ا لا + \frac{ا(١^{٢} - ا^{٢})}{|٣} لا^{٣} + \frac{ا(١^{٢} - ا^{٢})(٣^{٢} - ا^{٢})}{|٥} لا^{٥} + ... (٦)$$

یہ سلسلہ متناہی ہوگا اگر ا طاق عدد ہو، باقی سب صورتوں میں یہ لامتناہی ہوگا

$لا^{٢ن+١}$ والی رقم کی نسبت رقم ماقبل کے ساتھ $\frac{(٢ن-١)^{٢} - ا^{٢}}{٢ن(٢ن+١)} لا^{٢}$ ہے اور

چونکہ اس نسبت کی انتہا $لا^{٢}$ ہے، اسلئے سلسلہ (٦) مطلق طور پر مستدق ہے

جب تک کہ $-1 < لا < +1$

بعض مقاصد کے لحاظ سے پھیلاؤ کی چند رقمیں معلوم کرنا کافی ہوتا ہے اور تھوڑی بہت محنت کے ساتھ چند مشتقوں کا نکال لینا دشوار نہیں ہوتا۔ مثلاً لوگ (۱ + جب لا) کے پہلے تین چار مشتق بآسانی محسوب ہو سکتے ہیں اور پھیلاؤ کی پہلی تین رقمیں حاصل ہوتی ہیں $لا - \frac{لا^2}{2} + \frac{لا^3}{6}$

لیکن ایسی صورتوں میں اس طرح کا عمل زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ

$$ما = ا_1 لا + ا_2 لا^2 + \ldots \text{ ، } ف(ما) = ب_0 + ب_1 ما + ب_2 ما^2 + \ldots\ldots$$

سلسلہ $ب_0 + ب_1 ما + ب_2 ما^2 + \ldots\ldots$ میں ما کی بجائے پہلا سلسلہ مندرج کرو اور لا کی قوتوں میں اسے ترتیب دو۔ لا کی کافی طور پر چھوٹی قیمتوں کے لئے سلسلہ معملہ مستدق ہوگا۔ مثلاً

$$ما = جب\, لا = لا - \frac{لا^3}{6} + \ldots\ldots\ldots$$

$$لوگ\,(1 + ما) = ما - \frac{ما^2}{2} + \frac{ما^3}{3} + \ldots\ldots \text{ اس لئے}$$

$$لوگ\,(1 + جب\, لا) = (لا - \frac{لا^3}{6} + \ldots) - \frac{1}{2}(لا - \frac{لا^3}{6} + \ldots)^2 + \frac{1}{3}(لا - \frac{لا^3}{6} + \ldots)^3 \ldots$$

$$= لا - \frac{1}{2} لا^2 + \frac{1}{6} لا^3 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

اس طریقہ کا ثبوت یہاں نہیں دیا جا سکتا۔

۴۷ ـ **سلسلوں کا تفرق اور تکمل** ـ بعض اوقات کسی تفاعل کی خاصیتیں اس لامتناہی سلسلہ کو استعمال کرنے سے جو تفاعل کو تعبیر کرتا ہے،

بآسانی تحقیق ہو سکتی ہیں، اس لئے ہمیں دیکھنا چاہئے کہ کن شرائط کے ماتحت ایک لامتناہی سلسلہ رقم برقم تفرق یا تکمل ہو سکتا ہے۔ ہمیں یاد ہے کہ کسی مجموعہ کو تفرق یا تکمل کرنے کے قواعد صرف اس صورت میں ثابت کئے گئے تھے جبکہ رقموں کی تعداد **محدود** ہو، لامتناہی سلسلوں کی صورت میں اسکی توسیع کا جواز مزید تصدیق کا محتاج ہے۔

تکمل سے متعلق ایک مسئلہ سے ہم شروع کرینگے، حسب معمول صہ سے ایک چھوٹی اختیاری مثبت مقدار مراد ہے۔

مسئلہ ا۔ اگر سلسلہ $ع_1(لا) + ع_2(لا) + \ldots$ لا = ا سے لا = ب تک **یکساں طور پر** مستدق ہو اور ف(لا) کی جانب استدقاق کرے تو سلسلہ

$$\int_ج^{لا} ع_1(لا)\, ولا + \int_ج^{لا} ع_2(لا)\, ولا + \ldots\ldots$$

جہاں ا $\leq$ ج $\leq$ لا $\leq$ ب بھی مستدق ہوگا اور قیمت

$$\int_ج^{لا} ف(لا)\, ولا$$ کی طرف مائل ہوگا۔

فرض کرو کہ ف(لا) = س$_ن$(لا) + ب$_ن$(لا) اور فرض کرو کہ

$$ل_ن(لا) = \int_ج^{لا} س_ن(لا)\, ولا ،\quad م_ن(لا) = \int_ج^{لا} ب_ن(لا)\, ولا$$

$$\text{تب}\quad ل_ن(لا) = \int_ج^{لا} ع_1(لا)\, ولا + \int_ج^{لا} ع_2(لا)\, ولا + \ldots + \int_ج^{لا} ع_ن(لا)\, ولا$$

$$\text{اور}\quad \int_ج^{لا} ف(لا)\, ولا = ل_ن(لا) + م_ن(لا)$$

اب چونکہ سلسلہ یکساں طور پر مستدق ہے ہم م کی قیمت ایسی منتخب کر سکتے ہیں کہ

جب ن ≥ م تو باقی حبن (لا)، ا اور ب کے درمیان لا کی ہر قیمت کے لئے صہ سے کم ہو، اس لئے اگر م کی یہ قیمت منتخب کرلی جائے تو ن ≥ م کے لئے مقدار حبن (لا) تعداداً کم ہوگی ∫ج^لا صہ فرلا سے

یعنی صہ (لا - ج) سے، اسلئے اگر ن ≥ م تو فرق

∫ج^لا ف (لا) فرلا - لمن (لا)

تعداداً کم ہوگا صہ (لا - ج) سے اور اس فرق کی انتہا ن ← ∞ کے لئے صفر ہے۔

اسلئے ∫ج^لا ف (لا) فرلا = نہا ن←∞ لمن (لا) = ∫ج^لا ع۱ (لا) فرلا + ∫ج^لا ع۲ (لا) فرلا + ...

مسئلہ ۲ - اگر سلسلہ ع۱ (لا) + ع۲ (لا) + ... مستدق ہو اور ف (لا) کی طرف مائل ہو جبکہ ا ≤ لا ≤ ب تو ف (لا) کا مشتق اوپر کے سلسلہ کو رقم برقم تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے یعنی

ف' (لا) = ع'۱ (لا) + ع'۲ (لا) + ...

بشرطیکہ سلسلہ ع'۱ (لا) + ع'۲ (لا) + ...، لا = ا سے لا = ب تک **یکساں طور** پر مستدق ہو۔

فرض کرو کہ فا (لا) = ع'۱ (لا) + ع'۲ (لا) + ع'۳ (لا) + ...

تب چونکہ ع'۱ (لا) + ع'۲ (لا) + ع'۳ (لا) + ... یکساں طور پر مستدق ہے،

اس لئے مسئلہ (۱) کی رو سے

$$\int_{\text{ج}}^{\text{لا}} \text{فا}(\text{لا})\, \text{و}\text{لا} = \int_{\text{ج}}^{\text{لا}} \text{ع}_1(\text{لا})\, \text{و}\text{لا} + \int_{\text{ج}}^{\text{لا}} \text{ع}_2(\text{لا})\, \text{و}\text{لا} + \ldots\ldots$$

$$= \{\text{ع}_1(\text{لا}) - \text{ع}_1(\text{ج})\} + \{\text{ع}_2(\text{لا}) - \text{ع}_2(\text{ج})\} + \ldots\ldots$$

$$= \text{ع}_1(\text{لا}) + \text{ع}_2(\text{لا}) + \ldots\ldots - \{\text{ع}_1(\text{ج}) + \text{ع}_2(\text{ج}) + \ldots\ldots\}$$

$$= \text{ف}(\text{لا}) - \text{مستقل}$$

اس لئے $\frac{\text{و}}{\text{و}\text{لا}} \int_{\text{ج}}^{\text{لا}} \text{فا}(\text{لا})\, \text{و}\text{لا} = \text{فَ}(\text{لا})$ یعنی $\text{فا}(\text{لا}) = \text{فَ}(\text{لا})$

دفعہ ۴۲ مسئلہ ۲ کی رو سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک قوتی سلسلہ کو رقم برقم تکمل کیا جا سکتا ہے اگر لا دفعہ استدقاق کے اندر واقع ہو۔

اب ہم ثابت کرینگے کہ جو سلسلہ قوتی سلسلہ کو تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے وہ یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے جبکہ دفعہ ۴۲ مسئلہ ۲ کی ترقیم کے مطابق $-\text{ر} < \text{ا} \leq \text{لا} \leq \text{ب} < \text{ر}$، اور اس سلسلے کا مشتق اس لئے اسکو رقم برقم تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ کیونکہ سلسلہ $\sum \text{اِن}\, \text{د}^{\text{ن}}$ مطلق طور پر مستدق ہے اور اسلئے $|\text{اِن}\, \text{د}^{\text{ن}}|$ ہر ن کے لئے محدود ہے یعنی (فرض کرو کہ) ج سے کم ہے۔

سلسلہ کے تفرق سے یہ سلسلہ حاصل ہوگا

$$\text{ا}_1 + 2\,\text{ا}_2\,\text{لا} + 3\,\text{ا}_3\,\text{لا}^2 + \ldots\ldots + \text{ن}\,\text{اِن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \ldots\ldots\ldots$$

اگر صرف عددی قیمتوں کو ملحوظ رکھا جائے تو

$$\text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} = \text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{د}^{\text{ن}-1}\left(\frac{\text{لا}}{\text{د}}\right)^{\text{ن}-1} < \text{ن}\,\frac{\text{ج}}{\text{د}}\left(\frac{\text{لا}}{\text{د}}\right)^{\text{ن}-1}$$

اس لئے مشتقوں کے سلسلہ کی رقمیں ذیل کے سلسلہ کی متناظر رقموں سے تعداداً کم ہیں

$$\frac{\text{ج}}{\text{د}}\left\{1 + 2\left(\frac{\text{لا}}{\text{د}}\right) + 3\left(\frac{\text{لا}}{\text{د}}\right)^{2} + \ldots\ldots\right\}$$

لیکن یہ سلسلہ مطلق طور پر مستدق ہے کیونکہ جانچ کی نسبت $\frac{\text{لا}}{\text{د}}$ ہے جو تعداداً ایک سے کم ہے۔ اسلئے مشتقوں کا سلسلہ یکساں طور پر مستدق ہے جبکہ لا وقفہ (ا، ب) کے اندر کوئی عدد ہو جہاں اعداد ا اور ب ایسے ہیں کہ $-\text{ر} < \text{ا} < \text{ب} < \text{ر}$ (دفعہ ۴۲، مسئلہ ۲)

مثال $\text{لوگ}\,(1+\text{لا}) = \text{لا} - \frac{1}{2}\text{لا}^{2} + \frac{1}{3}\text{لا}^{3} - \ldots\ldots \quad (-1 < \text{لا} \leqq 1)$

تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{1+\text{لا}} = 1 - \text{لا} + \text{لا}^{2} - \ldots\ldots\ldots$$

یہ مساوات درست ہے اگر $-1 < \text{لا} < 1$ لیکن یہ درست نہیں رہتی اگر $\text{لا} = 1$

۴۷ - مثالیں - اس جگہ ہم دو مثالیں حل کرینگے جن میں معلومہ سلسلہ کو تکمل کرنے سے ایک تفاعل کو بطور ایک سلسلہ کے پھیلایا جائیگا۔

(۱) $\text{مس}^{-1}\,\text{لا}$

اگر $-1 < \text{لا} < 1$ تو

$$\frac{1}{1+\text{لا}^{2}} = 1 - \text{لا}^{2} + \text{لا}^{4} - \text{لا}^{6} + \ldots + (-1)^{\text{ن}}\,\text{لا}^{2\text{ن}} + \ldots \quad (1)$$

اس لئے صفر سے لا تک تکمل کرنے سے

$$\text{مس}^{-1}\text{لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{3} + \frac{\text{لا}^5}{5} - \frac{\text{لا}^7}{7} + \dots + (-1)^{\text{ن}} \frac{\text{لا}^{2\text{ن}+1}}{2\text{ن}+1} + \dots \quad (۱)$$

تفصیل (۱) صرف اس صورت میں ثابت کی گئی ہے جبکہ $|\text{لا}| < 1$، سلسلہ (۱) اہتزازی ہے جبکہ $\text{لا} = \pm 1$ لیکن (۱)، $\text{لا} = \pm 1$ کے لئے مستدق ہے، اسلئے ہم ایبل کا مسئلہ (صفحہ ۱۹۲) لگا سکتے ہیں اور یہ حاصل کرسکتے ہیں کہ (۱) اس صورت میں بھی درست رہتا ہے جبکہ $\text{لا} = \pm 1$ ۔

اگر $\text{لا} = 1$ تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (۱_۱)$$

سلسلہ $(۱_۱)$ کو π کے لئے **گریگوری** کا (بعض اوقات **لیب نیٹز** کا) سلسلہ کہتے ہیں، لیکن یہ سرعت سے مستدق نہیں ہوتا، اس لئے حساب لگانے کی غرض سے موزوں نہیں۔ **میکن** کا ضابطہ استعمال کرنے سے بہتر سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\text{مس}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{مس}^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

اس ضابطہ کو استعمال کر کے پھیلاؤ (۱) کی مدد سے π کا محسوب کرنا طالب علم کے لئے اچھی مشق ہوگی۔ $\text{مس}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ اور $\text{مس}^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$ کے سلسلے بڑی سرعت سے مستدق ہوتے ہیں، ان سے π کی قیمت اعشاریہ کے پانچویں یا چھٹے مقام تک بآسانی حاصل ہوتی ہے۔

(۲) $\text{جب}^{-1}\text{لا}$ ۔ اگر $-1 < \text{لا} < 1$ تو ثنائی پھیلاؤ کی رو سے

$$\frac{1}{\sqrt{1-\text{لا}^2}} = (1-\text{لا}^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\text{لا}^2 + \frac{1\times3}{2\times4}\text{لا}^4 + \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\text{لا}^6 + \dots$$

اس لئے صفر سے لا تک تکمل کرنے سے

$$جب^{-1} لا = لا + \frac{1}{2}\,\frac{لا^3}{3} + \frac{1\times3}{2\times4}\,\frac{لا^5}{5} + \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\,\frac{لا^7}{7} + \ldots\ldots$$

ذیل کی مثال میں ہم دیکھینگے کہ ایک سلسلہ کے ذریعہ ایک تکملہ کی تقریبی قیمت کس طرح حاصل ہو سکتی ہے۔

(۳) اگر ایک سادہ رقاص کا طول ل ہو اور یہ خط انتصابی کے دونوں جانب زاویہ عہ میں سے اہتزاز کرے تو اس کے پورے اہتزاز کا وقت

$$= ۴\, ك \sqrt{\frac{ل}{ج}} \quad \text{جہاں}$$

$$ك = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{د\,فہ}{\sqrt{1 - ک^2 جب^2 فہ}} \quad \left(ک = جب \frac{عہ}{2}\right)$$ ك کے لئے ایک سلسلہ مطلوب ہے۔

$(1 - ک^2 جب^2 فہ)^{-\frac{1}{2}}$ کو مسئلہ ثنائی کی رو سے پھیلاؤ اور پھر رقم بر رقم تکمل کرو۔ اس طرح

$$\frac{1}{\sqrt{1 - ک^2 جب^2 فہ}} = 1 + \frac{1}{2} ک^2 جب^2 فہ + \frac{1\times3}{2\times4} ک^4 جب^4 فہ + \ldots$$

جب² فہ، جب⁴ فہ، ..... کے تکملے اس سے قبل دفعہ ۰ا میں معلوم کئے گئے ہیں، اسلئے

$$ك = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 ک^2 + \left(\frac{1\times3}{2\times4}\right)^2 ک^4 + \left(\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\right)^2 ک^6 + \ldots\ldots\right\}$$

اگر عہ چھوٹا ہو تو ک²، ک⁴ ..... کو نظر انداز کر سکتے ہیں، اس صورت میں

$ك = \frac{\pi}{2}$ اور پورے اہتزاز کی مدت $= 2\pi \sqrt{\frac{ل}{ج}}$

(۴) $$\int_{0}^{\pi} \frac{جم\, ر لا\, د لا}{1 - 2 ا\, جم لا + ا^2}$$ (ر مثبت صحیح ہے)

اگر $|\text{ا}| < ۱$ تو مشق ۱۲ سوال ۱۳ کی رُو سے

$$\frac{۱}{۱-۲\,\text{ا}\,\text{جم}\,\text{لا}+\text{ا}^{۲}}=\frac{۱}{۱-\text{ا}^{۲}}\left\{۱+۲\,\text{ا}\,\text{جم}\,\text{لا}+۲\,\text{ا}^{۲}\,\text{جم}\,۲\text{لا}+۲\,\text{ا}^{۳}\,\text{جم}\,۳\text{لا}+\dots\dots\right\}$$

نیز $\int_{۰}^{\pi}\text{جم}\,\text{ن}\,\text{لا}\;\text{جم}\,\text{ر}\,\text{لا}\;\text{ڈ}\text{لا}=۰$ اگر $\text{ن}\neq\text{ر}$

$=\frac{\pi}{۲}$ اگر $\text{ن}=\text{ر}$

اس لئے اگر سلسلہ کو جم ر لا کے ساتھ ضرب دیکر تکمل کیا جائے تو ہر رقم صفر ہو جائے گی سوائے $۲\,\text{ا}^{\text{ر}}\,\text{جم}\,\text{ر}\,\text{لا}\;\text{جم}\,\text{ر}\,\text{لا}$ کے، اس طرح حاصل ہوگا

$$\int_{۰}^{\pi}\frac{\text{جم}\,\text{ر}\,\text{لا}\;\text{ڈ}\text{لا}}{۱-۲\,\text{ا}\,\text{جم}\,\text{لا}+\text{ا}^{۲}}=\frac{\pi\,\text{ا}^{\text{ر}}}{۱-\text{ا}^{۲}}\qquad\dots\dots\dots\dots(۱)$$

اگر $|\text{ا}| > ۱$ تو

$$\frac{۱}{۱-۲\,\text{ا}\,\text{جم}\,\text{لا}+\text{ا}^{۲}}=\frac{۱}{\text{ا}^{۲}}\cdot\frac{۱}{۱-۲\times\frac{۱}{\text{ا}}\,\text{جم}\,\text{لا}+\frac{۱}{\text{ا}^{۲}}}$$

اسے $\frac{۱}{\text{ا}}$ کی قوتوں میں پھیلایا جا سکتا ہے۔ یا (۱) میں ا کی بجائے $\frac{۱}{\text{ا}}$ لکھکر ہم $\frac{۱}{\text{ا}^{۲}}$ سے ضرب دے سکتے ہیں۔ تکملہ کی قیمت ہوگی $\frac{\pi\,\text{ا}^{-\text{ر}}}{\text{ا}^{۲}-۱}$

مشق ۱۳

۱۔ ثابت کرو کہ ذیل کے پھیلاؤ لا کی ہر محدود قیمت کے لئے درست ہیں

(۱) $\text{جب}(\text{لا}+\text{عہ})=\text{جب}\,\text{عہ}+\text{لا}\,\text{جم}\,\text{عہ}-\frac{\text{لا}^{۲}}{|۲}\,\text{جب}\,\text{عہ}-\frac{\text{لا}^{۳}}{|۳}\,\text{جم}\,\text{عہ}+\dots\dots$

(۲) $\text{و}^{\text{لا}}\,\text{جم}\,\text{لا}=۱+\text{لا}-\frac{۲\,\text{لا}^{۳}}{|۳}-\frac{۲^{۲}\,\text{لا}^{۴}}{|۴}-\dots\dots+۲^{\frac{\text{ن}}{۲}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ن}\pi}{۴}\,\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{|\text{ن}}+\dots\dots$

(۳) ق^لا جب لا = لا + لا^۲ + ۲ لا^۳/[۳ − ۲^۲ لا^۵/[۵ − ...... + ۲^(ن/۲) جب (ن π/۴) لا^ن/[ن + ...

(۴) ق^(لا جم عا) جم (لا جب عا) = ۱ + لا جم عا + لا^۲/[۲ جم ۲عا + لا^۳/[۳ جم ۳عا + ...

ثابت کرو کہ عف^ن ق^(لا جم عا) جم (لا جب عا) = ق^(لا جم عا) جم (لا جب عا + ن عا)

۲۔ سوال ۱، (۲)، (۳) سے جمز لا جم لا، جبز لا جب لا، جمز لا جب لا، جبز لا جم لا کے پھیلاؤ حاصل کرو۔

۳۔ ثابت کرو کہ اگر |لا| < ۱ تو

لو (۱ + لا + لا^۲) = لا + لا^۲/۲ − ۲ لا^۳/۳ + لا^۴/۴ + ...

۴۔ جہاں تک رقمیں پھیلاؤ میں دی گئی ہیں وہاں تک ثابت کرو کہ

(۱) قط لا = ۱ + لا^۲/۲ + ۵ لا^۴/۲۴ + ۶۱ لا^۶/۷۲۰

(۲) مس لا = لا + لا^۳/۳ + ۲ لا^۵/۱۵ + ۱۷ لا^۷/۳۱۵

(۳) لا ممس لا = ۱ − لا^۲/۳ − لا^۴/۴۵ − ۲ لا^۶/۹۴۵

جم لا اور جب لا کی بجائے ان کے مرادف سلسلے رکھنے اور تقسیم کرنے سے یہ پھیلاؤ حاصل ہو سکتے ہیں۔ کیا ممس لا مکلارن کے مسئلہ سے پھیلایا جا سکتا ہے؟

۵۔ اگر لا اتنا چھوٹا ہو کہ اس کے مربعے اور اعلیٰ قوتیں نظر انداز کر دی جا سکیں تو ثابت کرو کہ

{(۴ + لا)^(۱/۲) + (۱ + لا)^۳} ÷ {(۱ + ۴ لا)^(۱/۴) + (۱ − لا)^(۱/۵)} = ۳/۲ − ۳۷ لا/۱۲۰

۶۔ اگر $\text{ف}(\text{لا}) = \frac{\text{لا}}{\text{قو}^{\text{لا}} - ۱}$ تو ثابت کرو کہ ف (لا) اور فَ (لا) کی انتہائیں لا ← ۰ کے لئے بالترتیب ۱ اور $-\frac{۱}{۲}$ ہیں۔ نیز مساوات

$$\text{قو}^{\text{لا}}\,\text{ف}(\text{لا}) - \text{ف}(\text{لا}) - \text{لا} = ۰$$

کو ن بار تفرق کرنے سے ثابت کرو کہ

$$\text{قو}^{\text{لا}}\left\{\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا}) + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۱}\,\text{ف}^{(\text{ن}-۱)}(\text{لا}) + \dots + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۱}\,\text{فَ}(\text{لا}) + \text{ف}(\text{لا})\right\} = \text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا})$$

اور اس لئے اگر ن > ۱ تو

$${}_{\text{ن}}\text{ج}_{۱}\,\text{ف}^{(\text{ن}-۱)}(۰) + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۲}\,\text{ف}^{(\text{ن}-۲)}(۰) + \dots + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۱}\,\text{فَ}(۰) + \text{ف}(۰) = ۰$$

جہاں لا ← ۰ کے لئے تفاعلوں کی جو انتہائیں ہیں انہیں لا = ۰ پر ان کی قیمتیں متصور کیا جائے۔

۷۔ $$\frac{\text{لا}}{\text{قو}^{\text{لا}} - ۱} = ۱ - \frac{۱}{۲}\text{لا} + \frac{\text{ب}_۱}{\lfloor ۲}\text{لا}^۲ - \frac{\text{ب}_۲}{\lfloor ۴}\text{لا}^۴ + \frac{\text{ب}_۳}{\lfloor ۶}\text{لا}^۶ - \dots$$

ثابت کرو کہ $\text{ب}_۱ = \frac{۱}{۶}$، $\text{ب}_۲ = \frac{۱}{۳۰}$، $\text{ب}_۳ = \frac{۱}{۴۲}$، ....

$\text{ب}_۱$، $\text{ب}_۲$، $\text{ب}_۳$، .... برنولی کے اعداد ہیں (ملاحظہ ہو کرسٹل کا جبر و مقابلہ، حصہ دوم، باب ۲۸، دفعہ ۶)

۸۔ ثابت کرو کہ $$\frac{\text{لا}}{\text{قو}^{\text{لا}} + ۱} = \frac{\text{لا}}{۲} - (۲^۲ - ۱)\frac{\text{ب}_۱}{\lfloor ۲}\text{لا}^۲ + (۲^۴ - ۱)\frac{\text{ب}_۲}{\lfloor ۴}\text{لا}^۴ - (۲^۶ - ۱)\frac{\text{ب}_۳}{\lfloor ۶}\text{لا}^۶ + \dots$$

۹۔ اگر $\text{ف}(\text{لا}) = \dfrac{\text{جب}^{-1}\text{لا}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{2}}}$ تو ثابت کرو کہ

$$(\text{۱} - \text{لا}^{2})\,\text{فَ}(\text{لا}) - \text{لا}\,\text{ف}(\text{لا}) = \text{۱}$$

اور اگر $|\text{لا}| < \text{۱}$ تو

$$\frac{\text{جب}^{-1}\text{لا}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{2}}} = \text{لا} + \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\,\text{لا}^{3} + \frac{\text{۴}\times\text{۲}}{\text{۵}\times\text{۳}}\,\text{لا}^{5} + \frac{\text{۶}\times\text{۴}\times\text{۲}}{\text{۷}\times\text{۵}\times\text{۳}}\,\text{لا}^{7} + \ldots\ldots$$

۱۰۔ سوال ۹ سے ثابت کرو کہ

$$(\text{۱})\quad \text{طہ} = \text{جب طہ جم طہ}\left(\text{۱} + \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\,\text{جب}^{2}\text{طہ} + \frac{\text{۴}\times\text{۲}}{\text{۵}\times\text{۳}}\,\text{جب}^{4}\text{طہ} + \ldots\right)$$

$$(\text{۲})\quad \text{مس}^{-1}\text{ی} = \frac{\text{ی}}{\text{۱}+\text{ی}^{2}}\left\{\text{۱} + \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\,\frac{\text{ی}^{2}}{\text{۱}+\text{ی}^{2}} + \frac{\text{۴}\times\text{۲}}{\text{۵}\times\text{۳}}\left(\frac{\text{ی}^{2}}{\text{۱}+\text{ی}^{2}}\right)^{2} + \ldots\ldots\right\}$$

رکھو $\text{لا} = \text{جب طہ}$، $\text{مس طہ} = \text{ی}$

۱۱۔ سوال ۹ سے بذریعہ عمل تکمیل حاصل کرو کہ اگر $|\text{لا}| < \text{۱}$ تو

$$\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left[\text{جب}^{-1}\text{لا}\right]^{2} = \frac{\text{لا}^{2}}{\text{۲}} + \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\,\frac{\text{لا}^{4}}{\text{۴}} + \frac{\text{۴}\times\text{۲}}{\text{۵}\times\text{۳}}\,\frac{\text{لا}^{6}}{\text{۶}} + \ldots\ldots$$

۱۲۔ ثابت کرو کہ $\text{جم}(\text{ا جب}^{-1}\text{لا})$ مساوات (۳) دفعہ ۴۵ کو پورا کرتی ہے اور ثابت کرو کہ

اگر $|\text{لا}| < \text{۱}$ تو

$$\text{جم}(\text{ا جب}^{-1}\text{لا}) = \text{۱} - \frac{\text{ا}^{2}}{|\underline{\text{۲}}}\,\text{لا}^{2} - \frac{\text{ا}^{2}(\text{۲}^{2}-\text{ا}^{2})}{|\underline{\text{۴}}}\,\text{لا}^{4} - \frac{\text{ا}^{2}(\text{۲}^{2}-\text{ا}^{2})(\text{۴}^{2}-\text{ا}^{2})}{|\underline{\text{۶}}}\,\text{لا}^{6} - \ldots$$

۱۳۔ $\text{جب}(\text{ا جب}^{-1}\text{لا})$ اور $\text{جم}(\text{ا جب}^{-1}\text{لا})$ کے سلسلہ سے ثابت کرو کہ

$$(\text{۱})\quad \text{جب م طہ} = \text{م جب طہ} - \frac{\text{م}(\text{م}^{2}-\text{۱})}{|\underline{\text{۳}}}\,\text{جب}^{3}\text{طہ} + \frac{\text{م}(\text{م}^{2}-\text{۱})(\text{م}^{2}-\text{۳}^{2})}{|\underline{\text{۵}}}\,\text{جب}^{5}\text{طہ} - \ldots$$

(۲) $\text{جم م طہ} = ۱ - \frac{\text{م}^2}{\underline{|۲}}\,\text{جب}^2\text{طہ} + \frac{\text{م}^2(\text{م}^2-۲^2)}{\underline{|۴}}\,\text{جب}^4\text{طہ} - \ldots$

$\frac{\text{جم م طہ}}{\text{جم طہ}}$ ، $\frac{\text{جب م طہ}}{\text{جم طہ}}$ کے لئے سلسلے $\text{جب}(\text{م جب}^{-1}\text{لا})$ اور $\text{جم}(\text{م جب}^{-1}\text{لا})$ کو تفرق کرنے سے حاصل ہوسکتے ہیں۔

۱۴۔ اگر $|\text{لا}| < ۱$ تو ثابت کرو کہ

(۱) $\text{لوک}\left\{\text{لا} + \sqrt{۱+\text{لا}^2}\right\} = \text{لا} - \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{لا}^3}{۳} + \frac{۱\times۳}{۲\times۴}\,\frac{\text{لا}^5}{۵} - \frac{۱\times۳\times۵}{۲\times۴\times۶}\,\frac{\text{لا}^7}{۷} + \ldots\ldots$

(۲) $\frac{۱}{۲}\left\{\text{لوک}\,(۱+\text{لا})\right\}^2 = \frac{\text{لا}^2}{۲} - (۱+\frac{۱}{۲})\,\frac{\text{لا}^3}{۳} + (۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳})\,\frac{\text{لا}^4}{۴} - (۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴})\,\frac{\text{لا}^5}{۵} + \ldots\ldots$

۱۵۔ اگر $|\text{لا}| < ۱$ تو ثابت کرو کہ

(۱) $\text{و}^{\text{ک جب}^{-1}\text{لا}} = ۱ + \text{ک لا} + \frac{\text{ک}^2}{\underline{|۲}}\,\text{لا}^2 + \frac{\text{ک}(\text{ک}^2+۱^2)}{\underline{|۳}}\,\text{لا}^3 + \frac{\text{ک}^2(\text{ک}^2+۲^2)}{\underline{|۴}}\,\text{لا}^4 + \ldots\ldots$

(۲) $\left\{\text{لا} + \sqrt{۱+\text{لا}^2}\right\}^{\text{ک}} = ۱ + \text{ک لا} + \frac{\text{ک}^2}{\underline{|۲}}\,\text{لا}^2 + \frac{\text{ک}(\text{ک}^2-۱^2)}{\underline{|۳}}\,\text{لا}^3 + \frac{\text{ک}^2(\text{ک}^2-۲^2)}{\underline{|۴}}\,\text{لا}^4 + \ldots\ldots$

استقاق ثابت کرنے کے لئے ملاحظہ ہو کہ ہر دو (۱) اور (۲) میں طاق رقموں کے

لینے سے جو سلسلے بنتے ہیں اور جفت رقموں کے لینے سے جو سلسلے بنتے ہیں وہ جداگانہ متدق ہیں یا متسع بموجب اسکے کہ |لا| کم ہو یا بڑا ہو ایک سے۔

۱۶۔ معمولی ترقیم کے مطابق ثابت کرو کہ ناقص کا محیط

$$\text{۴ا} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{۱} - \text{ز}^2 \,\text{جب}^2\, \text{فہ})\, \text{فرفہ} = \text{۲}\pi\text{ا} \left\{ \text{۱} - \left(\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)^2 \frac{\text{ز}^2}{\text{۱}} - \left(\frac{\text{۳}\times\text{۱}}{\text{۴}\times\text{۲}}\right)^2 \frac{\text{ز}^4}{\text{۳}} - \left(\frac{\text{۵}\times\text{۳}\times\text{۱}}{\text{۶}\times\text{۴}\times\text{۲}}\right)^2 \frac{\text{ز}^6}{\text{۵}} - \ldots \right\}$$

۱۷۔ ثابت کرو کہ (۱) چھوٹے خروج المرکز ز والے ایک ناقص کا گھیرا مساوی رقبہ والے ایک دائرہ کے گھیرے سے تقریباً اس نسبت $\text{۱} + \frac{\text{۳ز}^4}{\text{۶۴}}$ سے بڑا ہوتا ہے

(۲) ایک گردشی ناقص نما (خواہ یہ چپٹا ہو یا لمبوترا) جس کا خروج ز چھوٹا ہو اسکی سطح منحنی مساوی حجم والے ایک کرہ کی سطح منحنی سے بقدر اپنی کسر $\frac{\text{۲ز}^4}{\text{۴۵}}$ کے زیادہ ہوتی ہے۔

۱۸۔ $\frac{\text{جم طہ} + \text{لا}}{\text{۱} + \text{۲لا جم طہ} + \text{لا}^2}$ کو پہلے بلحاظ لا کے، پھر بلحاظ طہ کے تکمل کرنے سے (ملاحظہ ہو مشق ۱۲، ۱۲) ثابت کرو کہ اگر |لا| < ۱ تو

$$(\text{۱})\quad \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{لوک}\,(\text{۱} + \text{۲لا جم طہ} + \text{لا}^2) = \text{لا جم طہ} - \frac{\text{لا}^2}{\text{۲}}\,\text{جم ۲طہ} + \frac{\text{لا}^3}{\text{۳}}\,\text{جم ۳طہ} - \ldots$$

$$(\text{۲})\quad \text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{لا جب طہ}}{\text{۱} + \text{لا جم طہ}}\right) = \text{لا جب طہ} - \frac{\text{لا}^2}{\text{۲}}\,\text{جب ۲طہ} + \frac{\text{لا}^3}{\text{۳}}\,\text{جب ۳طہ} - \ldots$$

۱۹۔ مثال ۱۸ سے لا ← ۱ کے لئے انتہا لینے سے ثابت کرو کہ اگر $-\pi <$ طہ $<$

تو (۱) جم ط $-\frac{۱}{۲}$ جم ۲ط $+\frac{۱}{۳}$ جم ۳ط $-$ ...... $=$ لوک (۲ جم $\frac{۱}{۲}$ ط)

(۲) جب ط $-\frac{۱}{۲}$ جب ۲ط $+\frac{۱}{۳}$ جب ۳ط $-$ ..... $=\frac{۱}{۲}$ ط

ثابت کرو کہ سلسلہ (۲) تفاعل $\frac{\text{ط}}{۲}$ کو صرف اسی حالت میں تعبیر کرتا ہے جبکہ $-\pi <$ ط $< \pi$ اور سلسلہ کی قیمت جبکہ ط $= \pi$ صفر ہے لیکن ط $\to \pi$ کے لئے سلسلہ کی انتہا $\frac{\pi}{۲}$ ہے۔

نیز ثابت کرو کہ اگرچہ اوپر کے دونوں سلسلے مستدق ہیں لیکن ان میں سے کوئی بھی رقم برقم تفرق نہیں ہو سکتا (مشق ۱۲، ۱۵)

۲۰۔ مثال ۱۹ میں ط مساوی $\pi -$ لا رکھنے سے حاصل کرو کہ اگر $۰ <$ لا $< ۲\pi$

تو (۱) جم لا $+\frac{۱}{۲}$ جم ۲لا $+\frac{۱}{۳}$ جم ۳لا $+$ ..... $= -$ لوک (۲ جب $\frac{\text{لا}}{۲}$)

(۲) جب لا $+\frac{۱}{۲}$ جب ۲لا $+\frac{۱}{۳}$ جب ۳لا $+$ ..... $=\frac{\pi}{۲}-\frac{\text{لا}}{۲}$

۲۱۔ سوال ۲۰ (۲) کو تکمیل کرنے سے ثابت کرو کہ اگر $۰ \leqq$ لا $\leqq ۲\pi$ تو

$$\frac{\text{لا}^۲}{۴}-\frac{\pi\,\text{لا}}{۲}=\left(\frac{\text{جم لا}}{۱^۲}+\frac{\text{جم ۲لا}}{۲^۲}+\frac{\text{جم ۳لا}}{۳^۲}+\ldots\right)-\text{ج}$$

جہاں $\text{ج}=\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\ldots\ldots$

سلسلہ لا کی ہر قیمت کے لئے یکساں طور پر مستدق ہے، اس لئے تکمیل کے بعد ہم لا کو قیمتیں صفر اور ۲π دے سکتے ہیں، لیکن یہ دوری سلسلہ ہے اور وقفہ ($۰، ۲\pi$) کے باہر تفاعل $\frac{\text{لا}^۲}{۴}-\frac{\pi\,\text{لا}}{۲}$ کو تعبیر نہیں کرتا۔

۲۲۔ سوال ۲۱ سے حاصل کرو کہ

(۱) $\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۵^۲}+\ldots\ldots=\frac{\pi^۲}{۸}$ (۲) $\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\ldots\ldots=\frac{\pi^۲}{۶}$

(۳) $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots\ldots=\frac{\pi^2}{12}$

(۱) حاصل کرنے کے لئے سوال ۲۱ میں رکھو $\text{لا}=\pi$، (۲) اور (۳) بآسانی حاصل ہوتے ہیں (ملاحظہ ہو مشق ۱۲، سوال ۳)

۲۳- ثابت کرو کہ

(۱) $\int_0^1 \frac{1}{\text{لا}}\,\text{لوک}(1+\text{لا})\,\text{ڈلا}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots\ldots=\frac{\pi^2}{12}$

(۲) $\int_0^1 \frac{1}{\text{لا}}\,\text{لوک}(1-\text{لا})\,\text{ڈلا}=-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)=-\frac{\pi^2}{6}$

(۳) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{مس طہ لوک (مم طہ) ڈطہ}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots\right)$

$=\frac{\pi^2}{48}$

(۳) حاصل کرنے کے لئے رکھو مس طہ = لا اور یاد رہے کہ $\text{نہا}_{\text{لا}\to 0}\ \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{لوک لا}=0$ (مشق ۷، سوال ۱۰، حصہ اول)

۲۴- ثابت کرو کہ

(۱) $\frac{\text{جم لا}}{1^2}-\frac{\text{جم ۲لا}}{2^2}+\frac{\text{جم ۳لا}}{3^2}-\frac{\text{جم ۴لا}}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12}-\frac{\text{لا}^2}{4}$

(۲) $\frac{\text{جم لا}}{1^2}+\frac{\text{جم ۳لا}}{3^2}+\frac{\text{جم ۵لا}}{5^2}+\ldots\ldots=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi\,\text{لا}}{4}$

(۱) میں $-\pi \leqq \text{لا} \leqq \pi$، (۲) میں $0 \leqq \text{لا} \leqq \pi$

۲۵- ثابت کرو کہ لا کی ہر محدود قیمت کے لئے

(۱) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\text{جم (لا جم طہ) ڈطہ}=1-\frac{\text{لا}^2}{2^2}+\frac{\text{لا}^4}{2^2\times 4^2}-\frac{\text{لا}^6}{2^2\times 4^2\times 6^2}+\ldots$

(۲) $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi$ جم (لا جم طہ) جب^{2ر} طہ ؎ طہ = $\frac{|(2ر)}{(|ر\ 2^ر)^2}\left\{1 - \frac{لا^2}{2^2(2ر+2)}\right.$

$\left. + \frac{لا^4}{2\times 4(2ر+2)(2ر+4)} - \cdots\right\}$

۲۶۔ اگر سوال ۲۵ (۱) میں ها سلسلہ (یا تکملہ) کو تعبیر کرے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ؤ^2 ها}{ؤ لا^2} + \frac{1}{لا}\frac{ؤ ها}{ؤ لا} + ها = 0$$

۲۷۔ اگر سوال ۲۵ (۲) میں ع سلسلہ (یا تکملہ) کو تعبیر کرے اور اگر ها = لا^ر ع تو ثابت کرو کہ

$$لا^2 \frac{ؤ^2 ها}{ؤ لا^2} + لا \frac{ؤ ها}{ؤ لا} + (لا^2 - ر^2)\, ها = 0$$

ها، رتبہ ر کا بیسل کا تفاعل کہلاتا ہے اور (سوائے ایک عددی جزو ضربی کے) اسے ہم بالعموم جر (لا) سے تعبیر کرینگے۔ سوال ۲۶ کا تفاعل، جه (لا) ہے [ملاحظہ ہوں گرے اور میتھیو کے بیسلی تفاعل]

۲۸۔ اگر ن مثبت صحیح ہو تو ثابت کرو کہ

جب لا (۱ + ۲ جم ۲ لا + ۲ جم ۴ لا + ... + ۲ جم ۲ ن لا) = جب (۲ ن + ۱) لا

اور اس سے پھر ثابت کرو کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{جب(2ن+1)لا}{جب\ لا}\ ؤلا = \frac{\pi}{2}$$

۲۹۔ ذیل کے نتائج ثابت کرو، ا مثبت ہے اور ر مثبت صحیح ہے۔

(۱) $\int_0^\pi$ لوک (۱ - ۲ ا جم لا + ا^2) ؤلا = ۰ اگر ا < ۱

= ۲ π لوک ا اگر ا > ۱

(۲) $\int_0^\pi \frac{لا\ جب\ لا\ ؤلا}{1 - 2ا\ جم\ لا + ا^2} = \frac{\pi}{ا}$ لوک (۱ + ا) اگر ا < ۱

$$= \frac{\pi}{\text{ر}} \text{لوک} \left(۱ + \frac{۱}{\text{ر}}\right) \text{ اگر ر} > ۱$$

(۳) $$\int_{\text{ب}}^{\pi} \text{جم رلا لوک} (۱ - ۲\text{ر جم لا} + \text{ر}^۲)\, \text{فرلا} = -\frac{\pi \text{ر}^{\text{ر}}}{\text{ر}} \text{ اگر ر} < ۱$$

$$= -\frac{\pi \text{ر}^{-\text{ر}}}{\text{ر}} \text{ اگر ر} > ۱$$

(۴) $$\int_{\text{ب}}^{\pi} \frac{\text{جب لا جب رلا فرلا}}{۱ - ۲\text{ر جم لا} + \text{ر}^۲} = \frac{\pi}{۲} \text{ر}^{\text{ر}-۱} \text{ اگر ر} < ۱$$

$$= \frac{\pi}{۲} \text{ر}^{-(\text{ر}+۱)} \text{ اگر ر} > ۱$$

۳۰۔ ثابت کرو کہ (۱) $$\int_{\text{ب}}^{\text{لا}} \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} \text{فرلا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^۳}{۳\lfloor ۳} + \frac{\text{لا}^۵}{۵\lfloor ۵} - \dots$$

(۲) $$\int_{\text{ب}}^{۱} \text{لا}^{\text{لا}}\, \text{فرلا} = ۱ - \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۳} - \frac{۱}{۴^۴} + \dots$$

(۲) حاصل کرنے کے لئے $\text{لا}^{\text{لا}}$ کو اِس شکل $\text{ﮦ}^{\text{لا لوک لا}}$ میں رکھو اور پھیلاؤ۔

باب ہفتم

ٹیلر کا مسئلہ دو یا زیادہ متغیروں کے تفاعلوں کی صورت میں۔ اس مسئلہ کا استعمال

۴۸ ۔ دو یا زیادہ متغیروں کے تفاعلوں کے لئے ٹیلر کا مسئلہ۔ ایک سے زیادہ متغیروں کی صورت میں اب ہم مختصر طور پر ایسے پھیلاؤ حاصل کرینگے جو ٹیلر کے مسئلہ کے جواب ہیں۔ باقیات کے لئے جملے پیچیدہ ہیں، انہیں نہیں لکھا جائیگا اگرچہ انکی شکل کا اندازہ سابق ثبوت سے بآسانی ہوسکیگا۔ اگر ہم باقیوں کی کوئی مناسب بحث اسجگہ اختیار کریں تو جبریہ صورتوں کے نظریہ میں بہت دور تک ہم چلے جائینگے۔ یہاں یہ تسلیم کرلیا جائے گا کہ تفاعل اور ان کے تمام مشتق جو باقی تک اور باقی میں شریک ہوتے ہیں وہ سب کے سب مسلسل ہیں۔

سب سے پہلے ہم ف (لا + ھ، ما + ک) کا پھیلاؤ ھ اور ک کی قوتوں میں حاصل کرینگے۔ یہ پھیلاؤ دفعہ ۴۳ کے ضابطہ (۱۳) کا جواب ہے۔

ف (لا + ھ، ما + ک) تفاعل ف (لا + ھ ت، ما + ک ت) کی قیمت ہے جبکہ ت = ۱

اب اگر ف (لا + ھ ت، ما + ک ت) کو ت کا تفاعل خیال کیا جائے تو اسے ہم **مکلارن** کے مسئلہ سے پھیلا سکتے ہیں۔ اختصار کی خاطر

ف (لا + ھ ت، ما + ک ت) کو فا (ت) سے تعبیر کرو اور اسکے ت مشتقوں کو زبروں سے بیان کرو۔ تب

$$\text{فا}(\text{ت}) = \text{فا}(\cdot) + \text{ت}\,\text{فا}'(\cdot) + \frac{\text{ت}^2}{\underline{|2}}\,\text{فا}''(\cdot) + \ldots + \text{حب}_{\text{ی}}(\text{ت}) + \ldots \quad (1)$$

اب ہم یہ دیکھینگے کہ فاَ(ت) کے ت، مشتق، لا، ما کے لحاظ سے فا(ت) کے جزوی مشتقوں میں کس طرح بیان ہو سکتے ہیں۔

رکھو لا + ھ ت = عہ، ما + ک ت = بہ ......(۲)

$$\text{تب فاَ(ت)} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف عہ}}\,\frac{\text{و عہ}}{\text{و ت}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف بہ}}\,\frac{\text{و بہ}}{\text{و ت}} = \text{ھ}\,\frac{\text{جف فا}}{\text{جف عہ}} + \text{ک}\,\frac{\text{جف فا}}{\text{جف بہ}} \quad ......(۳)$$

$$\text{لیکن } \frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف عہ}} \times \frac{\text{جف عہ}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف عہ}} \text{ کیونکہ (۲) سے}$$

$$\frac{\text{جف عہ}}{\text{جف لا}} = ۱ \text{ اور اسی طرح } \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف بہ}}$$

اس طرح رشتہ (۳) ہو جاتا ہے

$$\text{فاَ(ت)} = \text{ھ}\,\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} + \text{ک}\,\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}} \quad ......(۴)$$

ربط (۴) کا مطلب شاید اچھی طرح سمجھ میں آئیگا اگر کسی خاص صورت پر غور کیا جائے

مثلاً $\text{فا(ت)} = (\text{لا + ھ ت})^{\text{م}}\,(\text{ما + ک ت})^{\text{ن}}$۔ اس جملہ کے ساتھ اوپر کا سلوک کرنے سے فاَ(ت) معلوم کیا جائے، اسی طرح معلوم ہوگا کہ فاَ(ت) بھی لا + ھ ت اور ما + ک ت کا تفاعل ہے اور اس لئے فاً(ت) حسب ذیل طریقہ سے معلوم ہو سکتا ہے۔

اب فاً(ت) تفاعل فاَ(ت) کا ت مشتق ہے اور (۴) میں فا(ت) کی بجائے فاَ(ت) رکھنے سے حاصل ہو سکیگا۔ پس

$$\text{فاً(ت)} = \text{ھ}\,\frac{\text{جف فاَ}}{\text{جف لا}} + \text{ک}\,\frac{\text{جف فاَ}}{\text{جف ما}}$$

$$= \text{ھ}\left\{\text{ھ}\frac{\text{جف}^2\text{فا}}{\text{جف لا}^2} + \text{ک}\frac{\text{جف}^2\text{فا}}{\text{جف لا جف ما}}\right\} + \text{ک}\left\{\text{ھ}\frac{\text{جف}^2\text{فا}}{\text{جف ما جف لا}} + \text{ک}\frac{\text{جف}^2\text{فا}}{\text{جف ما}^2}\right\}$$

$$= \text{ھ}^2\frac{\text{جف}^2\text{فا}}{\text{جف لا}^2} + ۲\,\text{ھک}\frac{\text{جف}^2\text{فا}}{\text{جف لا جف ما}} + \text{ک}^2\frac{\text{جف}^2\text{فا}}{\text{جف ما}^2} \quad \ldots\ldots (۵)$$

اسی طرح

$$\text{فا}'''(\text{ت}) = \text{ھ}^3\frac{\text{جف}^3\text{فا}}{\text{جف لا}^3} + ۳\,\text{ھ}^2\text{ک}\frac{\text{جف}^3\text{فا}}{\text{جف لا}^2\text{جف ما}}$$

$$+ ۳\,\text{ھک}^2\frac{\text{جف}^3\text{فا}}{\text{جف لا جف ما}^2} + \text{ک}^3\frac{\text{جف}^3\text{فا}}{\text{جف ما}^3} \quad \ldots\ldots (۶)$$

مشتق کی ترکیب کا قانون اب صاف ظاہر ہے، ابھی ہم دیکھینگے کہ $\text{فا}^{(ن)}(\text{ت})$ کی قیمت کس طرح منضبط شکل میں لکھی جا سکتی ہے، مگر اس سے پہلے ہم $\text{فا}'(۰)$، $\text{فا}''(۰)$، $\text{فا}'''(۰)$ کی قیمتوں پر غور کرتے ہیں۔

فا(۰) = ف(لا، ما) اور $\text{فا}'(۰)$، $\text{فا}''(۰)$، $\text{فا}'''(۰)$ کی قیمتیں (۴)، (۵)، (۶) میں فا(ت) کی بجائے محض ف(لا، ما) رکھنے سے حاصل ہو سکتی ہیں۔
باقی کی لنگرانج کی شکل حاصل کرنے کے لئے ہمیں $\text{فا}^{(ن)}(\text{ت})$ میں ت کی بجائے طہ ت رکھنا چاہئے جہاں طہ کسر واجب ہے، اگر ن = ۳ تو (۶) میں فا(ت) کی بجائے ہمیں ف(لا + ھ طہ ت، ما + ک طہ ت) رکھنا ہوگا۔

اس طرح ربط (۱) ہو جائیگا

$$\text{ف}(\text{لا} + \text{ھت}، \text{ما} + \text{کت}) = \text{ف}(\text{لا}، \text{ما}) + \text{ت}\left(\text{ھ}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \text{ک}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}\right)$$

$$+ \frac{\text{ت}^2}{\underline{۲}}\left(\text{ھ}^2\frac{\text{جف}^2\text{ف}}{\text{جف لا}^2} + ۲\,\text{ھک}\frac{\text{جف}^2\text{ف}}{\text{جف لا جف ما}} + \text{ک}^2\frac{\text{جف}^2\text{ف}}{\text{جف ما}^2}\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots (۷)$$

ف (لا + ھ، ما + ک) کا پھیلاؤ حاصل کرنے کے لئے (۷) میں ت کی بجائے ایک رکھو

$$\text{ف}(\text{لا}+\text{ھ}،\ \text{ما}+\text{ک}) = \text{ف}(\text{لا}،\ \text{ما}) + \text{ھ}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \text{ک}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$$

$$+ \frac{1}{\lfloor 2}\left(\text{ھ}^2\frac{\text{جف}^2\text{ف}}{\text{جف لا}^2} + 2\,\text{ھ ک}\frac{\text{جف}^2\text{ف}}{\text{جف لا جف ما}} + \text{ک}^2\frac{\text{جف}^2\text{ف}}{\text{جف ما}^2}\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots \quad (۸)$$

(۸) سے مطلوبہ پھیلاؤ حاصل ہوتا ہے، پھیلاؤ (۷) بھی نہایت کارآمد ہے۔

فاَ(ت)، فاً(ت) کی جو قیمتیں (۵) اور (۶) میں لکھی گئی ہیں وہ رموز کے پیرایہ میں زیادہ منضبط شکل میں اس طرح لکھی جا سکتی ہیں

$$\left(\text{ھ}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{ک}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)\text{فا}،\quad \left(\text{ھ}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{ک}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)^2\text{فا} \ldots (۹)$$

بشرطیکہ ان کا یہ مفہوم ہمارے پیش نظر رہے، مفہوم ـ

جملہ ثنائی کو پھیلایا جائے گویا $\text{ھ}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}$ اور $\text{ک}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}$ مفرد مقداریں ہیں، پھیلاؤ کے بعد ہر رقم کے ساتھ آخر میں فا کو بطور جزو ضربی کے لکھا جائے،

پھر اس طرح کی رقم $3\left(\text{ھ}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\right)^2\left(\text{ک}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)\text{فا}$ کی بجائے

پہلے $3\,\text{ھ}^2\text{ک}\frac{\text{جف}^3}{\text{جف لا}^2\text{جف ما}}\text{فا}$ پھر $3\,\text{ھ}^2\text{ک}\frac{\text{جف}^3\text{فا}}{\text{جف لا}^2\text{جف ما}}$ رکھا جائے۔

اس ترقیم کے موافق (۷) میں (م + ۱) ویں رقم ہوگی

$$\frac{\text{ت}^{\text{م}}}{\lfloor\text{م}}\left(\text{ھ}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{ک}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)^{\text{م}}\text{ف}$$

$$= \frac{\text{ت}^{\text{م}}}{|\text{م}}\left(\text{ھ}^{\text{م}} \frac{\text{جف}^{\text{م}}\text{ف}}{\text{جف لا}^{\text{م}}} + \text{م} \, \text{ھ}^{\text{م}-۱}\text{ک} \frac{\text{جف}^{\text{م}}\text{ف}}{\text{جف لا}^{\text{م}-۱}\,\text{جف ما}} + \ldots\ldots + \text{ک}^{\text{م}} \frac{\text{جف}^{\text{م}}\text{ف}}{\text{جف ما}^{\text{م}}}\right)$$

شکل (۸) میں لا کی بجائے ھ اور ما کی بجائے ک رکھنے سے ف(لا + ھ، ما + ک) کا پھیلاؤ لا، ما کی قوتوں میں حاصل ہوسکتا ہے، لاحقوں والی ترقیم استعمال کرنے سے

$$\text{ف}(\text{لا}+\text{ھ}، \text{ما}+\text{ک}) = \text{ف}(\text{ھ}، \text{ک}) + \text{لا}\,\text{ف}_{\text{ھ}} + \text{ما}\,\text{ف}_{\text{ک}} + \frac{۱}{|۲}\left(\text{لا}^{۲}\text{ف}_{\text{ھھ}} + ۲\,\text{لا}\,\text{ما}\,\text{ف}_{\text{ھک}} + \text{ما}^{۲}\text{ف}_{\text{کک}}\right) + \ldots\ldots \quad (۱۰)$$

$\text{ف}_{\text{ھ}}$، $\text{ف}_{\text{ھھ}}$ مرتب کرنے کے لئے ہمیں ف(لا، ما) کو بلحاظ لا اور ما کے تفرق کرنا چاہیئے اور پھر لا کی بجائے ھ اور ما کی بجائے ک رکھنا چاہیے۔

(۱۰) میں اگر ہم چاہیں تو رکھ سکتے ہیں ھ = ۰، ک = ۰، اس طرح ہمیں ف(لا، ما) کا پھیلاؤ سکلارن کے مسئلہ کے جواب میں ملیگا۔

اگر متغیر تین یا زیادہ ہوں تو پھیلاؤ اسی شکل کے ہونگے جو اوپر حاصل ہوئے، مثلاً تین متغیروں کی صورت میں

$$\text{ف}(\text{لا}+\text{ھ}، \text{ما}+\text{ک}، \text{ی}+\text{ل}) = \text{ف}(\text{لا}، \text{ما}، \text{ی}) + \text{ھ}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \text{ک}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} + \text{ل}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} + \frac{۱}{|۲}\left(\text{ھ}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{ک}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} + \text{ل}\frac{\text{جف}}{\text{جف ی}}\right)^{۲}\text{ف} + \ldots\ldots \quad (۱۱)$$

جہاں رموزی جملات کی تعبیر وہی ہے جو اوپر بیان ہوئی۔

۴۹ - مثالیں (۱) سطح ف (لا، ما، ی) = ۰ کے نقطہ ن (ھ، ک، ل) پر مماسی مستوی سطح کی مساوات معلوم کرو۔
ن میں سے گذرنے والے کسی خط مستقیم کی مساواتیں جسکی جیوب التمام لہ، مہ، نہ ہوں یہ ہیں

$$\frac{لا - ھ}{لہ} = \frac{ما - ک}{مہ} = \frac{ی - ل}{نہ} = ر \quad .... (۱)$$

جہاں ر فاصلہ ہے (لا، ما، ی) کا (ھ، ک، ل) سے۔ فرض کرو کہ (لا، ما، ی) سطح پر کا نقطہ ق ہے۔ تب لا = ھ + لہ ر، ما = ک + مہ ر، ی = ل + نہ ر، ف (لا، ما، ی) = ۰
ف (لا، ما، ی) = ۰ میں لا، ما، ی کی بجائے اوپر کی قیمتیں مندرج کرنے اور ٹیلر کے مسئلہ سے پھیلانے سے

$$۰ = ف (ھ، ک، ل) + ر (لہ ف_ھ + مہ ف_ک + نہ ف_ل)$$
$$+ ط ر^۲ + ... (۲)$$

لیکن ف (ھ، ک، ل) = ۰ کیونکہ ن سطح پر واقع ہے، اس لئے ر کی ایک قیمت جو (۲) سے حاصل ہوتی ہے صفر ہے۔ (۲) کی باقی اصلیں نقطہ ن سے اُن فاصلوں کو تعبیر کرتی ہیں جہاں خط (۱) سطح سے ملتا ہے۔ فرض کرو کہ ر$_۱$ = ن ق تب چونکہ ر صفر نہیں ہے، اس لئے مساوات (۲) ہو جاتی ہے

$$۰ = لہ ف_ھ + مہ ف_ک + نہ ف_ل + ط ر_۱ + ... (۳)$$

جیسے ر$_۱$ صفر کی طرف مائل ہوتا ہے خط (۱) مماس کا محل اختیار کرتا ہے، لیکن (۳) سے ظاہر ہے کہ جیسے ر$_۱$ صفر ہوتا ہے لہ ف$_ھ$ + مہ ف$_ک$ + نہ ف$_ل$ بھی صفر ہوتا ہے۔

پس معلوم ہوا کہ خط (۱) مماسی خط ہوگا اگر لہ، مہ، نہ اس مساوات کو پورا کریں

$$\text{لہ}\,\text{ف}_{\text{ھ}} + \text{مہ}\,\text{ف}_{\text{ک}} + \text{نہ}\,\text{ف}_{\text{ل}} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

اگر ہم مساواتوں (۱) اور (۴) سے لہ، مہ، نہ کو ساقط کر دیں تو ہمیں مساوات ملیگی جو ن میں سے گذرنے والے کسی مماسی خط کے کسی نقطہ کے محددوں کے لئے درست ہوگی، ان مقداروں کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگا

$$(\text{لا} - \text{ھ})\,\text{ف}_{\text{ھ}} + (\text{ما} - \text{ک})\,\text{ف}_{\text{ک}} + (\text{ی} - \text{ل})\,\text{ف}_{\text{ل}} = ۰$$

یہ وہی مساوات ہے جو دفعہ ۱۹ حصۂ اول میں معلوم کی گئی، صرف ترقیم کا فرق ہے۔

مثال ۲۔ متجانس تفاعلوں کے لئے آئلر کا مسئلہ۔

تعریف۔ اگر دو یا زیادہ متغیروں کا تفاعل د ایسا ہو کہ متغیروں لا، ما، ..... کی بجائے بالترتیب لہ لا، لہ ما، ..... لکھنے سے تفاعل د، لہ$^{\text{ن}}$ د ہو جائے خواہ مقدار لہ کچھ ہی ہو تو د کو ن' ویں درجہ کا متجانس تفاعل کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ د = ف (لا، ما) دو متغیروں لا، ما میں ن' ویں درجہ کا متجانس تفاعل ہے، تب ہم ثابت کرینگے کہ

$$\text{لا}\,\text{د}_{\text{لا}} + \text{ما}\,\text{د}_{\text{ما}} + \text{ی}\,\text{د}_{\text{ی}} = \text{ن}\,\text{د} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\text{لا}^{۲}\,\text{د}_{\text{لالا}} + ۲\,\text{لا}\,\text{ما}\,\text{د}_{\text{لاما}} + \text{ما}^{۲}\,\text{د}_{\text{ماما}} = \text{ن}(\text{ن}-۱)\,\text{د} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

لا، ما کی بجائے (۱ + ت) لا، (۱ + ت) ما یعنی لا + ت لا، ما + ت ما رکھو، اس طرح د ہو جائے گا $(۱+\text{ت})^{\text{ن}}$ د، پس

$$\text{ف}\,(\text{لا} + \text{ت}\,\text{لا}،\ \text{ما} + \text{ت}\,\text{ما}) = (۱+\text{ت})^{\text{ن}}\,\text{د}$$

دائیں جانب کے تفاعل کو ٹیلر کے مسئلہ سے اور بائیں جانب کے تفاعل کو مسئلہ ثنائی سے پھیلانے سے حاصل ہوگا

$$\text{ف}(\text{لا، ما}) + \text{ت}(\text{لا}\,\text{ف}_{\text{لا}} + \text{ما}\,\text{ف}_{\text{ما}}) + \frac{\text{ت}^2}{|\underline{2}}(\text{لا}^2\,\text{ف}_{\text{لالا}} + 2\,\text{لا}\,\text{ما}\,\text{ف}_{\text{لاما}} + \text{ما}^2\,\text{ف}_{\text{ماما}})$$

$$+ \ldots\ldots = \text{ی} + \text{ن}\,\text{ت}\,\text{ی} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}\,\text{ت}^2\,\text{ی} + \ldots\ldots$$

ت کی متماثل قوتوں کے سروں کو مساوی رکھنے سے مساواتیں (۱) اور (۲) حاصل ہوتی ہیں، یہ دیکھنا آسان ہے کہ

$$\left(\text{لا}\frac{\text{ج}}{\text{ج}\,\text{لا}} + \text{ما}\frac{\text{ج}}{\text{ج}\,\text{ما}}\right)^{\text{م}}\text{ی} = \text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\ldots(\text{ن}-\text{م}+1)\,\text{ی}$$

اور انہی مسائل کی تین یا زیادہ متغیروں والے متجانس تفاعلوں کی صورت میں توسیع کی جا سکتی ہے۔

مثلاً $\text{لا}\,\text{ی}_{\text{لا}} + \text{ما}\,\text{ی}_{\text{ما}} + \text{ہی}\,\text{ی}_{\text{ہی}} = \text{ن}\,\text{ی} \ldots\ldots\ldots (3)$

مثال۔ فرض کرو کہ $\text{ی} = \text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)$، اس صورت میں ی صفر درجہ کا ہے

$$\text{ی}_{\text{لا}} = \frac{1}{1+\frac{\text{ما}^2}{\text{لا}^2}} \times \frac{-\text{ما}}{\text{لا}^2} = \frac{-\text{ما}}{\text{لا}^2+\text{ما}^2}\,،\quad \text{ی}_{\text{ما}} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}^2+\text{ما}^2}$$

$$\text{لا}\,\text{ی}_{\text{لا}} + \text{ما}\,\text{ی}_{\text{ما}} = \frac{-\text{لا}\,\text{ما}}{\text{لا}^2+\text{ما}^2} + \frac{\text{لا}\,\text{ما}}{\text{لا}^2+\text{ما}^2} = 0$$

۵۰ — دو یا زیادہ متغیروں والے تفاعل کی اعظم یا اقل قیمتیں۔

تعریف ف(ا، ب) قیمت اعظم ہوگی ف(لا، ما) کی اگر ف(ا+ھ، ب+ک) کم ہو ف(ا، ب) سے ھ اور ک کی تمام مثبت یا منفی قیمتوں کے لئے جو صفر اور کسی معینہ محدود مقداروں کے درمیان واقع ہوں خواہ یہ مقداریں

کتنی ہی چھوٹی کیوں نہ ہوں۔ ف (ا، ب) قیمت اقل ہوگی ف (لا، ما) کی اگر ف (ا + ھ، ب + ک) بڑا ہو ف (ا، ب) سے ھ، ک کی تمام ایسی قیمتوں کے لئے۔

دو سے زیادہ متغیروں والے تفاعلوں کے لئے ایسی ہی تعریفیں صادق آتی ہے۔ متغیر متبوع کی تمام زیر بحث قیمتوں کے لئے ہم مان لینگے کہ تفاعل اور ان کے مشتق مسلسل ہیں۔

ف (ا، ب) کے اعظم یا اقل ہونے کے لئے (یعنی مٹور پر کی قیمت ہونے کے لئے) ضروری ہے کہ دونوں $ف_{لا}$ اور $ف_{ما}$ صفر ہوں جبکہ لا = ا، ما = ب کیونکہ ف (ا، ب)، ف (لا، ما) کے موڑ کی قیمت نہیں ہو سکتی جب تک کہ یہ صرف لا کے تفاعل ف (لا، ب) کے موڑ کی قیمت نہ ہو جبکہ لا = ا اور نیز جب تک کہ یہ صرف ما کے تفاعل ف (ا، ما) کے موڑ کی قیمت نہ ہو جبکہ ما = ب۔ اس لئے $ف_{لا}$ (لا، ب) کو لازماً صفر ہونا چاہئے جبکہ لا = ا اور $ف_{ما}$ (ا، ما) کو صفر ہونا چاہئے جبکہ ما = ب۔

موڑ کی قیمت کے لئے اوپر کی شرط ضروری ہے۔ کافی شرائط معلوم کرنے کے لئے ف (ا + ھ، ب + ک) کو پھیلاؤ، اس طرح حاصل ہوگا

$$ف (ا + ھ، ب + ک) - ف (ا، ب)$$

$$= \frac{1}{2}(ھ^2 ف_{اا} + 2ھک ف_{اب} + ک^2 ف_{بب}) + ح$$

..........(۱)

جہاں ھ $ف_{ا}$، ک $ف_{ب}$ کو حذف کر دیا گیا ہے کیونکہ $ف_{ا} = 0 = ف_{ب}$

اگر ف (ا، ب) موڑ کی قیمت ہو۔

اگر ف (ا، ب) موڑ کی قیمت ہو تو (۱) کے بائیں جانب کے جملہ کو ھ اور ک کی تمام چھوٹی قیمتوں کے لئے وہی علامت قائم رکھنی چاہئے اگر ف (ا، ب) قیمت اعظم ہو تو یہ علامت منفی ہونی چاہئے اگر یہ اقل ہو تو مثبت۔ ح میں ھ اور ک کی تیسری قوتیں شریک ہوتی ہیں جبکہ ح کو ٹیلر کے مسئلہ کا باقی خیال کیا جائے، اس لئے ایک حد تک یہ عیاں معلوم ہوتا ہے کہ ھ اور ک کی کافی طور پر چھوٹی قیمتوں کے لئے بائیں جانب کے جملہ کی علامت ھ، ک کے دو درجی جملہ کی علامت سے متعین ہوگی۔ لیکن یہ مفروضہ پورے طور پر درست نہیں تسلیم کرلیا جا سکتا جیسا کہ ذیل کی مثال سے واضح ہوگا جسے پیانو نے وضع کیا۔

فرض کرو کہ ف (لا، ما) = ۸ لا^{۴} − ۶ لا^{۲} ما + ما^{۲}

تب ا = ۰، ب = ۰، ف (ا، ب) = ۰ اور مساوات (۱) ہو جاتی ہے

ف (ھ، ک) = ۸ ھ^{۴} + (−۶ ھ^{۲} ک + ک^{۲}) .... (۲)

یہاں ٹھیک ح = (−۶ ھ^{۲} ک + ک^{۲})

درجہ دوم کی رقمیں ۸ ھ^{۴} میں تحویل ہو جاتی ہیں اور یہ مثبت ہے جب تک کہ ھ صفر نہ ہو، لیکن ھ، ک کی تمام چھوٹی قیمتوں کے لئے ف (ھ، ک) کی ایک ہی علامت نہیں ہے کیونکہ فرض کرو کہ ک = لمہ ھ^{۲}، تب

ف (ھ، ک) = (لمہ − ۲) (لمہ − ۴) ھ^{۴}

اسلئے ف (ھ، ک) منفی یا مثبت ہوگا بموجب اسکے کہ لمہ، ۲ اور ۴ کے درمیان واقع ہو یا نہ ہو۔ دوسرے الفاظ میں ف (۰، ۰) تفاعل ف (لا، ما) کی اقل قیمت نہیں ہو سکتی خواہ دوسرے درجہ کی رقمیں مثبت ہی کیوں نہ ہوں جب تک کہ ھ صفر نہ ہو۔ جو مشکل پیدا ہوئی ہے اسکی تحقیق کے لئے ٹیلر کے مسئلہ میں باقی کے مزید معائنہ کی ضرورت ہوگی، یہ ہماری کتاب کے حدود سے باہر ہے، پس اس جگہ صرف اتنا بیان کر دینا کافی ہوگا کہ ف (ا، ب) موڑ کی قیمت ہوگی اگر

$$ف_{اا}\ ف_{بب} > (ف_{اب})^{۲}$$

اور یہ قیمت، اعظم ہوگی اگر $ف_{اا}$ (یا $ف_{بب}$) منفی ہو اور اقل ہوگی اگر $ف_{اا}$ (یا $ف_{بب}$) مثبت ہو۔

ہم دیکھتے ہیں کہ اس امر کے لئے ضروری شرط کہ ف (ا، ب، ج) تفاعل ف (لا، ما، ی) کے موڑ کی قیمت ہو یہ ہے، $ف_{ا}$، $ف_{ب}$، $ف_{ج}$ میں سے ہر ایک کو صفر ہونا چاہئے جبکہ لا = ا، ما = ب، ی = ج

کئی صورتوں میں یہ پہلے سے معلوم ہوتا ہے کہ تفاعل کے موڑ کی قیمت کا لازماً وجود ہے، اور بالعموم اسے بغیر مزید ثبوت کے مان لیا جاتا ہے کہ متغیروں کی وہ قیمتیں جو تفاعل کے پہلے مشتقوں کو صفر بنا دیں ان سے تفاعل کے موڑ کی قیمت معلوم ہوتی ہے۔

۵۱ ۔ اس سلسلہ کی مشہور صورتیں وہ ہیں جن میں تفاعل جسکے موڑ کی قیمتیں مطلوب ہوں دو، تین یا زیادہ متغیروں کا تفاعل ہو اور متغیر خود ایک یا دو شرطی مساواتوں کے ذریعہ مربوط ہوں۔ ایسی صورتوں میں مناسب طرز عمل بالعموم یہ ہوگا۔ فرض کرو کہ تفاعل ء (مثلاً) چار متغیروں کا تفاعل ہے اور چار متغیروں میں دو شرطی ربط معلوم ہیں۔

ء = ف (لا، ما، ی، ھ) .... (۱)

فا (لا، ما، ی، ھ) = ۰..... (۲) سا (لا، ما، ی، ھ) = ۰..... (۳)

تھوڑی دیر کے لئے فرض کرو کہ ی اور ھ مساواتوں (۲) اور (۳) سے لا، ما کی رقوم میں معلوم کر لئے گئے ہیں اور ان قیمتوں کو ی، ھ کی بجائے (۱) میں مندرج کر دیا گیا ہے، اس طرح ء دو متبوع متغیروں لا، ما کا تفاعل بن جاتا ہے۔ فرض کرو کہ $عف_{لا}$ ء، $عف_{ما}$ ء تفاعل ء کے پہلے مشتق ہیں، اس مفروض کی بنا پر کہ اوپر کی قیمتیں مندرج کر دی گئی ہیں موڑ کی قیمت کے لئے

$\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ی}$ ، $\text{عف}_{\text{ما}}\,\text{ی}$ دونوں صفر ہونگے۔ اب

$$\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ی} = \text{ف}_{\text{لا}} + \text{ف}_{\text{ی}}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} + \text{ف}_{\text{ه}}\frac{\text{جف ه}}{\text{جف لا}} \quad \ldots\ldots (۴)$$

اور $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ ، $\frac{\text{جف ه}}{\text{جف لا}}$ مساواتوں (۲) اور (۳) سے تفرق کرنے سے حاصل ہوتے ہیں

$$\text{فہا}_{\text{لا}} + \text{فہا}_{\text{ی}}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} + \text{فہا}_{\text{ه}}\frac{\text{جف ه}}{\text{جف لا}} = ۰ \quad \ldots\ldots (۵)$$

$$\text{سہا}_{\text{لا}} + \text{سہا}_{\text{ی}}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} + \text{سہا}_{\text{ه}}\frac{\text{جف ه}}{\text{جف لا}} = ۰ \quad \ldots\ldots (۶)$$

(۵) اور (۶) کو $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ ، $\frac{\text{جف ه}}{\text{جف لا}}$ کے لئے حل کرنے کی بجائے (۵) کو لہا سے (۶) کو مہا سے ضرب دو اور (۴) کے ساتھ جمع کرو، اس طرح حاصل ہوگا

$$\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ی} = \text{ف}_{\text{لا}} + \text{لہا}\,\text{فہا}_{\text{لا}} + \text{مہا}\,\text{سہا}_{\text{لا}} + (\text{ف}_{\text{ی}} + \text{لہا}\,\text{فہا}_{\text{ی}} + \text{مہا}\,\text{سہا}_{\text{ی}})\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$$

$$+ (\text{ف}_{\text{ه}} + \text{لہا}\,\text{فہا}_{\text{ه}} + \text{مہا}\,\text{سہا}_{\text{ه}})\frac{\text{جف ه}}{\text{جف لا}} \quad \ldots\ldots (۷)$$

اسی طرح کے عمل سے حاصل ہوگا

$$\text{عف}_{\text{ما}}\,\text{ی} = \text{ف}_{\text{ما}} + \text{لہا}\,\text{فہا}_{\text{ما}} + \text{مہا}\,\text{سہا}_{\text{ما}} + (\text{ف}_{\text{ی}} + \text{لہا}\,\text{فہا}_{\text{ی}} + \text{مہا}\,\text{سہا}_{\text{ی}})\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$$

$$+ (\text{ف}_{\text{ه}} + \text{لہا}\,\text{فہا}_{\text{ه}} + \text{مہا}\,\text{سہا}_{\text{ه}})\frac{\text{جف ه}}{\text{جف ما}} \quad \ldots\ldots (۸)$$

اب (۷) میں $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ ، $\frac{\text{جف ھ}}{\text{جف لا}}$ کے سر (۸) میں $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ اور $\frac{\text{جف ھ}}{\text{جف ما}}$ کے سروں کے بالترتیب مساوی ہیں، ہم لہ، مہ کی قیمتیں اس طرح منتخب کرتے ہیں کہ یہ سر صفر ہوں (اور یہ بالعموم ممکن ہوگا)۔ ایسا کرنے سے عف$_{\text{لا}}$ د، عف$_{\text{ما}}$ د کے لئے جو جملے ہیں ان میں صرف پہلی تین رقمیں رہ جاتی ہیں۔

د کے موڑ کی قیمتوں کے لئے عف$_{\text{لا}}$ د، عف$_{\text{ما}}$ د صفر ہوں گے، اس لئے موڑ کی قیمتوں کے لئے ذیل کی چار مساواتیں درست ہونگی

$$\left.\begin{array}{l}
\text{ف}_{\text{لا}} + \text{لہ فہ}_{\text{لا}} + \text{مہ سا}_{\text{لا}} = 0 \\
\text{ف}_{\text{ما}} + \text{لہ فہ}_{\text{ما}} + \text{مہ سا}_{\text{ما}} = 0 \\
\text{ف}_{\text{ی}} + \text{لہ فہ}_{\text{ی}} + \text{مہ سا}_{\text{ی}} = 0 \\
\text{ف}_{\text{ھ}} + \text{لہ فہ}_{\text{ھ}} + \text{مہ سا}_{\text{ھ}} = 0
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (۹)$$

یہ چار مساواتیں، (۲) اور (۳) کے ساتھ ملکر لہ اور مہ معلوم کرنے کے لئے نیز لا، ما، ی، ھ کی وہ قیمتیں معلوم کرنے کے لئے جن سے د کے موڑ کی قیمتیں معلوم ہوتی ہیں عین کافی ہونگی۔

مساواتیں (۹)، لا، ما، ی، ھ میں متشاکل ہیں اور یہ طریقہ خاص طور پر موزوں ہوتا ہے جبکہ ف، فہ، سا متجانس ہوں۔ یہ غیر معین ضاربوں کا طریقہ کہلاتا ہے۔ اوپر ہم نے صرف چار متغیر اور دو شرطی مساواتیں لی ہیں ظاہر ہے کہ استدلال بالکل عام ہے۔ مساواتیں (۹) بآسانی اس قاعدہ سے لکھی جا سکتی ہیں۔ — مرتب کرد

ف‌د + لہ ف‌د فہ + مہ ف‌د سہ اور ف‌د لا، ف‌د ما، ف‌د ہی، ف‌د ھ کے سروں کو صفر کے مساوی لکھو۔

ف‌د سے مراد ف‌لا ف‌د لا + ف‌ما ف‌د ما + ف‌ہی ف‌د ہی + ف‌ھ ف‌د ھ ہے، ایسا ہی ف‌د فہ اور ف‌د سہ کا مفہوم ہے۔

مثال ۱۔ د = لا² + ما² + ہی² (۱)، فہ = ا لا + ب ما + ج ہی - ک = ۰ (۲)

صریحاً د کی کم سے کم قیمت کا وجود ہے کیونکہ د لازماً مثبت ہے اور (۲) کی بنا پر لا، ما، ہی ایک ساتھ صفر نہیں ہو سکتے۔ اب

ف‌د + لہ ف‌د فہ = (۲ لا + لہ ا) ف‌د لا + (۲ ما + لہ ب) ف‌د ما + (۲ ہی + لہ ج) ف‌د ہی

ف‌د لا، ف‌د ما، ف‌د ہی کے سر صفر کرنے سے لا، ما، ہی کی وہ قیمتیں جن کے لئے د اقل ہے ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں۔

$$\frac{لا}{ا} = -\frac{لہ}{۲} = \frac{ما}{ب} = \frac{ہی}{ج}$$

(۲) کی رو سے اِن میں سے ہر کسر $= \frac{ک}{ا^2 + ب^2 + ج^2}$

طالب علم اِس مثال کو اِس طرح سے بھی حل کر سکتا ہے کہ (۲) سے جو ہی کی قیمت $\frac{(ک - ا لا - ب ما)}{ج}$ حاصل ہوتی ہے اسکو (۱) میں پہلے درج کر لیا جائے، لیکن اِس طریقہ سے جو د لا کی قیمت معلوم ہوگی اسکو پہلے طریقہ کے د لا کے ساتھ ملتبس نہ کیا جائے۔

مثال ۲۔ د کے موثر کی قیمتیں معلوم کرو

$$د = ا^2 لا^2 + ب^2 ما^2 + ج^2 ہی^2 \quad ...... (۱)$$

$$لا^2 + ما^2 + ی^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$ل\,لا + م\,ما + ن\,ی = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

اس صورت میں ا صرف ایک متغیر کا تفاعل ہے، غیر معین ضاربوں کا قاعدہ لگ سکتا ہے۔ جزو ضربی ۲ کو نکالنے کے لئے ضارب لہ اور ۲ مہ لو، اس طرح حاصل ہوگا

$$ا^2 لا + لہ\,لا + مہ\,ل = 0 ،\quad ب^2 ما + لہ\,ما + مہ\,م = 0 ،\quad ج^2 ی + لہ\,ی + مہ\,ن = 0 \quad \ldots\ldots (4)$$

مساواتوں (۴) میں سے پہلی کو لا سے، دوسری کو ما سے، تیسری کو ی سے ضرب دو اور جمع کرو۔

مساواتوں (۲) اور (۳) کی مدد سے حاصل ہوتا ہے

$$ا^2 لا^2 + ب^2 ما^2 + ج^2 ی^2 + لہ = 0 \quad \text{یعنی} \quad لہ = -د$$

جہاں د کی یہ قیمت سوڑ کی قیمت ہے کیونکہ لا، ما، ی کی قیمتیں جو (۴) سے ملتی ہیں اُن سے د کی سوڑ کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

(۴) میں لہ کے لئے − د لکھو، اس طرح حاصل ہوگا

$$لا = \frac{مہ\,ل}{د - ا^2} ،\quad ما = \frac{مہ\,م}{د - ب^2} ،\quad ی = \frac{مہ\,ن}{د - ج^2}$$

اب اگر لا، ما، ی کی یہ قیمتیں (۳) میں رکھی جائیں تو جزو ضربی مہ نکل جائیگا اور د میں یہ مساوات درجہ دوم حاصل ہوگی

$$\frac{ل^2}{د - ا^2} + \frac{م^2}{د - ب^2} + \frac{ن^2}{د - ج^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

(۵) کی ایک اصل د کی قیمت اعظم ہوگی اور دوسری اقل۔

مشق ۱۴

۱۔ ذیل کے متجانس تفاعلوں کے متعلق آئلر کے مسئلہ کی تصدیق کرو (صرف پہلے مشتقوں کے لئے)

(۱) $\text{ا}\,\text{لا}^{2} + ۲\,\text{ب}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ج}\,\text{ما}^{2}$ (۲) $\text{ا}\,\text{لا}^{3} + \text{ب}\,\text{ما}^{3} + \text{ج}\,\text{ی}^{3}$

(۳) $\sqrt{\text{لا}} + \sqrt{\text{ما}} + \sqrt{\text{ی}}$ (۴) $\dfrac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2}}$

(۵) $\dfrac{\text{لا} + \text{ما} + \text{ی}}{\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + \text{ی}^{2}}$ (۶) $\text{مس}^{-1}\left(\dfrac{\text{ر}}{\text{ی}}\right)$ جہاں $\text{ر} = \sqrt{\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + \text{ی}^{2}}$

(۷) $\dfrac{1}{\text{ر}}$

۲۔ د، ن ویں درجہ کا متجانس تفاعل ہے، ثابت کرو کہ

(۱) $\text{لا}\,\text{د}_{\text{لالا}} + \text{ما}\,\text{د}_{\text{لاما}} = (\text{ن} - ۱)\,\text{د}_{\text{لا}}$

(۲) $\text{لا}\,\text{د}_{\text{لاما}} + \text{ما}\,\text{د}_{\text{ماما}} = (\text{ن} - ۱)\,\text{د}_{\text{ما}}$

۳۔ اگر ا مثبت ہو تو ثابت کرو کہ $۳\,\text{ا}\,\text{لا}\,\text{ما} - \text{لا}^{3} - \text{ما}^{3}$ اعظم ہے جبکہ لا = ا، ما = ا لیکن اگر لا = ۰، ما = ۰ تو نہ یہ اقل ہے نہ اعظم۔

۴۔ تفاعل $\text{لا}^{3}\,\text{ما}^{2}\,(۶ - \text{لا} - \text{ما})$ اعظم ہے جبکہ لا = ۳، ما = ۲ لیکن نہ یہ اقل ہے نہ اعظم جب، لا = ۰، ما = ۰۔

۵۔ اگر ا، ب، ج مثبت ہوں اور اگر $\dfrac{\text{ا}}{\text{لا}} + \dfrac{\text{ب}}{\text{ما}} + \dfrac{\text{ج}}{\text{ی}} = ۱$ تو ثابت کرو کہ حاصل جمع $\text{لا} + \text{ما} + \text{ی}$ اقل ہو گا جبکہ

$$\frac{لا}{م\sqrt{ا}} = \frac{ما}{م\sqrt{ب}} = \frac{ی}{م\sqrt{ج}} = م\sqrt{ا} + م\sqrt{ب} + م\sqrt{ج}$$

نیز اگر ف، ق، ط مثبت ہوں تو حاصل ضرب $لا^{ف}\ ما^{ق}\ ی^{ط}$ اقل ہے جبکہ

$$\frac{ف\ لا}{ا} = \frac{ق\ ما}{ب} = \frac{ط\ ی}{ج} = ف + ق + ط$$

۶۔ اگر $د = لا^2 + ما^2$ اور اگر $ا\ لا^2 + ۲ھ\ لا\ ما + ب\ ما^2 = ۱$ تو د کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرو اور نتیجہ کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔

۷۔ اگر $د = لا^2 + ما^2 + ی^2$ اور اگر $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} + \frac{ی^2}{ج^2} = ۱$ اور $ل\ لا + م\ ما + ن\ ی = ۰$ تو د کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرو اور نتیجہ کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔

۸۔ اگر $د = لا_1^2 + لا_2^2 + لا_3^2 + \dots + لا_ن^2$ اور اگر $ا_1 لا_1 + ا_2 لا_2 + \dots + ا_ن لا_ن = ک$ تو د کی کم سے کم قیمت ہے

$$\frac{ک^2}{ا_1^2 + ا_2^2 + \dots + ا_ن^2} ۔$$

۹۔ ایک مثلث کے اضلاع اَ، بَ، جَ ہیں اور رقبہ س ہے، اگر کسی نقطہ ن سے اسکے اضلاع پر عمود لا، ما، ی ہوں تو ثابت کرو کہ $لا^2 + ما^2 + ی^2$ کی اقل قیمت $\frac{۴ س^2}{ا^2 + ب^2 + ج^2}$ ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ $(ا_1 لا + ب_1 ما + ج_1)^2 + (ا_2 لا + ب_2 ما + ج_2)^2 + \dots + (ا_ن لا + ب_ن ما + ج_ن)^2$

کی اقل قیمت لا، ما کی ان قیمتوں سے حاصل ہوتی ہے جو ذیل کی مساواتوں کو پورا کرتی ہیں

$$(\text{حر ا}^{2}_{\ \text{ا}})\,\text{لا} + (\text{حر ا}_{\text{ا}}\text{ب}_{\text{ا}})\,\text{ما} + (\text{حر ا}_{\text{ا}}\text{ج}_{\text{ا}}) = 0$$

$$(\text{حر ا}_{\text{ا}}\text{ب}_{\text{ا}})\,\text{لا} + (\text{حر ب}^{2}_{\ \text{ا}})\,\text{ما} + (\text{حر ب}_{\text{ا}}\text{ج}_{\text{ا}}) = 0$$

۱۱- ن نقاط معلومہ کا مرکز ہندسی وہ نقطہ ہے جس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ ان نقاط سے کم سے کم ہو۔

۱۲- غیر معین ضاربوں کے قاعدہ سے قطع ناقص کے برپیچہ کی مساوات دریافت کرو جبکہ برپیچہ کو ناقص کے عمادوں کا لفاف تصور کیا جائے۔

عماد ہے
$$\frac{\text{ا}^{2}\,\text{لا}}{\text{عہ}} - \frac{\text{ب}^{2}\,\text{ما}}{\text{بہ}} = \text{ا}^{2} - \text{ب}^{2}$$

جہاں
$$\frac{\text{عہ}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{بہ}^{2}}{\text{ب}^{2}} = 1$$

اس لئے
$$-\frac{\text{ا}^{2}\,\text{لا}}{\text{عہ}^{2}} + \text{لہ}\,\frac{2\,\text{عہ}}{\text{ا}^{2}} = 0\text{،}\quad \frac{\text{ب}^{2}\,\text{ما}}{\text{بہ}^{2}} + \text{لہ}\,\frac{2\,\text{بہ}}{\text{ب}^{2}} = 0$$

اسلئے
$$\text{لہ} = \frac{1}{2}(\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2})\text{،}\quad \text{عہ}^{3} = \frac{\text{ا}^{4}\,\text{لا}}{\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2}}$$
، وغیرہ۔

۱۳- ثابت کرو کہ $\text{لا}\,\text{عہ}^{\text{م}} + \text{ما}\,\text{بہ}^{\text{م}} = \text{ا}^{\text{م}}$ کا لفاف جہاں $\text{عہ}^{\text{ن}} + \text{بہ}^{\text{ن}} = \text{ب}^{\text{ن}}$

$$\text{لا}^{\frac{\text{ن}}{\text{ن}-\text{م}}} + \text{ما}^{\frac{\text{ن}}{\text{ن}-\text{م}}} = \left(\frac{\text{ا}^{\text{م}+1}}{\text{ب}^{\text{م}}}\right)^{\frac{\text{ن}}{\text{ن}-\text{م}}}$$
ہے۔

۵۲- غیر معین صورتیں۔ ممکن ہے کہ کوئی تفاعل ف(لا) جس کی تعیین وجہ یا دلیل کی قیمتوں کی کسی سعت کے اندر عام طور پر بخوبی ہوتی ہو

وجہ کی کسی خاص قیمت ا کے لئے ایسی شکل اختیار کرے (جیسے $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$) جو بے معنی ہو۔ لیکن ایسا ہوسکتا ہے کہ جب لا مائل بہ ا ہو تو ف(لا) کی ایک معین انتہا ا حاصل ہو۔ ف(لا) کی قیمت لا = ا کے لئے دراصل غیر معین ہے یعنی اس کی قیمت جبر و مقابلہ کے معمولی قاعدوں سے محسوب نہیں ہوسکتی تاہم یہ عام رواج ہوگیا ہے کہ ایسی حالت میں ف(ا) کو غیر معین صورت کے نام سے موسوم کرتے ہیں اور تعریف کے طور پر انتہا ا کو ف(لا) کی قیمت خیال کرتے ہیں جبکہ لا = ا۔ تفاعل کی اس قیمت کو جو تعریف کی بناپر اختیار کی گئی ہے ہم ف(لا) کی "اصلی قیمت" کہینگے جبکہ لا = ا۔

یاد رہے کہ یہ "اصلی قیمت" محض تعریف کی بنا پر لی گئی ہے اور اس لئے بالکل اختیاری ہے۔ لیکن اس طرز عمل میں ایک خاص فائدہ ہے، اسطرح ف(لا) جو عام طور پر قیمت ا تک مسلسل ہو بشمول قیمت ا کے مسلسل بن جاتا ہے۔

غیر معین صورتیں عام طور پر حسب ذیل ہیں:۔

$$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}،\ \frac{\infty}{\infty}،\ \infty - \infty،\ \cdot \times \infty،\ \cdot^{\cdot}،\ \infty^{\cdot}،\ ۱^{\infty}$$

ایسی صورتوں میں سے بعض پہلے آئی ہیں، خود ف(لا) کا مشتق بصورت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ہے۔ لا لوک لا میں جبکہ لا = ۰ صورت $\cdot \times \infty$ پائی جاتی ہے، اصلی قیمت صفر ہے۔

$لا^{ن} ق^{-لا}$ یا $\frac{لا^{ن}}{ق^{لا}}$ سے جبکہ لا = + ∞ ملتا ہے $\cdot \times \infty$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ اور انتہا صفر ہے [ملاحظہ ہو مشق ۷، سوالات ۸، ۹ حصۂ اول] یہ دیکھنا مشکل نہیں کہ نتیجہ درست رہتا ہے خواہ ن صحیح یا کسور ہو۔

صورت 1^{∞} پیدا ہوتی ہے جبکہ لا = ۰، $(1+لا)^{\frac{1}{لا}}$ میں، انتہا یا اصلی قیمت ق ہے (دفعہ ۴۸ نتیجہ صریح، حصہ اول)

اکثر سوالوں میں یہ انتہائیں محض جبریہ استحالوں اور سلسلوں کے استعمال سے حاصل ہوسکتی ہیں، عام مسائل کا سرسری ذکر کرنے سے پہلے ہم اس طرح کی چند مثالیں حل کرینگے۔

مثال ۱۔ $\frac{لا^{\frac{3}{2}} - 1 + (لا - 1)^{\frac{3}{2}}}{(لا^2 - 1)^{\frac{3}{2}} - لا + 1}$ جبکہ لا = ۱، صورت $\frac{صفر}{صفر}$

شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو $(لا^{\frac{1}{2}} - 1)$ پر تقسیم کرو۔ ہم دیکھتے ہیں کہ انتہا $-\frac{3}{2}$ ہے، اسلئے کسر کی "اصلی قیمت" جبکہ لا = ۱، $-\frac{3}{2}$ ہے۔

مثال ۲۔ $\frac{(جب^{-1} لا - لا)}{لا^3}$ جبکہ لا = ۰، صورت $\frac{صفر}{صفر}$

$جب^{-1}$ لا کو پھیلاؤ $(= لا + \frac{لا^3}{6} + \ldots)$، شمار کنندہ سے لا خارج ہو جاتا ہے اور شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو $لا^3$ پر تقسیم کرنے سے انتہا $\frac{1}{6}$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۳۔ $\frac{قط\ لا}{قط\ ۳\ لا}$ جبکہ لا = $\frac{\pi}{2}$، صورت $\frac{\infty}{\infty}$

فرض کرو کہ لا = $\frac{\pi}{2} - ی$، تب

$$\underset{لا \to \frac{\pi}{2}}{نہا} \frac{قط\ لا}{قط\ ۳\ لا} = \underset{ی \to ۰}{نہا} \frac{-جب\ ۳\ ی}{جب\ ی} = -3$$

مثال ۴۔ $\frac{1}{لا^2} - مم^2 لا$ جبکہ لا = ۰، شکل $\infty - \infty$

فرض کرو کہ $\text{لا} = \frac{\text{ط}}{2} - \text{ی}$، تب

$$\lim_{\text{لا}\to\frac{\text{ط}}{2}} \frac{\text{قط لا}}{\text{قط ۳ لا}} = \lim_{\text{ی}\to 0} \frac{-\text{جب ۳ ی}}{\text{جب ی}} = -3$$

مثال ۴۔ $\frac{1}{\text{لا}^2} - \text{مم}^2\,\text{لا}$ جبکہ لا = ۰، شکل $\infty - \infty$

$$\frac{1}{\text{لا}^2} - \text{مم}^2\,\text{لا} = \left(1 + \frac{\text{لا}}{\text{جب لا}}\,\text{جم لا}\right)\left(\frac{\text{لا}}{\text{جب لا}}\right)\left(\frac{\text{جب لا} - \text{لا جم لا}}{\text{لا}^3}\right)$$

پہلے جزو ضربی کی انتہا ۲ ہے اور دوسرے کی ۱، نیز

$$\text{جب لا} - \text{لا جم لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{6} + \ldots\ldots - \text{لا}\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{2} + \ldots\right)$$

$$= \frac{\text{لا}^3}{3} + \ldots\ldots\ldots$$

یعنی تیسرے جزو ضربی کی انتہا $\frac{1}{3}$ ہے، پس مطلوبہ انتہا یا اصلی قیمت $\frac{2}{3}$ ہے

مثال ۵۔ $\text{لا}^{\text{لا}}$ جبکہ لا = ۰، صورت 0^0

فرض کرو کہ $\text{ی} = \text{لا}^{\text{لا}}$، تب لوک ی = لا لوک لا

لا لوک لا یا لوک ی کی انتہا صفر ہے، پس ی یا $\text{لا}^{\text{لا}}$ کی انتہا ایک ہے۔

مثال ۶۔ $\left(\frac{1}{\text{لا}}\right)^{\text{مس لا}}$ جبکہ لا = ۰، صورت ∞^0

تفاعل کا لوگارثم ہے مس لا لوک لا = $-\frac{\text{مس لا}}{\text{لا}} \times (\text{لا لوک لا})$

جس کی انتہا صفر ہے، اسلئے تفاعل کی انتہا ۱ ہے۔

۵۳ – احصائی طریقہ۔ غیر معین صورتوں کی تحقیق کے متعلق اب ہم عام مسئلہ بیان کرتے ہیں۔ ایسی نازک قیمتوں کے قرب میں ہم تفاعلوں کا

تسلسل تسلیم کرلینگے۔

مسئلہ۔ اگر فا(ا) اور سا(ا) دونوں صفر ہوں یا دونوں لاتناہی اور

اگر $\frac{\text{فاَ(لا)}}{\text{ساَ(لا)}}$ ایک انتہا کی طرف مائل ہو جبکہ لا، ا کی طرف مائل ہو

تو $\frac{\text{فا(لا)}}{\text{سا(لا)}}$ بھی اسی انتہا کی طرف مائل ہوگا۔

تکرار سے بچنے کے لئے ابتدا میں ہی ہم اس امر کا ذکر کر دیتے ہیں کہ اگر $\frac{\text{فاَ(لا)}}{\text{ساَ(لا)}}$

کی صورت غیر معین ہو جبکہ لا = ا تو مسئلہ بالا سے ظاہر ہوتا ہے کہ اگر $\frac{\text{فاً(لا)}}{\text{ساً(لا)}}$

ایک انتہا کی طرف مائل ہو جبکہ لا، ا کی طرف مائل ہو تو $\frac{\text{فاَ(لا)}}{\text{ساَ(لا)}}$ اور اسلئے

$\frac{\text{فا(لا)}}{\text{سا(لا)}}$ بھی اسی انتہا کی طرف مائل ہوگا، وغیرہ وغیرہ۔

دفعہ ۲، حصہ اول، کے مسئلہ اوسط قیمت کی صورت ذیل کو ہم استعمال کرینگے
یہ شکل اس مسئلہ کی توسیع ہے۔

اگر فا(لا)، فاَ(لا)، سا(لا)، ساَ(لا) مسلسل ہوں سعت

ا ≦ لا ≦ ب کے لئے اور اگر ساَ(لا) صفر نہ ہو جبکہ

ا < لا < ب تو

$$\frac{\text{فا(ب)} - \text{فا(ا)}}{\text{سا(ب)} - \text{سا(ا)}} = \frac{\text{فاَ(لا}_1\text{)}}{\text{ساَ(لا}_1\text{)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

جہاں ا < لا۱ < ب [اوسط قیمت کے مسئلہ کی تعمیم شدہ صورت]

اس کا ثبوت آسان ہے، فرض کرو کہ [ملاحظہ ہو دفعہ ۲، حصہ اول]

$$\text{فا}(\text{لا}) = \frac{\text{فا}(\text{ب}) - \text{فا}(\text{ا})}{\text{سا}(\text{ب}) - \text{سا}(\text{ا})}\left\{\text{سا}(\text{لا}) - \text{سا}(\text{ا})\right\} - \left\{\text{فا}(\text{لا}) - \text{فا}(\text{ا})\right\}$$

اب فا(ا) = ۰، فا(ب) = ۰۔ اس لئے $\text{فاَ}(\text{لا}_1) = 0$، ہم $\text{ساَ}(\text{لا}_1)$ پر تقسیم کر سکتے ہیں کیونکہ $\text{ساَ}(\text{لا}_1)$ صفر نہیں ہے جب تک کہ لا_1، ا اور ب کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

(۱) صورت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ۔ فرض کرو کہ فا(ا) = ۰، سا(ا) = ۰،

(۱) میں رکھو ب کی بجائے لا۔ تب

$$\frac{\text{فا}(\text{لا})}{\text{سا}(\text{لا})} = \frac{\text{فاَ}(\text{لا}_1)}{\text{ساَ}(\text{لا}_1)} \quad (\text{ا} < \text{لا}_1 < \text{لا})$$

$$\text{اور}\quad \text{نہا}_{\text{لا}\to\text{ا}} \frac{\text{فا}(\text{لا})}{\text{سا}(\text{لا})} = \text{نہا}_{\text{لا}_1\to\text{ا}} \frac{\text{فاَ}(\text{لا}_1)}{\text{ساَ}(\text{لا}_1)} = \text{نہا}_{\text{لا}\to\text{ا}} \frac{\text{فاَ}(\text{لا})}{\text{ساَ}(\text{لا})}$$

اگر ا → ∞ تو لا کی بجائے $\frac{1}{\text{ی}}$ رکھنے سے سوال بدل کر یہ ہوجائیگا کہ انتہا معلوم کی جائے جبکہ ی → ۰، اس لئے اس صورت میں بھی مسئلہ درست رہتا ہے۔

(۲) صورت $\frac{\infty}{\infty}$ ۔ (ا) پہلے فرض کرو کہ فا(لا)، سا(لا) دونوں مائل بہ لاتناہی ہوتے ہیں جبکہ لا مائل بہ لامتناہی ہو۔ فرض کرو کہ لا کی بہت بڑی مگر محدود قیمت ج ہے۔ (۱) میں ب کی بجائے لا اور ا کی بجائے ج رکھنے سے

$$\frac{\text{فا}(\text{لا}) - \text{فا}(\text{ج})}{\text{سا}(\text{لا}) - \text{سا}(\text{ج})} = \frac{\text{فاَ}(\text{لا}_1)}{\text{ساَ}(\text{لا}_1)} \quad (\text{ج} < \text{لا}_1 < \text{لا}) \quad \text{.....(ع)}$$

نیز ہم لکھ سکتے ہیں

$$\frac{\text{فا}(\text{لا}) - \text{فا}(\text{ج})}{\text{سا}(\text{لا}) - \text{سا}(\text{ج})} = \frac{\text{فا}(\text{لا})}{\text{سا}(\text{لا})} \times \frac{\frac{\text{فا}(\text{ج})}{\text{فا}(\text{لا})} - 1}{\frac{\text{سا}(\text{ج})}{\text{سا}(\text{لا})} - 1}$$

اس لئے (ع۱۱) کی رو سے

$$\frac{\text{فہ}(\text{لا})}{\text{سا}(\text{لا})} = \frac{\text{فہ}'(\text{لا}_1)}{\text{سا}'(\text{لا}_1)} \times \frac{1 - \frac{\text{سا}(\text{ج})}{\text{سا}(\text{لا})}}{1 - \frac{\text{فہ}(\text{ج})}{\text{فہ}(\text{لا})}}$$

اب ج کو اتنا بڑا لو کہ $\frac{\text{فہ}'(\text{لا}_1)}{\text{سا}'(\text{لا}_1)}$ اور اسکی انتہا ا کا فرق بہ نسبت صہ کے کم ہو۔ پھر ج کی یہ قیمت مقرر یا ثابت کردو، اس طرح فہ(ج) اور سا(ج) اگرچہ بڑے ہیں مگر محدود ہیں۔ اس کے بعد لا کو اتنا بڑا لو (اور ایسا ممکن ہے۔ کیونکہ فہ(لا) اور سا(لا) دونوں مائل بہ لاتناہی ہوتے ہیں) کہ بائیں جانب کی دوسری کسر اور ا کا فرق مطلق صہ سے کم ہو۔

اب کسر $\frac{\text{فہ}(\text{لا})}{\text{سا}(\text{لا})}$ دو ایسے اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے جن میں سے پہلے کا فرق ا سے کم ہے بہ نسبت صہ_1 کے اور دوسرے کا فرق ا سے کم ہے بہ نسبت صہ_2 کے اور صہ_1، صہ_2 اتنے چھوٹے ہو سکتے ہیں جتنا ہم چاہیں۔

اسلئے $\frac{\text{فہ}(\text{لا})}{\text{سا}(\text{لا})}$ کی انتہا ا ہے یعنی

$$\text{نہا}_{\text{لا}\to\infty} \frac{\text{فہ}(\text{لا})}{\text{سا}(\text{لا})} = \text{نہا}_{\text{لا}\to\infty} \frac{\text{فہ}'(\text{لا})}{\text{سا}'(\text{لا})}$$

(ب) اسکے بعد فرض کرو کہ فہ(ا)، سا(ا) دونوں مائل بہ لاتناہی ہوتے ہیں اور ا محدود ہے۔ لا کی بجائے $\text{ا} + \frac{1}{\text{ی}}$ رکھنے سے مسئلہ بالا یہ رہ جاتا ہے کہ $\text{ی} \to \infty$ کے لئے انتہا معلوم کیجائے، پس اس صورت میں

بھی مسئلہ درست رہتا ہے۔
اوپر کا ثبوت (Gennochi-Peano) کے احصا سے اخذ کیا گیا ہے
(جرمن ترجمہ، لیپزگ، ٹیوبنر)

(۳) **دیگر صورتیں** اگر فہ (ا) = ۰، سا (ا) = ∞ تو ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{فہ}(\text{لا}) \times \text{سا}(\text{لا}) = \text{فہ}(\text{لا}) \div \frac{1}{\text{سا}(\text{لا})}$$

اس طرح یہ صورت صورت اول میں تبدیل ہو جاتی ہے۔
صورتیں 0^0، ∞^0، 1^∞ لوکارثم لینے سے تحویل ہو جاتی ہیں ملاحظہ ہو دفعہ ۵۲ مثال ۵، ۶۔
صورت ∞ - ∞ کے لئے دفعہ ۵۲ مثال ۴ کی طرح عمل کیا جا سکتا ہے۔ یا سلسلوں میں پھیلانے سے مدد لی جا سکتی ہے۔ عمل تفرق کو سلسلوں میں پھیلانے کے عمل کے ساتھ ملایا جا سکتا ہے۔

مثال ۱۔ اگر ن مثبت ہو تو $\frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}^{\text{ن}}}$ مائل بہ صفر ہوتا ہے جبکہ لا مائل بہ لا متناہی ہو۔

$$\text{نہا}_{\text{لا}\to\infty} \frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}^{\text{ن}}} = \text{نہا}_{\text{لا}\to\infty} \frac{\frac{1}{\text{لا}}}{\text{ن لا}^{\text{ن}-1}} = \text{نہا}_{\text{لا}\to\infty} \frac{1}{\text{ن لا}^{\text{ن}}} = 0$$

مثال ۲۔ دو متبوع متغیروں کے تفاعل $\frac{\text{لا} - \text{ما}}{\text{لا} + \text{ما}}$ کی انتہا لا ← ۰ اور ما ← ۰ کے لئے معلوم کرو۔

"اصل قیمت" کے متعلق جو تعریف ہم نے اوپر اختیار کی ہے اسکی اختیاری نوعیت کی اس مثال سے توضیح ہوتی ہے، نیز اس مثال سے واضح ہوگا کہ ایک متغیر کے تفاعل کی انتہاؤں اور دو متغیروں کے تفاعل کی انتہاؤں میں کسقدر فرق ہے

اوپر کا تفاعل کسی ایک قیمت کی طرف مائل کیا جا سکتا ہے،
رکھو ما = لہ لا اس طرح حاصل ہوگا

$$\text{نہا}\ \frac{\text{لا} - \text{ما}}{\text{لا} + \text{ما}} = \text{نہا}\ \frac{\text{لا} - \text{لہ لا}}{\text{لا} + \text{لہ لا}} = \frac{۱ - \text{لہ}}{۱ + \text{لہ}}$$

لہ کو مناسب قیمت دینے سے $\frac{۱ - \text{لہ}}{۱ + \text{لہ}}$ کسی عدد کے مساوی ہو سکتا ہے،
ہندسی نقطہ نظر سے، محورے سطح ی (لا + ما) = لا - ما پر واقع ہوتا ہے
اور جیسے لا اور ما صفر کی طرف مائل ہوتے ہیں نقطہ (لا، ما، ی) محور ی پر کے کسی نقطہ کے قریب لایا جا سکتا ہے۔

مشق ۱۵

سوالات ۱ تا ۱۵ میں وجہ کی معلومہ قیمتوں کے لئے تفاعلوں کی انتہائیں ("اصلی قیمتیں") دریافت کرو۔

۱۔ $\left\{\text{لا} - (\text{ن} + ۱)\,\text{لا}^{\text{ن}+۱} + \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}+۲}\right\} \Big/ (۱ - \text{لا})^{۲}$ جبکہ لا = ۱

۲۔ $\left\{۱ - \sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}\right\} \Big/ \text{لا}^{۲}$ جبکہ لا = ۰

۳۔ $\text{لا} - \sqrt{\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{ا}\,\text{لا}}$ جبکہ لا = ∞

۴۔ $\sqrt[\text{ن}]{(\text{لا} + \text{ا}_{۱})(\text{لا} + \text{ا}_{۲})\ldots(\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}})} - \text{لا}$ جبکہ لا = ∞

رکھو لا = $\frac{۱}{\text{ی}}$ اور مسئلہ ثنائی سے پھیلاؤ۔

۵۔ $\left(۱ + \frac{۱}{\text{لا}}\right)^{\text{لا}^{۲}}$ اور $\left(۱ + \frac{۱}{\text{لا}^{۲}}\right)^{\text{لا}}$ جبکہ لا = ∞

۶- $\frac{\text{لوک لا}}{\text{۱ - لا}}$ اور $\frac{\text{۱ - لا + لوک لا}}{\text{۱ - }\sqrt{\text{۲لا - لا}^{۲}}}$ جبکہ لا = ۱

۷- $\frac{\text{مس لا - لا}}{\text{لا - جب لا}}$ اور $\frac{\text{مس ن لا - ن مس لا}}{\text{ن جب لا - جب ن لا}}$ جبکہ لا = ۰

۸- $(\frac{\text{ط}}{۲}\text{ - لا})$ مس لا اور لا مس لا - $\frac{\text{ط}}{۲}$ قط لا جبکہ لا = $\frac{\text{ط}}{۲}$

۹- لوک (۱ + ا لا) / لوک (۱ + ب لا) اور $\frac{(\text{ق}^{\text{ا لا}}\text{ - ق}^{\text{ب لا}})}{\text{لوک (۱ + ب لا)}}$ جبکہ لا = ۰

۱۰- $\frac{۱}{\text{لا}}$ - $\frac{۱}{\text{لا}^{۲}}$ لوک (۱ + لا) جبکہ لا = ۰

۱۱- $(\text{ا}^{\text{لا}}\text{ - ب}^{\text{لا}}) / (\text{ج}^{\text{لا}}\text{ - گ}^{\text{لا}})$ جبکہ لا = ۰

۱۲- $\frac{\text{لوک مس ا لا}}{\text{لوک مس ب لا}}$ اور $\frac{\text{لوک مس ا لا - لوک مس ب لا}}{\text{لوک جب ا لا - لوک جب ب لا}}$ جبکہ لا = ۰

۱۳- $\left(\frac{\text{ا}_{۱}^{\text{لا}}\text{ + ا}_{۲}^{\text{لا}}\text{ + ا}_{۳}^{\text{لا}}\text{ + ... ا}_{\text{ن}}^{\text{لا}}}{\text{ن}}\right)^{\frac{۱}{\text{لا}}}$ جبکہ لا = ۰

۱۴- $\frac{\text{جنر لا - جب لا}}{\text{لا}^{۳}}$ اور $\frac{\text{جنر لا - جم لا}}{\text{لا}^{۲}}$ جبکہ لا = ۰

۱۵- $(\text{جم ا لا})^{\text{قم}^{۲}\text{ب لا}}$ اور $(\text{جم ا لا})^{\text{قم}^{۳}\text{ب لا}}$ جبکہ لا = ۰

۱۶- اگر ایک منحنی کی مساوات $\text{ک}_{۲}\text{ + ک}_{۳}\text{ + ک}_{۴}\text{ + ...}$ = ۰ ہو جہاں $\text{ک}_{۲}\text{، ک}_{۳}\text{، ک}_{۴}$ ، ..... متجانس تفاعل ہیں کارٹیسری محدودوں میں درجہ

۲، ۳، ۴، ...... کے تو ثابت کرو کہ د = ۰ مبدا پر کے مماسوں کی مساوات ہے جبکہ د کے اجزائے ضربی حقیقی ہوں۔

رکھو لا = ر جم طہ، ما = ر جب طہ اور فرض کرو کہ د، د، ...... ہو جاتے ہیں

ر د، ر^۲ د، ......، چونکہ ر جزو ضربی ہے د + د + ... کا اسلئے ر کی دو قیمتیں صفر ہونگی۔ اب اگر طہ کی ایسی قیمت منتخب کی جائے کہ د = ۰ تو ر کی ایک اور قیمت صفر ہوگی۔ مساوات د = بلحس طہ میں درجہ دوم کی مساوات ہے اس لئے جب اسکی اصلیں حقیقی اور مختلف ہوں تو دو ڈھال یا قیمتیں ملیں گی جب یہ حقیقی اور مساوی ہوں تو صرف ایک ڈھال ملیگا۔ جب اصلیں خیالی ہونگی تو مس طہ کی قیمتیں خیالی ہونگی اور مبدا ایک اکیلا نقطہ ہوگا۔

تعریف - منحنی کا ایسا نقطہ جس پر منحنی کے دو الگ مماس ہوں عقدہ کہلاتا ہے۔ عقدہ پر منحنی کی دو شاخیں ایک دوسرے کو عبور کرتی ہیں اور انکے قطع کرنے سے ایک محدود زاویہ بنتا ہے، شکل ۸ صفحہ ۷۶ اور شکل ۱۰ صفحہ ۷۸ میں مبدا عقدہ ہے۔

۱۷- اگر لا^۴ + ۲ لا^۳ ما + ۵ لا^۲ + ر لا^۲ - ب^۲ ما^۲ = ۰ تو $\frac{\text{د ما}}{\text{د لا}}$ کی قیمت معلوم کرو جبکہ لا = ۰، ما = ۰۔

۱۸- جب، لا مائل بہ لاتناہی ہو تو فہ (لا) مائل بہ صفر ہوتا ہے، ثابت کرو کہ اگر لا کے مائل بہ لاتناہی ہونے سے فہ' (لا) کسی ایک محدود انتہا کی طرف مائل ہو تو یہ انتہا لازماً صفر ہوگی۔

فرض کرو کہ فہ' (لا) کی انتہا ا ہے جو صفر سے مختلف ہے، مساوات

فہ (لا) = فہ (ج) + (لا - ج) فہ' (لا۱) [ج < لا۱ < لا]

سے ظاہر ہے کہ لا کے بہت بڑا ہونے سے فہ (لا) لازماً مائل بہ لاتناہی

ہوتا ہے کیونکہ (لا - ج) فہ (لا) مائل بہ (لا - ج) ل یعنی مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے لیکن مفروض کی بنا پر فہ (لا) مائل بہ صفر ہوتا ہے پس اگر ل محدود ہے تو اسکو لازماً صفر ہونا چاہئے۔

۱۹- ثابت کرو کہ سلسلہ $\frac{۱}{(\text{لوک }۲)^{\text{عہ}}}+\frac{۱}{(\text{لوک }۳)^{\text{عہ}}}+\frac{۱}{(\text{لوک }۴)^{\text{عہ}}}+\ldots$

متسع ہے عہ کی تمام مثبت قیمتوں کے لئے۔

$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\ldots\ldots$ کے ساتھ مقابلہ کرو۔

ن ← ∞ کے لئے $\frac{۱}{(\text{لوک ن})^{\text{عہ}}}\div\frac{۱}{\text{ن}}$ یعنی $(\text{ن}^{\frac{۱}{\text{عہ}}}/\text{لوک ن})^{\text{عہ}}$

مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے [دفعہ ۳۵ مثال ۱]، اس لئے سلسلہ معلومہ متسع ہے چونکہ موسیقی سلسلہ متسع ہے۔ جب عہ منفی ہو تو ظاہر ہے کہ سلسلہ متسع ہے۔

باب ہشتم

تفرقی مساواتیں

۵۴ـ اس باب میں ہم چند تفرقی مساواتوں پر بحث کرینگے جو ابتدائی اعمال ریاضی میں استعمال ہوتی ہیں، اس جگہ ان کا محض مختصر سا خاکہ پیش کیا جائے گا تفصیلی بحث طالب علم کو فورساتھ کی تفرقی مساواتوں (مکملن) یا مرے کی تفرقی مساواتوں (لونگ مین) میں ملیگی۔

معمولی تفرقی مساوات وہ مساواتی رشتہ ہے جو ایک متغیر متبوع اور ایک متغیر تابع اور تابع متغیر کے ایک یا زیادہ مشتقوں کے درمیان ہو۔

جزوی تفرقی مساوات وہ مساواتی رشتہ ہے جو دو یا زیادہ متبوع متغیروں ایک متغیر تابع اور تابع متغیر کے جزوی مشتقوں کے درمیان ہو۔

ہم یہاں صرف معمولی تفرقی مساواتوں سے بحث کرینگے۔

تفرقی مساوات کا **رتبہ** اس میں کے سب سے اعلےٰ مشتق کے رتبہ سے متعین ہوتا ہے، اور تفرقی مساوات کا درجہ اعلےٰ سے اعلےٰ مشتق کا درجہ ہے جبکہ مساوات کو کسروں سے صاف کردیا جائے اور مشتقوں کی قوتیں مثبت صحیح عدد ہوں۔

مثال لا² ما'' + لا ما' + (لا² ـ ن²) ما = ۰، دوسرے رتبہ کی اور درجہ اول کی تفرقی مساوات ہے۔

لا ما'² ـ ما ما' + ا = ۰ رتبۂ اول اور درجہ دوم کی تفرقی مساوات ہے۔

اسقاط کے نظریہ سے ہم جانتے ہیں کہ ا ایک مقدار کو د و مساواتوں ملنے

دو مقداروں کو تین مساواتوں سے ن مقداروں کو (ن+۱) مساواتوں سے ساقط کر سکتے ہیں۔ پس اگر ایک ایسی مساوات کو جس میں لا، ما اور مستقل شریک ہوتے ہیں ایک دفعہ تفرق کیا جائے تو نئی مساوات میں لا، ما، مَا اور مستقل شریک ہوں گے ان دو مساواتوں سے ایک مستقل ساقط ہو سکیگا۔ اس طرح اسقاط کے بعد جو مساوات حاصل ہو گی وہ رتبہ اول کی تفرقی مساوات ہو گی جس میں مفروضہ مساوات کی نسبت مستقلات کی تعداد بقدر ایک کے کم ہو گی۔

اسی طرح اگر دی ہوئی مساوات کو دو دفعہ تفرق کیا جائے تو کل تین مساواتیں حاصل ہونگی جن سے دو مستقل ساقط ہو سکینگے اور اسقاط کے بعد مساوات محصلہ دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات ہو گی جس میں مستقلات کی تعداد بہ نسبت اصلی مساوات کے بقدر دو کے کم ہو گی۔ وغیرہ وغیرہ۔

ہر صورت میں دی ہوئی مساوات کو محصلہ تفرقی مساوات کا کامل ابتدائی کہتے ہیں۔ ہم نے دیکھا ہے کہ کامل ابتدائی میں ایک، دو، .... مستقل شریک ہوتے ہیں جو متناظر تفرقی مساوات میں نہیں ہوتے جبکہ موخر الذکر بالترتیب رتبہ اول، دوم، .... کی تفرقی مساوات ہو۔ اسقاط کے عمل میں مستقل کی قیمت خواہ یہ کچھ ہی ہو بحث میں نہیں آئی۔ ان مستقلوں کو ہم اختیاری مستقل کہینگے۔

مثال ۱۔ فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات

ما = ا لا + ب ....(۱)

ہے، دو بار تفرق کرنے سے

عف ما = ۲ ا لا ....(۲)

عف۲ ما = ۲ ا ....(۳)

پہلے تفرق سے ب ساقط ہو جاتا ہے، (۲) اور (۳) سے ا ساقط ہو سکتا ہے اور یہ تفرقی مساوات ملتی ہے

لا عف۲ ما − عف ما = ۰ ....(۴)

سے ب کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو (۱) سے قطع مکافی تعبیر ہوتا ہے جس کا وترِ خاص $\frac{1}{1}$ ہے اور جس کا محور، محورِ ما پر منطبق ہوتا ہے۔ پس (۲) ایسے تمام مکافیوں کی تفرقی مساوات ہے، نیز (۴) اُن تمام مکافیوں کی تفرقی مساوات ہے جن کے محور، محورِ ما پر واقع ہوتے ہیں۔

مثال ۲۔ فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات (لا - ا)^{2} + (ما - ب)^{2} = ج^{2} ... (۱) ہے۔ دو دفعہ تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(لا - ا) + (ما - ب) عف ما = ۰ .... (۲)

۱ + (عف ما)^{2} + (ما - ب) عف^{2} ما = ۰ .... (۳)

مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے ا، ب ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ج^{2} (عف^{2} ما)^{2} = {۱ + (عف ما)^{2}}^{3} .... (۴)

مساوات (۴) اُن سب دائروں کی تفرقی مساوات ہے جن کا نصف قطر ج ہے، مساوات (۲) اُن دائروں کی تفرقی مساوات ہے جن کا مرکز (ا، ب) ہے، مساوات (۳) اُن دائروں کی تفرقی مساوات ہے جن کے مرکز خط ما = ب پر واقع ہوتے ہیں۔

۵۵ - پورا تکملہ۔ اگر دفعہ گذشتہ کی پہلی مثال میں ہم فرض کریں کہ مساوات (۴) دی گئی ہے اور اس تفرقی مساوات سے شروع ہو کر تکمل کے عمل سے ہم (۱) حاصل کرتے ہیں تو ایسے عمل کو ہم "مساوات کا تکمل کرنا یا حل کرنا" کہینگے۔

اس نقطۂ نظر سے (۱) کو (۴) کا کامل تکملہ (یا پورا تکملہ) کہنا زیادہ مناسب ہوگا۔ ایسی صورت میں ا، ب کو ہم تکمل کے اختیاری مستقل کہینگے۔

مساوات (۴) دوسرے رتبہ کی ہے اور (۱) میں دو اختیاری مستقل ہیں تفرقی مساواتوں کی مستند کتابوں میں عام تفرقی مساوات کے پورے تکملے کے وجود کے متعلق مسائل ثابت کئے جاتے ہیں اور یہ دکھایا جاتا ہے کہ جب مساوات ن ویں رتبہ کی ہو تو اسکے پورے تکملہ میں ن اختیاری مستقل شریک ہوتے ہیں۔

خاص تکملہ وہ ہے جو پورے تکملہ میں ایک یا زیادہ مستقلوں کو کوئی خاص قیمت دینے سے حاصل ہو مثلاً دفعہ گذشتہ مثال (۱) میں مساوات (۴) کے خاص تکملے ما = لا^۲ - ۱، ما = ۲ لا^۲ ہو سکتے ہیں۔

تفرقی مساوات کے تکمل پر غور کرنے کا ایک اور نقطہ نظر بھی ہے اور وہ یہ ہے۔

تفاعل ما معلوم کرو جو (۱) مساوات لا عف^۲ ما - عف ما = ۰ کو پورا کرے (۲) جو ب کے مساوی ہو جبکہ لا = ۱ (۳) جس کا پہلا مشتق ج ہو جبکہ لا = ۱

چونکہ پورا تکملہ ما = ا لا^۲ + ب ہے جس میں دو اختیاری مستقل ا، ب شریک ہوتے ہیں، ہم ان کی ایسی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں جو شرائط (۲) اور (۳) کو پورا کریں۔ ان شرائط سے حاصل ہوتا ہے

ب = ا ۱^۲ + ب، ج = ۲ ا ۱

پس ا = ج/۲ ۱، ب = ب - ۱/۲ ۱ ج

تفاعل مطلوب ہے ما = (ج/۲ ۱) لا^۲ + (۲ب - ۱ج)/۲ جو شرائط (۱)، (۲)، (۳) کو پورا کرتا ہے۔

اسی طرح کی ایک اور مثال کے لئے ملاحظہ ہو دفعہ ۶۹ حصہ اول مثالیں ۱ اور ۲۔
طالب علم کو چاہئے کہ ذیل کی مشقیں حل کرے۔ ان میں سے کئی تفرقی مساواتیں طبیعیات

میں کثرت سے استعمال ہوتی ہیں ہر صورت میں اگر ابتدائی کو تفرقی مساوات کا تکملہ خیال کیا جائے تو یہ مساوات کا پورا تکملہ ہے۔ یہ دیکھنے میں آئیگا (ملاحظہ ہوں مثالیں ۷، ۸) کہ مختلف ابتدائیوں سے جن میں مستقل مختلف شکلوں میں واقع ہوتے ہیں ایک ہی تفرقی مساوات پیدا ہو سکتی ہے۔

مشق ۱۶

۱۔ اگر ما = ا لا + ب تو عف^{۲} ما = ۰، مساواتوں عف ما = ا، عف^{۲} ما = ۰ کی ہندسی تعبیریں بیان کرو۔

۲۔ اگر ما = ا لا$^{ن-۱}$ + ب لا$^{ن-۲}$ + ... + ک لا + ل منطق صحیح تفاعل ہو (ن − ۱) ویں درجہ کا تو ثابت کرو کہ عف^{ن} ما = ۰۔

۳۔ اگر ما = ا لا^{۲} + ب لا + ج تو عف^{۳} ما = ۰ کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔

۴۔ اگر ما = ا لا^{۳} + ب لا^{۲} + ج لا تو

عف^{۳} (ما/لا) = ۰ یا لا^{۳} عف^{۳} ما − ۳ لا^{۲} عف^{۲} ما + ۶ لا عف ما − ۶ ما = ۰۔

۵۔ اگر ما = ا/لا + ب تو لا^{۲} عف ما = − ا، عف^{۲} ما + (۲/لا) عف ما = ۰۔

۶۔ اگر ما = ا لوگ لا + ب تو لا عف ما = ا، عف^{۲} ما + (۱/لا) عف ما = ۰۔

۷۔ اگر ما = ا جم ن لا + ب جب ن لا یا اگر ما = ج جم (ن لا − ع) تو
عف^{۲} ما + ن^{۲} ما = ۰۔

۸۔ اگر ما = ا تو$^{ن لا}$ + ب تو$^{-ن لا}$ یا اگر ما = ج جمز ن لا + د جبز ن لا تو

عف^{۲} ما − ن^{۲} ما = ۰۔

۹۔ اگر ما = ا/لا + ب + لا^{۲} تو عف^{۲} ما + (۲/لا) عف ما = ۶

۱۰۔ اگر ما = ا جم ن لا + ب جب ن لا + ع جم ف لا + ق جب ف لا
جہاں ا، ب اختیاری ہیں اور ن اور ف ناساوی ہیں تو ثابت کرو کہ

عف^{2} ما + ن^{2} ما = (ن^{2} - ف^{2}) ع جم ف لا + (ن^{2} - ف^{2}) ق جب ف لا

۱۱۔ اگر ما = قو$^{\frac{ک}{۲} لا}$ (ا جم ن لا + ب جب ن لا) تو عف^{2} ما + ک عف ما
+ (ن^{2} + $\frac{۱}{۴}$ ک^{2}) ما = ۰

۱۲۔ اگر ما = قو$^{\frac{ک}{۲} لا}$ (ا قو$^{ن لا}$ + ب قو$^{-ن لا}$) تو عف^{2} ما + ک عف ما
- (ن^{2} - $\frac{۱}{۴}$ ک^{2}) ما = ۰

۱۳۔ اگر ما = ا قو$^{م لا}$ + ب قو$^{ن لا}$ تو عف^{2} ما - (م + ن) عف ما + م ن ما = ۰

۱۴۔ اگر ما = (ا + ب لا) قو$^{ن لا}$ تو عف^{2} ما - ۲ن عف ما + ن^{2} ما = ۰
[مقابلہ کرو سوالات ۱۳ اور ۱۴ کا]

۱۵۔ اگر ما = (ا + ب لا) جم ن لا + (ج + د لا) جب ن لا تو
عف^{4} ما + ۲ن^{2} عف^{2} ما + ن^{4} ما = ۰

۱۶۔ اگر ما = (ا جم ن لا + ب جب ن لا)/لا تو
عف^{2}(لا ما) + ن^{2} لا ما = ۰ یا عف^{2} ما + $\frac{۲}{لا}$ عف ما + ن^{2} ما = ۰

۱۷۔ اگر ما = (ا قو$^{ن لا}$ + ب قو$^{-ن لا}$)/لا تو
عف^{2} ما + $\frac{۲}{لا}$ عف ما - ن^{2} ما = ۰

۱۸۔ اگر ما = م لا + $\frac{۱}{م}$ جہاں م اختیاری مستقل ہے تو
لا (عف ما)^{2} - ما عف ما + ۱ = ۰

۱۹- اگر $\frac{لا^2}{ا^2+ک} + \frac{ما^2}{ب^2+ک} = ۱$ جہاں ک اختیاری مستقل ہے تو

$$لا ما (عف ما)^2 + (لا^2 - ما^2 - ا^2 + ب^2) عف ما - لا ما = ۰$$

ابتدائی مرکز دار مخروطیوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے جن سب کے ماسکے وہی ہیں [مرکز دار ہم ماسکے]

۲۰- ثابت کرو کہ دفعہ ۴۵ کی مساوات (۲۳) کا پورا تکملہ ہے

$$ف(لا) = ا جب(ا جب^{-1} لا) + ب جم(ا جب^{-1} لا)$$

جہاں ا، ب اختیاری مستقل ہیں۔

۵۶- رتبۂ اول اور درجۂ اول کی مساواتیں۔ اب ہم مساواتوں کے ایک دو نمونے ایسے بیان کریں گے جن کا تکمل بآسانی عمل میں آسکتا ہے بہر کیف انکا تکمل معمولی تکملوں کی قیمت دریافت کرنے کے عمل پر آکے منحصر ہوسکتا ہے۔ جہاں تک تفرقی مساواتوں کے نظریہ سے تعلق ہے اگر کسی مساوات کو ذیل کی کسی ایک صورت میں تحویل کر دیا جائے

$$\frac{فرما}{فرلا} = ف(لا)، \quad \frac{فرما}{فرلا} = فا(ما)،$$

تو ہم مساوات کو حل شدہ قرار دینگے کیونکہ ان مساواتوں کے تکملے ہیں

$$ما = \int ف(لا) فرلا + م (مستقل)، \quad لا = \int \frac{فرما}{فا(ما)} + م (مستقل)،$$

اور اسکے بعد معمولی عمل تکمل ہے۔

نمونہ ۱- متغیر جدائی پذیر۔ متغیر جدائی پذیر خیال کئے جاتے ہیں جبکہ مساوات کو اس طرح لکھنا ممکن ہو۔

$$ف(لا) فرلا + فا(ما) فرما = ۰$$

جہاں ف(لا) صرف لا کا تفاعل ہے اور فا(ما) صرف ما کا، مساوات کا حل اس صورت میں ہے $\int ف(لا) فرلا + \int فا(ما) فرما = م$

مثال ۱ - ن (لا + ا) عف ما + م (ما + ب) = ۰

یعنی

$$\frac{\text{ن ق ما}}{\text{ما + ب}} + \frac{\text{م ق لا}}{\text{لا + ا}} = ۰$$

اس لئے ن لوک (ما + ب) + م لوک (لا + ا) = مستقل

یا لوک $[\,(\text{ما + ب})^{\text{ن}} (\text{لا + ا})^{\text{م}}\,]$ = مستقل

یا $(\text{ما + ب})^{\text{ن}} (\text{لا + ا})^{\text{م}}$ = م

اوپر کی تین مساواتوں میں سے کوئی ایک تفرقی مساوات کا حل خیال کیجا سکتی ہے لیکن آخری مساوات جبریہ شکل میں ہونے کی وجہ سے زیادہ موزوں ہے ۔

نمونہ ۲ - **متجانس مساواتیں** - تفرقی مساوات متجانس کہلاتی ہے اگر وہ اس شکل کی ہو

$$\text{عف ما} = \frac{\text{ف (لا، ما)}}{\text{فا (لا، ما)}}$$

جہاں ف (لا، ما)، فا (لا، ما) دونوں میں ایک ہی درجہ کے متجانس تفاعل ہیں ۔

اوپر کی مساوات کو حل کرنے کے لئے متغیر تابع کی بجائے رکھو ما = و لا

مساوات ہوجاتی ہے $\text{لا عف و + و} = \frac{\text{ف (۱، و)}}{\text{فا (۱، و)}} = \text{فہا (و)}$

اب متغیر جدا ہوسکتے ہیں ۔

مثال ۲ - ۲ لا ما عف ما = $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲}$

رکھو ما = و لا، اس طرح حاصل ہوتا ہے $۲\ \text{و}\ \text{لا}^{۲} (\text{لا عف و + و}) = \text{لا}^{۲} (۱ + \text{و}^{۲})$

جس سے

$$\frac{\text{ق لا}}{\text{لا}} - \frac{\text{۲ و ق و}}{۱ - \text{و}^{۲}} = ۰$$

اس لئے لوک $\{لا(۱ - و^۲)\}$ = مستقل = لوک م

یا $لا^۲ - ما^۲ = م\ لا$ ، م اختیاری مستقل ہے۔

مساوات (ا لا + ب ما + ج) عف ما = اَ لا + بَ ما + جَ کو
اس طرح متجانس بنا سکتے ہیں۔ رکھو ضا = ا لا + ب ما + ج } بشرطیکہ
عا = اَ لا + بَ ما + جَ ، }
ا بَ - اَ ب صفر نہ ہو [دیکھو مشق ۷، ا سوال ۶]

نمونہ ۳۔ خطی مساواتیں۔ تفرقی مساوات خطی کہلاتی ہے جبکہ متغیر تابع
اور اسکے مشتقات جو اس میں شریک ہوں سب درجہ اول کے ہوں۔
پس رتبہ اول کی خطی مساوات اس شکل کی ہوگی

عف ما + ف ما = ق

جہاں ف اور ق صرف لا کے تفاعل (یا مستقل) ہیں۔

فرض کرو کہ $ف_۱ = \int ف\ ولا$ ، مساوات کو $و^{ف_۱}$ سے ضرب دو

اب چونکہ عف $و^{ف_۱} = و^{ف_۱}$ عف $ف_۱ = و^{ف_۱} \times ف$

اس لئے حاصل ہوتا ہے $و^{ف_۱}$ عف ما + $و^{ف_۱}$ ف ما = عف ($و^{ف_۱}$ ما)

اسلئے عف ($و^{ف_۱}$ ما) = $و^{ف_۱}$ ق

اسلئے $و^{ف_۱}$ ما = $\int و^{ف_۱}$ ق ولا + م

نتیجہ صریح۔ مساوات عف ما + ف ما = ق $ما^{ن}$ خطی مساوات کی
صورت میں لائی جا سکتی ہے اگر ہم رکھیں $و = ما^{-ن+۱}$ اور و کو متغیر تابع

فرض کریں۔

مثال ۳۔ $(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}})\ \text{عف ما} + \text{لا ما} = \text{ا لا}$

یہاں $\text{عف ما} + \frac{\text{لا}}{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}\ \text{ما} = \frac{\text{ا لا}}{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}$

اور $\text{ف}_{\text{۱}} = \int \frac{\text{لا ولا}}{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}} = -\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\ \text{لوک}\ (\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}) = \text{لوک}\ \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}}$

$$\text{و}^{\text{ف}_{\text{۱}}} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}}$$

اسلئے $\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}} \times \text{ما} = \int \frac{\text{ا لا ولا}}{(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}} + \text{م} = \frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}} + \text{م}$

پس $\text{ما} = \text{ا} + \text{م} \sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}$

مثال ۴۔ قوت لا کی ایک برقی رو ایک ایسے دورہ میں بہ رہی ہے جسکی امالیت ل ہے اور مزاحمت ز، برقی رو پر بیرونی قوت محرکہ برق م عمل کرتی ہے، رو کی مساوات وقت ت پر ہوگی

$$\text{ل}\ \dot{\text{لا}} + \text{ز لا} = \text{م}$$

پہلے فرض کرو کہ م مستقل ہے اور مساوی ہے $\text{م}_{\text{۱}}$ کے، نیز ل اور ز مستقل ہیں

$$\dot{\text{لا}} + \frac{\text{ز}}{\text{ل}}\ \text{لا} = \frac{\text{م}_{\text{۱}}}{\text{ل}}$$

اسلئے $\text{و}^{\frac{\text{زت}}{\text{ل}}}\ \text{لا} = \frac{\text{م}_{\text{۱}}}{\text{ل}} \int \text{و}^{\frac{\text{زت}}{\text{ل}}}\ \text{وت} + \text{م} = \frac{\text{م}_{\text{۱}}}{\text{ز}}\ \text{و}^{\frac{\text{زت}}{\text{ل}}} + \text{م}$

اور $\text{لا} = \frac{\text{م}_{\text{۱}}}{\text{ز}} + \text{م}\ \text{و}^{-\frac{\text{زت}}{\text{ل}}}$

جب ت = ۰، لا = ۰ اور اس لئے م = - م۱/ز

اسلئے لا = م۱/ز (۱ - و^(- زت/ل))

اس میں م۱/ز و^(- زت/ل) زائد یا امالہ شدہ (Induced) رو ہے جو معدوم ہو جاتی ہے جیسے کل رو اپنی قائم قیمت م۱/ز حاصل کرلیتی ہے۔
اسکے بعد فرض کرو کہ م = م۱ جم (ف ت - عہ)

اب چونکہ ∫ و^(زت/ل) جم (ف ت - عہ) فرت = (ل و^(زت/ل))/(ز^۲ + ف^۲ ل^۲) [ز جم (ف ت - عہ) - ف ل جب (ف ت - عہ)]

ہمیں حاصل ہوتا ہے لا = م و^(- زت/ل) + م۱/(ز^۲ + ف^۲ ل^۲) [ز جم (ف ت - عہ) - ف ل جب (ف ت - عہ)]

جیسے ت بڑہتا ہے رقم م و^(- زت/ل) کے قابل لحاظ ہونے کی اہمیت کم ہوتی جاتی ہے اور دوسری رقم سے قائم اہتزاز حاصل ہوتا ہے، قائم اہتزاز کو اس شکل میں بھی لکھہ سکتے ہیں

لا = م۱/√(ز^۲ + ف^۲ ل^۲) جم (ف ت - عہ - عہ۱)

جہاں مس عہ۱ = ف ل/ز، مقدار √(ز^۲ + ف^۲ ل^۲) کو حلقہ کی مقاومت (Impendance) کہتے ہیں۔

نمونہ ۴ - حاضر مساواتیں - مساوات

م + ن عف ما = ۰ یا م فرلا + ن فرما = ۰

کو حاضر یا ٹھیک مساوات کہینگے جبکہ م، ن، لا اور ما کے تفاعل ہوں

اور م فرلا + ن فرما ۔ پورا تفرقہ ہو یعنی $\frac{\text{جف م}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}}$ (دفعہ ۹۴، حصہ اول)

ایسی صورت میں ایک تفاعل ع ایسا موجود ہے کہ فرع = م فرلا + ن فرما

اور مساوات کا تکملہ ہے ع = مستقل۔

مثال ۵ - ۲لا ما - ما۲ + ۲لا + (لا۲ - ۲لا ما + ۲ما) عف ما = ۰

یہاں م = ۲لا ما - ما۲ + ۲لا، ن = لا۲ - ۲لا ما + ۲ما

اور $\frac{\text{جف م}}{\text{جف ما}} = ۲\text{لا} - ۲\text{ما} = \frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}}$

پس معلوم ہوا کہ یہ مساوات حاضر یا تیار مساوات ہے۔ اسلئے ہم مساوات کو کامل تفرقوں کے مجموعہ کے طور پر ترتیب دے سکتے ہیں۔

یعنی (۲لا ما فرلا + لا۲ فرما) - (ما۲ فرلا + ۲لا ما فرما) + ۲لا فرلا + ۲ما فرما

یعنی فر(لا۲ ما) - فر(لا ما۲) + فر(لا۲) + فر(ما۲)

پس ع = لا۲ ما - لا ما۲ + لا۲ + ما۲

اور تکملہ ہے لا۲ ما - لا ما۲ + لا۲ + ما۲ = ق (مستقل)

مثال ۶ - لا۳ - ۲ما۲ + ۲لا ما عف ما = ۰

یہ حاضر مساوات نہیں ہے لیکن اگر اسے $\frac{1}{\text{لا}^3}$ سے ضرب دیدیا جائے تو یہ حاضر مساوات ہو جائے گی،

$\frac{\text{لا}^3 - ۲\text{ما}^2}{\text{لا}^3} + \frac{۲\text{ما}}{\text{لا}^2}\text{عف ما} = \text{عف}\left(\frac{\text{لا}^3 + \text{ما}^2}{\text{لا}^2}\right)$

تکملہ ہے $\frac{\text{لا}^3 + \text{ما}^3}{\text{لا}^2} = \text{ق}$ یا $\text{لا}^3 + \text{ما}^3 = \text{ق لا}^2$ جہاں ق مستقل ہے

جزوِ ضربی $\frac{1}{\text{لا}^3}$ کو جسکے ساتھ ضرب دینے سے مساوات حاضر بن جاتی ہے **متکمل جزوِ ضربی** کہتے ہیں۔ جب کوئی مساوات "حاضر" نہ ہو تو کوئی ایسا متکمل جزوِ ضربی بجانب لینے سے مساوات حاضر بن جاتی ہے اور تکمل ہوسکتی ہے۔

۵۷۔ مساواتیں جو رتبہ اول کی ہیں لیکن درجہ اول کی نہیں۔ عف ما کو ع سے تعبیر کرو، اگر مساوات ن ویں درجہ کی ہو تو یہ اس کی شکل ہوگی

$$\text{ا ع}^{\text{ن}} + \text{ب ع}^{\text{ن}-1} + \ldots\ldots + \text{ط ع} + \text{ل} = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

جہاں ا، ب، ...... لا، ما کے تفاعل ہیں یا مستقل ہیں۔
اگر ممکن ہو تو ع کے لئے حل کرو، عام طور پر ع کی ن قیمتیں ہونگی

$$\text{ع} = \text{ع}_1،\ \text{ع} = \text{ع}_2،\ \ldots\ldots$$

اور ان میں سے ہر ایک مساوات کو تکمل کرنے سے جو رشتہ حاصل ہوگا وہ (۱) کو پورا کریگا۔

مثال ۱۔ $\text{لا ما ع}^2 - (\text{لا}^2 + \text{ما}^2)\,\text{ع} + \text{لا ما} = 0.$

اسلئے $\text{ع} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ یا $\text{ع} = \frac{\text{لا}}{\text{ما}}$

اور ان مساواتوں کے تکملے ہیں $\text{ما} = \text{ص لا}$، $\text{ما}^2 - \text{لا}^2 = \text{س}$ جہاں ص اور س مستقل ہیں۔

مثال ۲۔ کلیرو کی مساوات $\text{ما} = \text{لا ع} + \text{ف}(\text{ع}) \quad \ldots\ldots (1)$
یہ خاص صورت کی مساوات ہے، اس کو اس طرح تکمل کرتے ہیں۔
(۱) کو بلحاظ لا کے تفرق کرو، حاصل ہوگا

$$\text{ع} = \text{ع} + \text{لا}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} + \text{فَ}(\text{ع})\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$$

$$\text{یا}\ \{\text{لا} + \text{فَ}(\text{ع})\}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \cdot \quad \ldots\ldots (۲)$$

$$\text{پس}\ \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \cdot\ \text{یعنی}\ \text{ع} = \text{مستقل} = \text{ج}$$

$$\text{لا} + \text{فَ}(\text{ع}) = \cdot \quad \ldots\ldots (۳)$$

(۱) ع کے لئے مندرج کرنے سے پورا تکملہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = \text{ج}\,\text{لا} + \text{ف}(\text{ج}) \quad \ldots\ldots (۴)$$

علاوہ اسکے اگر (۱) اور (۳) سے ع ساقط کر دیا جائے تو لا اور ما میں رشتہ حاصل ہوگا جو (۱) کو پورا کریگا، یہ رشتہ (۴) میں ج کو کوئی خاص قیمت دینے سے حاصل نہیں ہو سکتا۔ اسکو ہم مساوات کا نادر حل کہینگے۔

دراصل نادر حل خطوط کے قبیل (۴) کا لفاف ہے، کیونکہ اگر ہم (۴) اور لا + فَ (ج) = ۰ سے ج کو ساقط کریں تو صریحاً لا، ما میں وہی رشتہ حاصل ہوگا جسے نادر حل کہتے ہیں (صرف ج اور ع کا تبادلہ کر دیا گیا ہے) اور دفعہ ۳۶ میں ہم نے دیکھا ہے کہ لفاف کا ڈھال وہی ہوتا ہے جو کہ قبیل (۴) کے منحنیوں کا ان کے انتہائی نقاط تقاطع پر۔

مثال کے طور پر $\text{ما} = \text{لا}\,\text{ع} + \frac{۱}{\text{ع}}$ کا پورا تکملہ

$$\text{ما} = \text{ج}\,\text{لا} + \frac{۱}{\text{ج}}\ \text{ہے}$$

اور نادر حل　$\text{ما}^{۲} = ۴\,\text{لا}$

۵۸۔ رتبہ دوم کی مساواتیں۔

نمونہ ۱۔ $\text{عف}^{۲}\,\text{ما} = \text{ف}(\text{لا})$ جو صرف لا کا تفاعل ہے۔

بلحاظ لا کے دو بار تکمل کرو، دو اختیاری مستقل شریک ہونگے۔

نمونہ ۲ ۔ عف^۲ ما = ف (ما) صرف ما کا تفاعل ۔

عف ما کے ساتھ ضرب دو، تب چونکہ عف ما عف^۲ ما = عف [½ (عف ما)^۲]

½ (عف ما)^۲ = ∫ ف (ما) عف ما ولا + م (مستقل) = ∫ ف (ما) وما + م

اب یہ رتبۂ اول کی مساوات ہے، ممکن ہے کہ یہ آگے تکمل ہو سکے۔

مثال ۱ ۔ طول ل کے سادہ رقاص کی حرکت کی مساوات ہے

ل طہ̈ = ۔ ج جب طہ، تکمل کرنے کی غرض سے طہ̇ کے ساتھ ضرب دو، حاصل ہوگا

½ ل (طہ̇)^۲ = ج جم طہ + م جہاں م مستقل ہے۔

جب ت = ۰ تو فرض کرو کہ طہ = عہ اور طہ̇ = ۰

اس طرح م = ۔ ج جم عہ

۔۔۔ طہ̇ = ۔ √(۲ج/ل) √(جم طہ ۔ جم عہ) = ۔ ۲ √(ج/ل) √(جب^۲ عہ/۲ ۔ جب^۲ طہ/۲)

علامت جذر کے پہلے نفی علامت لی گئی ہے کیونکہ ت کے بڑھنے سے طہ گھٹتا ہے

اب رکھو جب طہ/۲ = جب عہ/۲ جب فہ، تحویل کے بعد

دت/دفہ = ۔ √(ل/ج) × ۱/√(۱ ۔ جب^۲ عہ/۲ جب^۲ فہ)

ابتدائی تفاعلوں کے واسطہ سے یہ تکمل عمل میں نہیں آسکتا، لیکن ت کو ایک لامتناہی سلسلہ کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں ۔ ت کی قیمت چوتھائی مدت دوران کے لئے ہے ۲ط √(ل/ج) [دفعہ ۷۴، مثال ۳] عام طور پر

$$\text{ت} = \sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{فرفہ}}{\sqrt{1 - \text{جب}^2 \frac{\text{عہ}}{2} \text{جب}^2 \text{فہ}}}$$

نمونہ ۳ - $\text{عف}^2 \text{ما} = \text{ف}(\text{عف ما})$ جو صرف عف ما کا تفاعل ہے۔
فرض کرو کہ عف ما = و، حاصل ہوگا $\text{عف و} = \text{ف}(\text{و})$، اس سے و معلوم کرنا ممکن ہے، اسکے بعد ما معلوم ہوسکتا ہے۔

مثال ۲ - مساوات $\text{ج عف}^2 \text{ما} = \{1 + (\text{عف ما})^2\}^{\frac{3}{2}}$ سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \frac{\text{ج و}}{\sqrt{1 + \text{و}^2}} + \text{ا} \;(\text{مستقل})$$

$$\text{عف ما} = \text{و} = \pm \frac{(\text{لا} - \text{ا})}{\sqrt{\{\text{ج}^2 - (\text{لا} - \text{ا})^2\}}}$$

$$\text{ما} = \mp \sqrt{\{\text{ج}^2 - (\text{لا} - \text{ا})^2\}} + \text{ب} \;(\text{مستقل})$$

$$\text{یا} \quad (\text{لا} - \text{ا})^2 + (\text{ما} - \text{ب})^2 = \text{ج}^2$$

۵۹- خطی مساواتیں - رتبۂ دوم کے نمونہ کی خطی مساوات یہ ہے

$$\text{عف}^2 \text{ما} + \text{ط عف ما} + \text{ق ما} = \text{ر} \quad ......(1)$$

جہاں ط، ق، ر صرف لا کے تفاعل ہیں (یا مستقل ہیں)
تمام خطی مساواتوں کا پورا تکملہ دو تفاعلوں کا حاصل جمع ہوتا ہے

(۱) متمم تفاعل (م، ف) جو اوپر کی مساوات (۱) کا پورا تکملہ ہو جبکہ ر (یا عام طور پر وہ رقم جو ما اور اسکے مشتقوں پر منحصر نہ ہو) صفر ہو۔ اس تفاعل میں دو (اور ن ویں رتبہ کی مساوات میں ن) اختیاری مستقل ہونگے۔

(۲) خاص تکملہ (خ، ت) جو پوری مساوات (۱) کا حل ہو جیسے یہ اوپر مندرج ہے یعنی جبکہ اسکے دائیں بائیں جانب سے رکن دونوں برقرار رکھے جائیں۔ اس تفاعل

میں اختیاری مستقل نہیں واقع ہونگے۔

ہم ذیل کا مسئلہ صرف رتبہ دوم کی مساواتوں کے لئے ثابت کرتے ہیں، لیکن استدلال عام ہے۔ ن ویں رتبہ کی مساوات کے لئے ع، و کی طرح کے ن تفاعل ہونگے اور حل میں ن اختیاری مستقل شریک ہونگے۔

اگر ما = ع اور ما = و مساوات ذیل کو پورا کریں

عف^۲ ما + ط عف ما + ق ما = ۰ .... (۲)

تو ا ع + ب و بھی پورا کریگا، ا، ب اختیاری مستقل ہیں۔

کیونکہ اگر عف^۲ ع + ط عف ع + ق ع = ۰ اور عف^۲ و + ط عف و + ق و = ۰

تو عف^۲ (ا ع + ب و) + ط عف (ا ع + ب و) + ق (ا ع + ب و) = ۰

یعنی ا ع + ب و مساوات (۲) کو پورا کرتا ہے۔

اب اگر ما = ھ خاص تکملہ ہو یعنی اگر ھ مساوات (۱) کو پورا کرے اور ا ع + ب و متمم تفاعل ہو تو ا ع + ب و + ھ مساوات (۱) کو پورا کریگا

کیونکہ اگر ما = ا ع + ب و + ھ تو

عف^۲ ما + ط عف ما + ق ما = عف^۲ (ا ع + ب و) + ط عف (ا ع + ب و)

+ ق (ا ع + ب و) + عف^۲ ھ + ط عف ھ + ق ھ

= صفر + ر [کیونکہ بائیں جانب کا پہلا حصہ صفر کے مساوی ہے اور ھ مساوات (۱) کو پورا کرتا ہے اسلئے دوسری سطر ر ہے]

پس ما کی یہ قیمت (۱) کو پورا کرتی ہے اور چونکہ اس میں دو مستقل ہیں یہ جملہ مساوات (۱) کا پورا تکملہ ہے۔

اس جگہ ہم صرف اُن مساواتوں پر غور کرینگے جن میں ط اور ق محض مستقل ہیں۔

۶۰ – متمم تفاعل – ذیل کی مساوات کو تکمل کرنا ہے

$$\text{عف}^2\,\text{ما} + \text{ا}\,\text{عف}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

(۱) فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{قو}^{\text{لمہ لا}}$ (لمہ مستقل)، تب

$$(\text{لمہ}^2 + \text{ا}\,\text{لمہ} + \text{ب})\,\text{قو}^{\text{لمہ لا}} = 0$$

پس اگر لمہ ذیل کی معاون مساوات کی اصل ہو تو

$$\text{لمہ}^2 + \text{ا}\,\text{لمہ} + \text{ب} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

تو $\text{قو}^{\text{لمہ لا}}$ مساوات (۳) کو پورا کریگا۔ (۴) کی دو اصلیں لمہ_1، لمہ_2 ہیں

$$\text{لمہ}_1 = -\frac{\text{ا}}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}\text{ا}^2 - \text{ب}}\,,\quad \text{لمہ}_2 = -\frac{\text{ا}}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}\text{ا}^2 - \text{ب}}$$

اور $\text{قو}^{\text{لمہ}_1 \text{لا}}$، $\text{قو}^{\text{لمہ}_2 \text{لا}}$ مساوات (۳) کے دو حل ہیں۔

پس (۳) کا پورا تکملہ ہے

$$\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{\text{لمہ}_1 \text{لا}} + \text{ب}\,\text{قو}^{\text{لمہ}_2 \text{لا}} = \text{قو}^{-\frac{\text{ا}}{2}\text{لا}}\left(\text{ا}\,\text{قو}^{\text{ن لا}} + \text{ب}\,\text{قو}^{-\text{ن لا}}\right)$$

$$\text{جہاں}\quad \text{ن} = \sqrt{\frac{1}{4}\text{ا}^2 - \text{ب}} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

اب ہم خاص صورتوں پر غور کرتے ہیں۔

(۲) اگر $\text{ا}^2 = 4\text{ب}$ تو مساوات (۴) کی دونوں مساوی اصلیں ہونگی یعنی $\text{لمہ}_1 = \text{لمہ}_2 = -\frac{\text{ا}}{2}$ ایسی حالت میں مساوات (۵) ہو جائیگی

$$\text{ما} = (\text{ا} + \text{ب})\,\text{قو}^{-\frac{1}{2}\text{ا لا}}$$

اور اس میں اختیاری مستقل صرف ایک ہے کیونکہ ا + ب کی بجائے ہم ج لکھ سکتے ہیں۔ جب، $\text{ا}^2 = 4\text{ب}$ تو فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{قو}^{-\frac{1}{2}\text{ا لا}}\,\text{ع}$ اور مساوات (۳) ہو جاتی ہے جزو ضربی $\text{قو}^{-\frac{1}{2}\text{ا لا}}$ کو نظر انداز کرنے سے

$عف^۲ ع = ۰$، جس کا پورا تکملہ $ع = ا + ب لا$

پس (۳) کا پورا تکملہ اُس صورت میں جبکہ معاون مساوات کی اصلیں مساوی ہوں، ہر ایک $= -\frac{ا}{۲}$ یہ ہے

$$ما = (ا + ب لا) \, قو^{-\frac{ا}{۲} لا} \quad ......(۶)$$

(۳) اگر $ا^۲ < ۴ ب$ تو (۴) کی اصلیں خیالی ہیں - پھر فرض کرو کہ

$ما = قو^{-\frac{ا}{۲} لا} ع$ اور مساوات (۳) ہو جاتی ہے

$$عف^۲ ع + م^۲ ع = ۰ \quad ......(۷)$$

جہاں $\frac{۱}{۴} ا^۲ - ب = - م^۲$ اور م حقیقی ہے۔

اب $ع = جم \, م لا$، $ع = جب \, م لا$ دونوں (۷) کو پورا کرتے ہیں، پس اسکا پورا تکملہ ہے

$$ع = ا \, جم \, م لا + ب \, جب \, م لا$$

اور (۳) کا پورا تکملہ جبکہ $ا^۲ < ۴ ب$ یہ ہے

$$ما = قو^{-\frac{ا}{۲} لا} ع = قو^{-\frac{ا}{۲} لا} (ا \, جم \, م لا + ب \, جب \, م لا) \quad ...(۸)$$

اب ہم دیکھینگے کہ (۵) اور (۸) کس طرح لکھے جا سکتے ہیں جبکہ (۴) کی اصلیں معلوم ہوں، فرض کرو کہ خ حسب معمول $\sqrt{-۱}$ کو تعبیر کرتا ہے، (۴) کی اصلیں جب حقیقی ہوں تو رکھو $\frac{ا^۲}{۴} - ب = ن^۲$، اصلیں اس حالت میں ہونگی۔

$$-\frac{ا}{۲} + ن، \quad -\frac{ا}{۲} - ن$$

اور حل ہے $ما = قو^{-\frac{ا}{۲} لا} (ا \, قو^{ن لا} + ب \, قو^{-ن لا})$

اگر (۴) کی اصلیں خیالی ہوں تو رکھو $\frac{ا^۲}{۴} - ب = - ن^۲$

اور اصلیں ہیں - ۱/۲ + ن خ ، - ۱/۲ - ن خ

اور حل ہے ما = قو^(-لا/۲) (ا جم ن لا + ب جب ن لا)

گویا قو^(خ ن لا) ، قو^(-خ ن لا) کی بجائے ہم رکھتے ہیں جم ن لا ، جب ن لا۔
یہ قابل توجہ ہے کہ معاون مساوات عف کی بجائے لہ رکھنے اور ما کو نکال دینے سے حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۱۔ عف^۲ ما + ۷ عف ما - ۸ ما = ۰

معاون مساوات لہ^۲ + ۷ لہ - ۸ = ۰ ، لہ₁ = ۱ ، لہ₂ = -۸

حل ما = ا قو^لا + ب قو^(-۸ لا)

مثال ۲۔ عف^۲ ما + ۲ عف ما + ۱۰ ما = ۰

معاون مساوات لہ^۲ + ۲ لہ + ۱۰ = ۰ ، لہ₁ = -۱ + ۳ خ ، لہ₂ = -۱ - ۳ خ

حل ما = قو^(-لا) (ا جم ۳ لا + ب جب ۳ لا)

مثال ۳۔ عف^۴ ما - ۲ عف^۳ ما + ۵ عف^۲ ما - ۸ عف ما + ۴ ما = ۰

معاون مساوات لہ^۴ - ۲ لہ^۳ + ۵ لہ^۲ - ۸ لہ + ۴ = ۰

لہ₁ = ۱ = لہ₂ ، لہ₃ = ۲ خ ، لہ₄ = -۲ خ

مساوی اصلوں لہ₁ ، لہ₂ سے ملتا ہے (ا + ب لا) قو^لا ، خیالی اصلوں ۲ خ ، -۲ خ سے ج جم ۲ لا + د جب ۲ لا ، پس

ما = (ا + ب لا) قو^لا + ج جم ۲ لا + د جب ۲ لا

۶۱۔ **خاص تکملہ۔** نہایت مشہور عملی طور پر کارآمد صورتیں وہ ہیں جن میں ر اس طرح کی رقموں ل قو^(ع لا) ، ل جب ع لا ، ل جم ع لا کا

مجموعہ ہو۔ خاص تکملہ معلوم کرنے کا آسان طریقہ ابدال کا ہے۔ مساوات (۱) اب ہے

عف^۲ ما + ا عف ما + ب ما = ر .... (۹)

صورت اول - ر = ل قو^{عملا}، فرض کرو کہ ما = ج قو^{عملا}، ہم ج کی ایسی قیمت معلوم کرتے ہیں کہ مساوات (۹) پوری ہو جائے۔ درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ج (عم^۲ + ا عم + ب) قو^{عملا} = ل قو^{عملا}

پس ج قو^{عملا} مساوات کو پورا کریگا اگر ج = ل / (عم^۲ + ا عم + ب)

لیکن اسکی مستثنیٰ صورتیں ہیں

صورت اول (۱) اگر عم معاون مساوات (۴) کی اصل ہو تو

عم^۲ + ا عم + ب = ۰

اور ج کی قیمت لامتناہی ہوگی، اس حالت میں ج لا قو^{عملا} مندرج کرکے دیکھو اگر عم معاون مساوات کی اکہری اصل ہو اور ج لا^۲ قو^{عملا} کرکے دیکھو اگر عم دوہری اصل ہو۔

مثال ا- عف^۲ ما - ۲ عف ما + ما = قو^{لا} + قو^{۲لا}

معاون مساوات لہ^۲ - ۲ لہ + ا = ۰ لہ = ا، دو دفعہ

خاص تکملہ معلوم کرنے کے لئے قو^{لا}، قو^{۲لا} کے ساتھ الگ الگ عمل کرکے دیکھو۔ چونکہ ا معاون مساوات کی دوہری اصل ہے، اس لئے قو^{لا} کے جواب میں خاص تکملہ معلوم کرنے کے لئے آزمایشی حل ج لا^۲ قو^{لا} لو اور قو^{۲لا} کے لئے د قو^{۲لا}۔ پس رکھو ما = ج لا^۲ قو^{لا} + د قو^{۲لا}

مساوات ہو جاتی ہے ۲ ج قو^{لا} + د قو^{۲لا} = قو^{لا} + قو^{۲لا}

جس سے $\text{ج} = \frac{۱}{۲}$ ، $\text{د} = ۱$ ، اسلئے

$$\text{خاص تکملہ} = \frac{۱}{۲}\,\text{لا}^{۲}\,\text{قو}^{\text{لا}} + \text{قو}^{۲\text{لا}}$$

$\text{قو}^{۲\text{لا}}$ کے جواب میں خاص تکملہ کا جو حصہ ہے وہ صورت اول کے بلا واسطہ استعمال سے حاصل ہو سکتا ہے پورا تکملہ ہے متمم تفاعل + خاص تکملہ

$$= (\text{ا} + \text{ب لا})\,\text{قو}^{\text{لا}} + \frac{۱}{۲}\,\text{لا}^{۲}\,\text{قو}^{\text{لا}} + \text{قو}^{۲\text{لا}}$$

صورت دوم ۔ $\text{ی} = \text{ل جب عہ لا} + \text{م جم عہ لا}$

آزمایشی حل اس صورت میں لو

$$\text{ہا} = \text{د جب عہ لا} + \text{ف جم عہ لا}$$

مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(-\text{عہ}^{۲}\text{د} - \text{ا عہ ف} + \text{ب د})\,\text{جب عہ لا} + (-\text{عہ}^{۲}\text{ف} + \text{ا عہ د} + \text{ب ف})\,\text{جم عہ لا}$$

$$= \text{ل جب عہ لا} + \text{م جم عہ لا}$$

اور مساوات پوری ہوگی اگر

$$(\text{ب} - \text{عہ}^{۲})\,\text{د} - \text{ا عہ ف} = \text{ل} \text{ ، } \text{ا عہ د} + (\text{ب} - \text{عہ}^{۲})\,\text{ف} = \text{م}$$

$$\text{یا}\quad \text{د} = \frac{(\text{ب} - \text{عہ}^{۲})\,\text{ل} + \text{ا عہ م}}{(\text{ب} - \text{عہ}^{۲})^{۲} + \text{ا}^{۲}\,\text{عہ}^{۲}} \text{ ، } \text{ف} = \frac{-\text{ا عہ ل} + (\text{ب} - \text{عہ}^{۲})\,\text{م}}{(\text{ب} - \text{عہ}^{۲})^{۲} + \text{ا}^{۲}\,\text{عہ}^{۲}}$$

اگر $\text{ا} = ۰$ تو حاصل ہوتا ہے $\text{د} = \frac{\text{ل}}{\text{ب} - \text{عہ}^{۲}}$ ، $\text{ف} = \frac{\text{م}}{\text{ب} - \text{عہ}^{۲}}$

لیکن یہ حل ناکام رہتا ہے اگر $\text{عہ}^{۲} = \text{ب}$ یعنی جب متمم تفاعل $\text{ال جم عہ لا} + \text{ب جب عہ لا}$ ہو۔ ایسی حالت میں

صورت دوم (ا) اگر $\text{ا} = ۰$ اور $\text{عہ}^{۲} = \text{ب}$ تو آزمائش سے معلوم ہوگا کہ

$$\text{خاص تکملہ} = -\frac{\text{ل}}{۲\text{عہ}}\,\text{لا جم عہ لا} + \frac{\text{م}}{۲\text{عہ}}\,\text{لا جب عہ لا}$$

جہاں ر = ل جب عہ لا + م جم عہ لا

مثال ۲۔ مساوات لا + ک لا + مہ لا = ا جم (ن ت ۔ عہ) ......(۱)

حرکی اور برقی نظریہ میں نمونہ کی مساوات ہے۔

متمم تفاعل معلوم کرنا آسان ہے۔ خاص تکملہ معلوم کرنے کے لئے آزمائش کے طور پر رکھو

لا = د جم (ن ت ۔ عہ) + ف جب (ن ت ۔ عہ) ......(۲)

(۱) میں رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

(۔ ن^2 د + ک ن ف + مہ د) جم (ن ت ۔ عہ)

+ (۔ ن^2 ف ۔ ک ن د + مہ ف) جب (ن ت ۔ عہ)

= ا جم (ن ت ۔ عہ)

پس (۱) پوری ہوگی اگر

(مہ ۔ ن^2) د + ک ن ف = ا، ۔ ک ن د + (مہ ۔ ن^2) ف = ۰

اسلئے د = $\frac{(\text{مہ} - \text{ن}^2)\,\text{ا}}{(\text{مہ} - \text{ن}^2)^2 + \text{ک}^2\,\text{ن}^2}$، ف = $\frac{\text{ک ن ا}}{(\text{مہ} - \text{ن}^2)^2 + \text{ک}^2\,\text{ن}^2}$

اس لئے خاص تکملہ = $\frac{\text{ا}\{(\text{مہ} - \text{ن}^2)\,\text{جم}(\text{ن ت} - \text{عہ}) + \text{ک ن جب}(\text{ن ت} - \text{عہ})\}}{\{(\text{مہ} - \text{ن}^2)^2 + \text{ک}^2\,\text{ن}^2\}}$

= $\frac{\text{ا جم}(\text{ن ت} - \text{عہ} - \text{عہ}_1)}{\sqrt{(\text{مہ} - \text{ن}^2)^2 + \text{ک}^2\,\text{ن}^2}}$ جہاں مس عہ$_1$ = $\frac{\text{ک ن}}{\text{مہ} - \text{ن}^2}$

اگر ک = ۰ اور ن^2 = مہ تو صورت دوم (۱) پیدا ہوتی ہے، اس حالت میں

خاص تکملہ = $\frac{\text{ا}}{\text{۲ن}}$ ت جب (ن ت ۔ عہ)

صورت سوم۔ اگر ر، لا کا منطق صحیح تفاعل ہو تو امتحان کے طور پر ما کے لئے ایک منطق صحیح تفاعل رکھ کر دیکھو۔ سروں کی قیمتیں ایسی ہونی چاہئیں کہ تفاعل مساوات کو پورا کرے۔

۶۲ ۔ ہمزاد مساواتیں۔ اب ہم چند مثالیں حل کرینگے جن سے معمولی

تفرقی ہمزاد مساواتوں کے تکمل کرنے کی توضیح ہوگی، واضح ہو کہ مساواتوں کی تعداد وہی ہونی چاہیے جو تابع متغیروں کی تعداد ہو۔ ہم ت کو متغیر متبوع فرض کرینگے اور صرف دو تابع متغیروں لا، ما کے لئے بحث کو محدود رکھینگے۔

مثال ۱۔ لاَ = ۔ سہ ما ....(۱)

ماَ = سہ لا ....(۲)

(۱)، کو تفرق کرو اور (۲) سے ماَ کی قیمت سہ لا مندرج کرو، اس طرح ایک معمولی تفرقی مساوات ایک تابع متغیر کی رقوم میں حاصل ہوگی، وہ یہ ہے

لاً + سہ^۲ لا = ۰ جس کا حل ہے

لا = ا جم سہ ت + ب جب سہ ت یا لا = ج جم (سہ ت ۔ ک) ...(۳)

ما کی قیمت اب (۲) سے حاصل ہو سکتی ہے یعنی

ما = ا جب سہ ت ۔ ب جم سہ ت یا ما = ج جب (سہ ت ۔ ک) ..(۴)

یہ امر توجہ کے قابل ہے کہ اگرچہ ا، ب بالکل اختیاری مستقل ہیں لیکن ما میں کے مستقل معین ہو جاتے ہیں جبکہ لا کے مستقلات کو معین کر دیا جائے، اگر (۱) میں صرف لا شریک ہوتا اور (۲) میں صرف ما تو لا میں کے مستقلات سے ما کے مستقل معین نہ ہونے۔ مثلاً مساواتوں

لاً + سہ^۲ لا = ۰، ماً + سہ^۲ ما = ۰

سے حاصل ہوتا ہے لا = ا جم سہ ت + ب جب سہ ت، ما = د جم سہ ت + ف جب سہ ت اور مستقلوں ا، ب، د، ف میں کوئی رشتہ نہیں۔

مثال ۲۔ لاَ + ۵ لا ۔ ۳ ما = ۰ ...(۱)، ماَ + ۱۵ لا ۔ ۷ ما = ۰ ......(۲)

(۱)، کو تفرق کرو لاً + ۵ لاَ ۔ ۳ ماَ = ۰ ....(۳)

(۱)، (۲)، (۳) سے ما، ماَ ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

لاً ۔ ۲ لاَ + ۱۰ لا = ۰ ....(۴)

جس کا تکملہ ہے لا = و^ت (ا جم ۳ ت + ب جب ۳ ت) ......(۵)

اب مساوات (۱) سے ما معلوم ہو سکتا ہے

ما = قوت {(۲ا+ب)جم ۳ت + (۲ب - ا) جب ۳ت} .... (۶)

اگر (۱) اور (۲) دونوں میں لاَ، ماَ شامل ہوتے تو ہم دونوں مساواتوں (۱) اور (۲) کو تفرق کرتے اور چار مساواتوں (۱)، (۲)، (۳)، (۴) سے ہم ما، ماَ، ماً ساقط کر سکتے۔

مثال ۳۔ جیسا مثال بالا میں ذکر ہوا ہم ذیل کی مساواتوں پر غور کرینگے جو دو باہم اثر انداز برقی حلقوں کو منسلک کرتی ہیں۔

ل لاَ + م ماَ + زلا = پ .... (۱)

م لاَ + ن ماَ + س ما = ق .... (۲)

لا، ما برقی رو میں ہیں، ل، ن ذاتی امالیتیں ہیں اور م ان کی باہمی امالیت ہے، ز اور س مزاحمتیں ہیں اور پ اور ق خارجی محرکہ برق قوتیں ہیں۔ حاصل ضرب ل ن بڑا ہے م۲ سے۔

مثال ۲ کے موافق (۱) اور (۲) کو تفرق کرنے سے ہم ما، ماَ، ماً ساقط کر سکتے ہیں لیکن اس جگہ ایک اور طریقہ کی ہم تشریح کرتے ہیں۔ متمم تفاعل اور خاص تکملہ کا اصول صریحاً ہمزاد خطی مساواتوں کی صورت میں بھی درست ہے۔ پ اور ق یا تو مستقل ہیں یا ت کے تفاعل ہیں اور ہم اصول مذکورہ کو (۱) اور (۲) پر استعمال کر سکتے ہیں۔

متمم تفاعل ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

ل لاَ + م ماَ + زلا = ۰ .... (۳)

م لاَ + ن ماَ + س ما = ۰ .... (۴)

فرض کرو کہ لا = ا قو^لت، ما = ب قو^لت جہاں ا اور ب مستقل ہیں، (۳) اور (۴) میں مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

(ل لہ + ز) ا + م لہ ب = ۰ .... (۵)

م لہ ا + (ن لہ + س) ب = ۰ .... (۶)

اگر ہم (۵) اور (۶) سے نسبت ا : ب ساقط کریں تو اس امر کے لئے شرط حاصل ہوگی کہ (۵) اور (۶) دونوں ایک ساتھ پوری ہوتی ہیں، شرط یہ ہے

(ل لہ + ز) (ن لہ + س) − م^2 لہ^2 = ۰

یا (ل ن − م^2) لہ^2 + (ل س + ن ز) لہ + ز س = ۰ ....(۷)

(۷) کی اصلیں حقیقی ہیں، کیونکہ

(ل س + ن ز)^2 − ۴ (ل ن − م^2) ز س = (ل س − ن ز)^2 + ۴ م^2 ز س

یعنی (۷) کا ممیز مثبت ہے۔ نیز چونکہ ل ن > م^2 (۷) کی اصلوں کی ایک ہی علامت ہے، دونوں منفی ہیں۔ اگر انہیں − لہ$_1$، − لہ$_2$ کہا جائے اور یہ مستقل ا$_1$، ا$_2$ اور ب$_1$، ب$_2$ لئے جائیں تو (۳) اور (۴) کے حل حسب ذیل حاصل ہونگے

لا = ا$_1$ قو$^{-لہ_1 ت}$ + ا$_2$ قو$^{-لہ_2 ت}$، ما = ب$_1$ قو$^{-لہ_1 ت}$ + ب$_2$ قو$^{-لہ_2 ت}$ ....(۸)

ب$_1$، ا$_1$ سے اور ب$_2$، ا$_2$ سے مربوط ہے مساواتوں (۵) اور (۶) کے ذریعہ یعنی

ب$_1$ = ا$_1$ (ز − ل لہ$_1$) ÷ م لہ$_1$، ب$_2$ = ا$_2$ (ز − ل لہ$_2$) ÷ م لہ$_2$

اگر پ اور ق مستقل ہوں تو خاص تکملے ہیں

لا = پ ÷ ز، ما = ق ÷ س

اور (۸) میں ان کو جمع کرنے سے (۱) اور (۲) کے پورے تکملے حاصل ہوتے ہیں۔ دوسری مشہور صورت صرف وہ ہے جس میں پ = ع جم (ن ت − عہ) اور ق = ۰۔ اور خاص تکملہ ذیل کی قیمتوں کو آزمائشی حل فرض کرنے اور اس طرح ع، ف، گ، ھ کی قیمتیں دریافت کرنے سے حاصل ہوگا۔

لا = ع جم (ن ت − عہ) + ف جب (ن ت − عہ)

ما = گ جم (ن ت − عہ) + ھ جب (ن ت − عہ)

یہ مساواتیں لاَ + ک ماَ + ج^2 لا = ۰ ، ماَ − ک لاَ + ج^2 ما = ۰ ۔
گردشی رقاص کے لنگر کی چھوٹی حرکتوں کو تعبیر کرتی ہیں (گردش نما کا محور تعویق کی سمت میں ہے)، نیز یہ زیمین افشر (Zeeman effect) کے نظریہ میں مقناطیسی میدان کے اندر برقیہ کی حرکت کی ابتدائی مساواتیں ہیں [ملاحظہ ہو گرے کی کتاب مقناطیسیت اور برقیات حصۂ اول دفعہ ۵۶۵ ۔ اس کتاب کے دسویں باب میں کئی علم آموز مثالیں ملینگی]

مشق ۱۷

(۱ − ۱۶) تک کی مساواتوں کو تکمل کرو ۔

۱ ۔ (۱ + لا^2) عف ما = ۱ + ما^2

۲ ۔ $\sqrt{}$ ۱ − لا^2 عف ما = $\sqrt{}$ ۱ − ما^2 ۳ ۔ ما − لا عف ما = م (ما^2 + عف ما)

۴ ۔ (لا ما + لا^2) عف ما + ما^2 = ۰ ۵ ۔ لا عف ما − ما = $\sqrt{}$ لا^2 + ما^2

۶ ۔ (۲ لا + ۸ ما − ۱۴) عف ما = ۶ لا + ۵ ما − ۷

۷ ۔ (ا لا + ب ما + ج) عف ما = م (ا لا + ب ما) + گ
ابدال عا = ا لا + ب ما کے ذریعہ ما کو بدلو ۔

۸ ۔ (ا لا + ب ما + ج) عف ما = ف لا − ا ما + گ

۹ ۔ عف ما + ما = قو$^{-لا}$ ۱۰ ۔ لا عف ما + ما = لا

۱۱ ۔ (۱ − لا^2) عف ما − لا ما = ۱ ۱۲ ۔ (۱ + لا^2) عف ما + ۲ لا ما = لا^2

۱۳ ۔ عف ما + ا ما = جم (ب لا + ج) ۱۴ ۔ لا عف ما + ما = لا^3 ما^6

۱۵ ۔ لا^2 عف ما + ما^2 = لا ما

۱۶ ۔ ما (لا^2 − ما^2 − ب^2) عف ما + لا (لا^2 + ما^2 − ا^2) = ۰

مساواتوں ۷ تا ۱۹ تک پورے تکملے اور نادر حل (جہاں موجود ہوں) معلوم کرو ۔

۱۷- (ما - ع لا)^۲ = ا^۲ ع^۲ + ب^۲ ۱۸- ما = ع لا + ع^۳

۱۹- لا^۲ (ما - ع لا) = ما ع^۲

مساواتوں (۲۰ تا ۲۷) کو حل کرو

۲۰- عف^۲ ما - (ا + ب) عف ما + ا ب ما = ۰

۲۱- عف^۳ ما - ۵ عف^۲ ما + ۶ عف ما = ۰

۲۲- عف^۲ ما - ۶ عف ما + ۱۰ ما = جب ۲ لا

۲۳- عف^۲ ما - ۳ عف ما + ۲ ما = ۹^لا

۲۴- عف^۲ ما + ن^۲ ما = ا جم ن لا + ب جب ن لا

۲۵- عف^۲ ما - ن^۲ ما = ا ۹^ن لا + ب ۹^-ن لا

۲۶- عف^۲ ما - ۶ عف ما + ۱۳ ما = لا^۲

۲۷- عف^۴ ما + ۲ عف^۲ ما + ما = ۰

۲۸ تا ۳۱ تک کی ہمزاد مساواتوں کو تکمل کرو [لاَ = ولا/وت]

۲۸- لاَ - ۷ لا + ما = ۰، ماَ - ۲ لا - ۵ ما = ۰

۲۹- لاَ + ماَ + ۲ لا + ما = ۰، ماَ + ۵ لا + ۳ ما = ۰

۳۰- لاَ + ۲ لا - ۳ ما = ت، ماَ - ۳ لا + ۲ ما = ۹^۲ت

۳۱- لاً - ۳ لا - ۴ ما = ۰، ماً + لا + ما = ۰

۳۲- مساواتوں لاً = ۰، ماً = - ج کو تکمل کرو اور مستقلات کو معلوم کرو کہ یہ شرائط پورے ہوں لا = ۰، ما = ۰، لاَ = وجم عہ، ماَ = وجب عہ جبکہ ت = ۰

۳۳- مساواتوں لاً = - مہ لا، ماً = - مہ ما کو تکمل کرو اور مستقلات معلوم کرو کہ یہ شرائط پورے ہوں لا = ا، ما = ۰، لاَ = ۰، ماَ = ب √مہ جبکہ ت = ۰

۳۴- مساوات لاً = - مہ/لا^۲ کو تکمل کرو اور ایسے مستقلات منتخب کرو کہ

لا = ۱، لاَ = ۰ جبکہ ت = ۰

۳۵ - مساوات ب عف۴ ما = و شہتیروں کی خمیدگی کے نظریہ میں واقع ہوتی ہے، ب خمیدگی کی استواری ہے اور و وزن ہے اکائی طول کا۔ ذیل کے شرائط کے ماتحت مساوات کو تکمل کرو

(۱) ما = ۰، عف۲ ما = ۰ جبکہ لا = ۰ اور جبکہ لا = ل

(۲) ما = ۰، عف ما = ۰ جبکہ لا = ۰ اور جبکہ لا = ل

(۳) ما = ۰، عف ما = ۰ جبکہ لا = ۰، اور عف۲ ما = ۰، عف۳ ما = ۰ جبکہ لا = ل

۳۶ - ایک برق سے بھرے ہوئے مکثف کی گنجائش ج ہے اس کی تختیوں کو تار کے ذریعہ جس کی ذاتی امالیت ل ہے اور مزاحمت ز باہم ملا دیا گیا ہے، اگر وقت ت پر تختیوں کے درمیان قوہ کا فرق و ہو تو و مساوات ذیل کو پورا کریگا

ج ل وً + ز ج وَ + و = ۰

اور برقی رو جو ہے - ج وَ، ثابت کرو کہ ان بھرن اہتزازی ہوگا اگر ج ز۲ > ۴ ل اور مدت دوران ت

ت = ۴ π ل / √(۴ ل / ج - ز۲)

اور قوہ کا لوکارثمی گھٹاؤ ہے ز ت / ۴ ل -

۳۷ - مساوات عف۲ ما + ۲/لا عف ما + ن۲ ما = ۰ کو تکمل کرو متغیر متبوع ما کو ع میں بدلنے سے جہاں ع = لا ما

پورا تکملہ معلوم کرو نیز وہ تکملہ معلوم کرو جو محدود رہتا ہے جبکہ لا مائل بہ صفر ہو۔

۳۸ - ثابت کرو کہ لا۲ عف۲ ما + ا لا عف ما + ب ما = ۰ کا پورا تکملہ ہے

ما = ا لا^لہ + ب لا^لہ جہاں لہ، لہ مساوات

لہ (لہ - ۱) + ا لہ + ب = ۰ کی اصلیں ہیں۔

آزمائشی حل ما = لا^لہ اختیار کرو اور حسب دفعہ ۶۰ عمل کرو۔

۳۹۔ اِن مساواتوں کو تکمل کرو

(۱) لا عف² ما + ۲ عف ما = ۶ لا

(۲) لا³ عف³ ما - ۳ لا² عف² ما + ۶ لا عف ما - ۶ ما = لا²

(۳) لا² عف² ما - ۲ ما = لا

۴۰۔ متغیر متبوع لا کو طہ میں بدلنے سے جہاں لا = قو^طہ مساوات ذیل کو تکمل کرو

لا² عف² ما + لا عف ما + ن² ما = ۰

مثال ۳۸ کی مساوات کے جواب میں لہ کے لئے جو مساوات حاصل ہوتی ہے اسکی اصلیں خیالی ہیں۔

۴۱۔ تکمل کرو د/در (د ما/در + ۲ ما/ر) = ۰ کو

۴۲۔ اِس مساوات کو تکمل کرو د²و/در² + ۱/ر دو/در = ۰

۴۳۔ اِس مساوات سے عف ما معلوم کرو

ا عف² ما = ما {۱ + (عف ما)²}^(۳/۲)

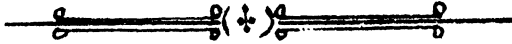
۴۴۔ اگر ما = ع و جہاں ع، و دونوں لا کے تفاعل ہیں تو دکھاؤ کہ

خطی مساوات عف² ما + ف عف ما + ق ما = ر ..... (۱)

ہو جاتی ہے و ع'' + (۲ و' + ف و) ع' + (و'' + ف و' + ق و) ع = ر .....(۲)

جہاں زبریں لا ' مشتقوں کو تعبیر کرتی ہیں۔

اگر و مساوات (۱) کا حل ہو جبکہ ر صفر ہو تو ع کی قیمت (اور اسلئے ما کی قیمت) دریافت ہو سکتی ہے کیونکہ اس حالت میں ع کا سر صفر ہے اور (۲) خطی مساوات ہے رتبہ اول کی جبکہ عَ کو متغیر متبوع مانا جائے۔

۴۵۔ اس مساوات $\text{لا}^2 \text{عف}^2 \text{ما} + \text{لا} \, \text{عف} \, \text{ما} - \text{ما} = \text{لا}^3$ کو تکمل کرو۔
رکھو $\text{ما} = \text{لا} \, \text{ع}$

باب نہم

محدود تکملے۔ علامت تکمل کے اندر اعمال

۶۳۔ تکملہ کا تسلسل۔ تکملہ کی تعریف سے کہ یہ ایک رقبہ کا ناپ ہے (دفعات ۸۲ حصہ اول، ۲۲ حصۂ دوم) یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب تکمل فا (لا)، لا کی تمام زیر بحث قیمتوں کے لئے مسلسل ہو تو تکملہ

ی = $\int^{لا}$ فا (لا) فرلا = $\int^{لا}$ فا (ع) فر ع ......(۱)

اپنی اوپر کی حد لا کا مسلسل تفاعل ہوتا ہے اور اس کا مشتق فا (لا) ہے۔

محدود تکملہ ھ = $\int_{ا}^{ب}$ فا (لا) فرلا = ـ $\int_{ب}^{ا}$ فا (لا) فرلا ....(۲)

اپنے حدود ا، ب کا تفاعل ہے اور ھ کے مشتق بلحاظ ب اور لا کے تکملہ کی تعریف کی رو سے، بالترتیب یہ ہیں

$\frac{فرھ}{فرب}$ = فا (ب)، $\frac{فرھ}{فرا}$ = ـ فا (ا) ....(۳)

لیکن جیسا کہ طبیعی سوالات میں اکثر ہوتا ہے (ملاحظہ ہو دفعہ ۴۴ اور دفعہ ۶۹ مثال ۶ حصۂ اول) کہ تکمل میں کوئی محدود عدم تسلسل اس نمونہ کا جو شکل ۳۴ میں دکھایا گیا ہے لا کی قیمت مثلاً و ع = ج کے لئے ہو تو

تکملہ جبکہ لا = و م > و ع > و ا = ا، ذیل کی مساوات سے متعین ہوتا ہے

$$ی = \int_{ا}^{لا} فا(لا) \, فرلا = \int_{ا}^{ج} فا(لا) \, فرلا + \int_{ج}^{لا} فا(لا) \, فرلا$$

تکملہ ی اب بھی لا کا مسلسل تفاعل ہے لیکن $\frac{فری}{فرلا}$ غیر مسلسل ہے لا = ج کے لئے۔ دفعہ ۴۴ حصۂ اول میں جو ترقیم دی گئی ہے اسکے مطابق

$$\left[\frac{فری}{فرلا}\right]_{لا=ج-.} = فا(ج-.) = ع گ ، \left[\frac{فری}{فرلا}\right]_{لا=ج+.} = فا(ج+.) = ع ص$$

عدم تسلسل کو فا(ج + سہ) - فا(ج - سہ) کی انتہا سے ناپا جائیگا جبکہ سہ اور سہ دونوں بلا واسطہ صفر کی طرف مائل ہوں، اس صورت میں انتہا گ ص ہے، اور عدم تسلسل کو محدود کہا گیا ہے کیونکہ گ ص محدود ہے۔

اس طرح کے عدم تسلسل جیسے $\frac{۱}{لا - ج}$ کو جبکہ لا ← ج لامتناہی کہا جائیگا کیونکہ فرق $\frac{۱}{سہ} - \frac{۱}{(-سہ)}$ کی انتہا لامتناہی ہے۔

شکل ۴۴

دفعہ ۱۷ میں تکملہ کی تعریف کو وسعت دیکر ایسی صورتوں کو اسکی تعریف میں شامل کرلیا گیا ہے جہاں متکمل میں لاانتہا عدم تسلسل ہو اور اس تعریف کی رو سے تکملہ مسلسل رہتا ہے۔ جب متکمل میں لاانتہا عدم تسلسل ہو یا جب تکملہ کی ایک یا دونوں حدود لامتناہی ہوں تو تکملہ کو ہم غیرواجب یا لامتناہی تکملہ کہینگے' اس باب کے خاص مضمون کی بحث شروع کرنے سے پہلے ہم غیرواجب تکملہ پر مختصر غور کرینگے' اس بحث میں باب پنجم کے تخیلات اور مصطلحات اکثر طور پر استعمال میں آئینگے۔

۶۴۔ لامتناہی حدود۔ جب' لا ≥ ا اور لا کی ایسی قیمتوں کے لئے فا(لا) مسلسل ہو تو تعریف (دفعہ ۱۷) کی رو سے

$$\int_{\text{ا}}^{\infty} \text{فا(لا) ڈلا} = \lim_{\text{لا}\to\infty} \int_{\text{ا}}^{\text{لا}} \text{فا(لا) ڈلا} = \lim_{\text{لا}\to\infty} \text{ف(لا)} \quad \ldots\ldots(۱)$$

بشرطیکہ لا ← ∞ کے لئے یہ انتہا محدود ہو۔

اب دفعہ ۳۹ مسئلہ (۳) کی رو سے اس امر کے لئے ضروری اور کافی شرط کہ ف(لا) ایک معین انتہا کی طرف مائل ہو جبکہ لا مائل بہ لامتناہی ہو یہ ہے کہ فرق ف(ج) - ف(ب) مائل بہ صفر ہو جبکہ ب اور ج کسی طرح سے بھی مائل بہ لامتناہی ہوں۔ ایسی حالت میں

$$\text{ف(ج)} - \text{ف(ب)} = \int_{\text{ا}}^{\text{ج}} \text{فا(لا) ڈلا} - \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا(لا) ڈلا} = \int_{\text{ب}}^{\text{ج}} \text{فا(لا) ڈلا} \quad \ldots\ldots(۲)$$

پس تکملہ (۱) کا وجود ہوگا اگر (۲) کے موخرالذکر تکملہ کی انتہا کا وجود ہو جبکہ ب اور ج کسی طرح سے بھی مائل بہ لامتناہی ہوں۔ جب اس انتہا کا وجود ہو تو تکملہ (۱) کو مستدق کہتے ہیں۔

اسی طرح اگر فا(لا) مسلسل ہو جبکہ لا ≤ ا تو تکملہ

$$\int_{\infty} فا(لا)\, فرلا \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

مستدق ہوگا بشرطیکہ تکملہ

$$+ \int_{ج}^{ب} فا(لا)\, فرلا \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

کی انتہا صفر ہو جبکہ مثبت عدد ب، ج کسی طریقہ سے بھی مائل بہ لانتاہی ہوں۔ جب تکملہ کے حدود $-\infty$ اور $+\infty$ ہوں تو تکملہ مستدق ہوتا ہے، بشرطیکہ ذیل کے ہر ایک تکملہ

$$\int_{ب}^{ج} فا(لا)\, فرلا \quad اور \quad \int_{ج}^{ب} فا(لا)\, فرلا \qquad \ldots\ldots (۵)$$

کی انتہا صفر ہو جبکہ مثبت اعداد ب، ج، ب، ج کسی طریقہ سے بھی مائل بہ لانتاہی ہوں۔

ظاہر ہے کہ تکملہ (۱) کا استدقاق فا(لا) کے رویہ پر منحصر ہے جبکہ لا کو بہت بڑی قیمتیں دی جائیں (مقابلہ کرو نوٹ دفعہ ۹۰ کے ساتھ) جب کسی صورت میں نامحدود تکملہ حاصل ہو سکے تو استدقاق کے متعلق بآسانی فیصلہ ہو سکتا ہے، ذیل کا مسئلہ کارآمد ثابت ہوگا جبکہ محدود تکملہ حاصل نہ ہو سکے۔

مسئلہ۔ فرض کرو کہ لا کی بڑی قیمتوں کے لئے مثلاً جبکہ لا > ع تفاعل فا(لا) اس شکل میں رکھا جا سکتا ہے $\frac{فہ(لا)}{لا^{ک}}$ ۔ اگر لا کی ہر ایسی قیمت کے لئے جو مثلاً ع سے بڑی ہو فہ(لا) نعداداً کم ہو ایک محدود عدد ا سے تو تکملہ (۱) مستدق ہوگا بشرطیکہ ک > ۱ لیکن اگر لا کی ہر ایسی

قیمت کے لئے جو ع سے بڑی ہو فا(لا) ایک مثبت عدد ب سے ہمیشہ بڑا رہے یا ہمیشہ ایک منفی عدد۔ ج سے کم رہے (ب اور ج صفر نہیں ہیں) تو تکملہ (۱) مستدق نہیں ہوگا جبکہ $\text{ک} \leqq ۱$

ثبوت بآسانی دفعہ ۱۵ مسئلہ ۷ سے حاصل ہوتا ہے۔ اگر صرف عددی قیمتوں کو ملحوظ رکھا جائے اور $|\text{فا(لا)}| < \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ک}}}$ جبکہ $\text{لا} > \text{ع}$ تو

$$\int_{\text{ب}}^{\text{ج}} \text{فا(لا) دلا} < \int_{\text{ب}}^{\text{ج}} \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ک}}}\,\text{دلا} = \frac{۱}{\text{ک}-۱}\left(\frac{۱}{\text{ب}^{\text{ک}-۱}} - \frac{۱}{\text{ج}^{\text{ک}-۱}}\right)$$

جب، ب اور ج مائل بہ لاتناہی ہوں تو یہ انتہا صفر ہوتی ہے اگر $\text{ک} > ۱$

اتساع کی صورت بھی اسی طرح ثابت ہوتی ہے۔

لاتناہی حدود کی اور صورتوں کے لئے بھی اسی طرح کا مسئلہ صادق آئیگا۔

مطلق اور مشروط استدقاق۔ کسی تکملہ کو مطلق طور پر مستدق کہا جائیگا اگر یہ اُس صورت میں بھی مستدق رہے جبکہ متکمل فا(لا) کی بجائے اسکی عددی قیمت |فا(لا)| رکھدی جائے۔ اگر کوئی مستدق تکملہ متکمل فا(لا) کی بجائے اسکی عددی قیمت |فا(لا)| رکھنے سے مستدق نہ رہے تو اسکو مستدق بالشرط کہینگے۔

مثال ۱۔ تکملہ $\int_{\text{ب}}^{\infty} \frac{\text{جب لا دلا}}{\text{لا}}$ کا استدقاق مشروط ہے۔

مسئلہ بالا اس صورت میں سیدھا نہیں لگ سکتا (اگرچہ تکمل بالحصص کے بعد ممکن ہے لگ سکے) لیکن مثال ۲۳ مشق ۵ کی رو سے اگر $\text{ن}\pi \leqq \text{ب} < (\text{ن}+۱)\pi$ تو

$$\int_{\text{ب}}^{\text{ب}} \frac{\text{جب لا دلا}}{\text{لا}} = \text{ع}_۰ - \text{ع}_۱ + \ldots + (-۱)^{\text{ک}}\,\text{ع}_{\text{ک}} + \ldots + (-۱)^{\text{ن}-۱}\,\text{ع}_{\text{ن}-۱} + (-۱)^{\text{ن}}\,\text{ع}_{\text{ب}}$$

جہاں $ع_ک = \int_{ب}^{\pi} \frac{جب ع و ع}{ع + ک \pi}$ (ک = ۰، ۱، ... ن-۱)، $ع_ب = \int_{ب}^{ب-ن\pi} \frac{جب ع و ع}{ع + ن \pi}$

$ع_ک$ کا تکمل کبھی منفی نہیں ہوتا اور چونکہ ع + ک π کم ہے ع + (ک+۱) π سے اس لئے $ع_ک$ بڑا ہے $ع_{ک+۱}$ سے اس لئے مثال صفحہ ۱۸۰ یا مسئلہ

(۲) دفعہ ۱۸۱ کے موافق تکملہ مستدق ہے، لیکن یہ مشروط استدقاق ہے۔

کیونکہ $\int_{ب} \left| \frac{جب لا}{لا} \right| و لا = ع_۰ + ع_۱ + \dots + ع_{ن-۱} + ع_ب$

اور $ع_ک > \int_{ب}^{\pi} \frac{جب ع و ع}{\pi + ک \pi}$ یعنی $ع_ک > \frac{۲}{(ک+۱)\pi}$

یعنی تکملہ بڑا ہے $\frac{۲}{\pi}\left(\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \dots + \frac{۱}{ن}\right)$ سے اور اسلئے مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے جبکہ ب مائل بہ لاتناہی ہو۔

مثال ۲۔ اگر د > ۰ تو تکملہ $\int_{د}^{\infty} \frac{جم لا و لا}{لا}$ مستدق بالشرط ہے

مثال ۳۔ اگر د > ۰ اور ر > ۱ تو ذیل کا ہر ایک تکملہ

$$\int_{د}^{\infty} \frac{جب لا و لا}{لا^ر} \text{، } \int_{د}^{\infty} \frac{جم لا و لا}{لا^ر}$$

مطلق طور پر مستدق ہے۔ مثال ۲ مثال ۱ کی طرح ثابت ہوتی ہے، مثال ۳ کے سوال اوپر جو مسئلہ ثابت کیا گیا ہے اس کی مدد سے حل ہونگے کیونکہ |جب لا|، |جم لا| دونوں کبھی ایک سے نہیں بڑھتے۔

۶۵ - لامتناہی تکمل - اگر فا(لا) مسلسل ہو لا = ا + صہ (صہ > ۰) سے لا = ب تک لیکن فا(ا + صہ) کی انتہا لامتناہی ہو جبکہ صہ مائل بہ صفر ہو تو (دفعہ ۱۷) کی رُو سے

$$\int_{ا}^{ب} فا(لا)\, فرلا = نہا_{صہ \to ۰} \int_{ا+صہ}^{ب} فا(لا)\, فرلا = نہا_{لا \to ا} ف(لا)$$
.... (۱)

بشرطیکہ یہ انتہا ایک معیّن مقدار ہو -

اب ف(لا) کی انتہا معیّن مقدار ہوگی اگر ف(ا + صَہ) - ف(ا+صہ) صفر کی طرف مائل ہو جبکہ مثبت مقداریں صہ، صَہ کسی طریقہ سے بھی مائل بہ صفر ہوں - پس تکملہ (۱) مستدق ہوگا اگر تکملہ

$$\int_{ا+صہ}^{ا+صَہ} فا(لا)\, فرلا = \int_{ا+صہ}^{ب} فا(لا)\, فرلا - \int_{ا+صَہ}^{ب} فا(لا)\, فرلا \quad .....(۲)$$

مائل بہ صفر ہو جبکہ صہ، صَہ کسی طریقہ سے بھی صفر کی طرف مائل ہوں۔

اسی طرح سے تکملہ کے معنی اُس صورت میں متعین ہو سکتے ہیں جبکہ فا(لا) مائل بہ لامتناہی ہو جبکہ لا، ب کی طرف مستدق ہو یا قیمت ج کی طرف مستدق ہو جہاں ج، ا اور ب کے درمیان واقع ہے۔ (دیکھو دفعہ ۱۷، نیز صفحہ ۱۴۸ کی مثال ۳)

مسئلہ- اگر لا = ا سے لا = ب تک تکمل فا(لا) اس شکل کا $\frac{فہ(لا)}{(لا - ا)^{ک}}$ کا ہو جہاں فہ(لا) مسلسل ہے لا = ا سے لا = ب تک تو تکملہ (۱) مستدق ہوگا بشرطیکہ ک > ۱ لیکن جب، فہ(ا) صفر نہ ہو تکملہ مستدق نہیں ہوگا اگر ک ≥ ۱-

عدم تسلسل کی اور صورتوں کے لیئے اسی طرح کا مسئلہ درست ہوگا ثبوت فوراً مسئلہ ۷، دفعہ ۱۵ سے حاصل ہوتا ہے (ملاحظہ ہو دفعہ ۱۰ کا آخری حصہ)

مثال ۱۔ تکملہ $\int_{۰}^{ب} \frac{جب\,لا}{لا^{ر}}\,د\,لا$ جس میں ب > ۰ مستدق ہے اگر ر < ۲،

ہم لکھ سکتے ہیں فہ(لا) = $\frac{جب\,لا}{لا}$، متکمل اس صورت میں ہوگا

$\frac{فہ(لا)}{لا^{ر-۱}}$ پس تکملہ مستدق ہوگا اگر ر - ۱ < ۱ یا ر < ۲، اگر ہم لیں فہ(لا) = جب (لا) تو یہ قید کہ فہ(۰) کو صفر نہیں ہونا چاہیئے عائد ہوتی ہے۔

مثال ۲۔ تکملہ $\int_{۰}^{ب} \frac{جم\,لا}{لا^{ر}}\,د\,لا$ جس میں ب > ۰ مستدق ہوگا اگر ر < ۱

اس صورت میں فہ(لا) = جم لا۔

دوسرے غیر واجب تکملوں کی بحث بہت زیادہ مشکل ہے۔ جب متکمل لامتناہی ہوتا ہو ایک یا زیادہ الگ الگ نقطوں پر، یا کسی ایک منحنی کے ہر ایک نقطہ پر جو تکمل کے رقبہ کے اندر یا اسکے حدود پر واقع ہو تو رقبہ کو ذرا سا سکیڑ لینا چاہیئے کہ ایسے نقطے رقبہ سے خارج ہو جائیں۔ اب چونکہ متکمل اس نیئے رقبہ پر مسلسل ہے اسلئے تکملہ کی قیمت اس پر محدود حاصل ہوگی اور یہ ممکن ہے کہ جب اُن سکڑے ہوئے رقبہ کو توسیع دیکر اصلی رقبہ پر انتہا میں منطبق کیا جائے تو اس محدود قیمت والے تکملہ کی انتہا ایک معین مقدار ہو۔ اگر ایسا ہو تو اس انتہا کو ہم اصلی تکملہ کی قیمت تسلیم کرینگے۔ ذیل میں ہم دو مثالیں درج کرتے ہیں، ایسے تکملوں کی مفصل بحث اس کتاب کے حدود سے باہر ہے۔

مثال ۳۔ $\int_{۰}^{ب} د\,ما \int_{۰}^{ب} \frac{د\,لا}{(پ\,لا + ق\,ما)^{ن}}$، ن، ب، پ، ق سب مثبت ہیں

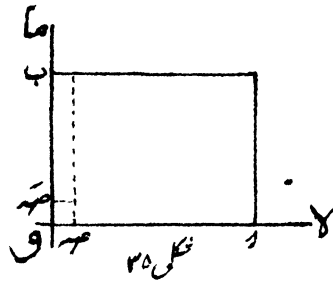
لا = ۰، ما = ۰ پر متکمل لامتناہی ہے، لیکن رقبۂ تکمل کے کسی اور نقطہ پر لامتناہی نہیں ہے پس مبدأ کے پاس ایک چھوٹا مستطیل بنانے سے جسکے ضلعے ضہ، ضہ

ہیں اگر ہم مبدا کو رقبہ تکمل سے خارج کر دیتے ہیں۔ اِس نئے رقبہ پر تکملہ کی قیمت حسب ذیل ہے (شکل ۲۵)

شکل ۲۵

$$\int^{ب} فرما \int_{صہ}^{ا} \frac{فرلا}{(پ لا + ق ما)^{ن}} + \int_{صہ}^{ب} فرما \int^{صہ} \frac{فرلا}{(پ لا + ق ما)^{ن}}$$

$$= \frac{1}{(1-ن)(2-ن) پ ق}\Big\{(پ ا + ق ب)^{2-ن} - (پ ا)^{2-ن} - (ق ب)^{2-ن}$$

$$+ (پ صہ)^{2-ن} + (ق صہ)^{2-ن} - (پ صہ + ق صہ)^{2-ن}\Big\}$$

اگر ن $<$ ۲ تو یہ جملہ ایک معین انتہائی طرف مستدق ہوتا ہے جبکہ صہ، صہ کسی طور سے بھی صفر کی طرف مائل ہوں۔ اگر ن = ۲ تو تکملہ میں لوگارتم شریک ہوتے ہیں جو معین انتہا کی طرف مائل نہیں ہوتے۔ اگر ن $>$ ۱ تو یہ جملہ لامتناہی ہو جاتا ہے۔

پس دیا ہوا تکملہ مستدق ہے اگر ن $<$ ۲۔ یہ ظاہر ہے کہ اگر تکمل $\frac{فہ(لا، ما)}{(پ لا + ق ما)^{ن}}$ ہوتا جہاں فہ (لا، ما) مسلسل ہے تو بھی یہ تکملہ مستدق ہوتا۔

مثال ۴۔ $\int^{ا} فرلا \int^{لا} \frac{فرما}{(لا - ما)^{ن}}$ جہاں ن $>$ ۰

تکمل کا رقبہ مثلث متساوی الساقین و ا ب (شکل ۳۶) ہے

و ا = ا ب۔ تکمل لامتناہی ہے خط و ب کے ہر ایک نقطہ پر، اِس لئے ہم و ب کے متوازی اور و ا پر عمود وار نقطہ دار خط کھینچنے سے خط و ب کو خارج کر دیتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ و ب کے متوازی خط پر معین لا ـ صہ ہے اور و ج = ما

شکل ۳۶

اس سکڑے ہوئے رقبہ پر تکملہ کی قیمت ہے

$$\int_{ما}^{ا} فرلا \int^{لا-صہ} \frac{فرما}{(لا-ما)^ن} = \frac{ا^{۲-ن} - عا^{۲-ن}}{(۱-ن)(۲-ن)} - \frac{ا صہ^{۱-ن} - عا صہ^{۱-ن}}{۱-ن}$$

اگر ن < ۱ اور صرف اسی صورت میں جبکہ ن < ۱، اس جملہ کی انتہا ایک معین مقدار ہوگی جبکہ صہ، عا بلا واسطہ صفر کی طرف مائل ہوں۔ پس دیا ہوا تکملہ اور اسی طرح سے تکملہ $\frac{فہ(لا، ما)}{(لا-ما)^ن}$ جہاں فہ(لا، ما) تمام رقبہ و ا ب کے اندر مسلسل ہو مستدق ہوگا اگر ن < ۱۔

۶۶۔ دو مشہور تکملے۔ ذیل میں $\frac{۱}{جب لا}$ کے جو جملہ دیا گیا ہے اس کے ثبوت کے لئے طالب علم دیکھے کرسٹل کا جبر و مقابلہ، حصہ دوم تیسواں باب دفعہ ۱۰ یا ھابسن کی کتاب علم مثلث دفعہ ۲۹۵۔ لا کوئی قیمت اختیار کر سکتا ہے سوائے صفر اور ن π کے جہاں ن مثبت صحیح عدد ہے۔

$$\frac{۱}{جب لا} = \frac{۱}{لا} + \sum_{ن=۱}^{\infty} (-۱)^ن \left(\frac{۱}{لا - ن π} + \frac{۱}{لا + ن π} \right)$$

$$\sum_{ن=۰}^{\infty} (-۱)^ن \left(\frac{۱}{ن π + لا} + \frac{۱}{(ن+۱) π - لا} \right) \ldots\ldots (۱)$$

(۱) میں فرض کرو کہ لا = ع π جہاں ع کسر واجب ہے۔ تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{π}{جب ع π} = \sum_{ن} (-۱)^ن \left(\frac{۱}{ن + ع} + \frac{۱}{ن + ۱ - ع} \right) \ldots\ldots (ب)$$

(ل) $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{جب}\,\text{لا}}{\text{لا}}\,\text{فرلا} = \frac{\pi}{2}$

دفعہ ۱۶۴ کی مثال ۱ میں رکھو ب = (ن+۱) π، ایسا انتخاب جائز ہے کیونکہ ب کسی طور سے بھی مائل بہ لاتناہی ہو سکتا ہے۔ اسلئے

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{جب}\,\text{لا}}{\text{لا}}\,\text{فرلا} = \text{نہا}_{\text{ن}\to\infty} \left\{ \text{ع}_{0} - \text{ع}_{1} + \ldots + (-1)^{\text{ک}}\,\text{ع}_{\text{ک}} + \ldots + (-1)^{\text{ن}}\,\text{ع}_{\text{ن}} \right\}$$

اب $\text{ع}_{\text{ک}} = \int_{0}^{\pi} \frac{\text{جب}\,\text{ع}\,\text{فرع}}{\text{ع}+\text{ک}\,\pi} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جب}\,\text{ع}\,\text{فرع}}{\text{ع}+\text{ک}\,\pi} + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جب}\,\text{ع}\,\text{فرع}}{(\text{ک}+1)\,\pi - \text{ع}}$

کیونکہ اندراج ع = π - و کے ذریعہ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\text{جب}\,\text{ع}\,\text{فرع}}{\text{ع}+\text{ک}\,\pi} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جب}\,\text{و}\,\text{فرو}}{(\text{ک}+1)\,\pi - \text{و}}$

اسلئے

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{جب}\,\text{لا}}{\text{لا}}\,\text{فرلا} = \text{نہا}_{\text{ن}\to\infty} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sum_{\text{ک}=0}^{\text{ک}=\text{ن}} (-1)^{\text{ک}} \left(\frac{1}{\text{ع}+\text{ک}\,\pi} + \frac{1}{(\text{ک}+1)\,\pi - \text{ع}} \right) \right\} \text{جب}\,\text{ع}\,\text{فرع}$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\text{جب}\,\text{ع}}\,\text{جب}\,\text{ع}\,\text{فرع} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{فرع} = \frac{\pi}{2}$$

اور ہم نے یہ تسلیم کر لیا ہے کہ

$$\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sum_{\text{ک}=0}^{\text{ک}=\text{ن}} (-1)^{\text{ک}} \left(\frac{1}{\text{ع}+\text{ک}\,\pi} + \frac{1}{(\text{ک}+1)\,\pi - \text{ع}} \right) \right\} \text{جب}\,\text{ع}\,\text{فرع}$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{نہا}_{ن \to \infty} \left\{ \sum_{ک=0}^{ک=ن} (-1)^{ک} \left(\frac{1}{ع+ک\pi} + \frac{1}{(ک+1)\pi - ع} \right) \text{جب ع فرع} \right.$$

یہ مفروضہ جائز ہے کیونکہ یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ موخرالذکر متکمل یکساں طور پر متقارب سلسلہ ہے۔

نتیجہ صحیح

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{جب ا لا}}{\text{لا}} \text{فرلا} = \frac{\pi}{2} \quad \text{اگر ا} > 0$$

$$= -\frac{\pi}{2} \quad \text{اگر ا} < 0$$

$$= 0 \quad \text{اگر ا} = 0$$

اگر ا > ۰ تو ابدال ا لا = ما کے ذریعہ تکملہ وہی ہو جاتا ہے جو اوپر حاصل کیا گیا۔

اگر ا < ۰ تو تکملہ مساوی ہے

$$-\int_{0}^{\infty} \frac{\text{جب اَ لا}}{\text{لا}} \text{فرلا} = -\frac{\pi}{2}$$

جہاں اَ = -ا = مثبت مقدار۔ اگر ا = ۰ تو متکمل کا ہر جزو صفر ہوگا اسلئے تکملہ صفر ہے۔ اس لئے تکملہ ا کا غیر مسلسل تفاعل ہے۔

(ب)
$$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{لا}^{ع-1} \text{فرلا}}{1+\text{لا}} = \frac{\pi}{\text{جب ع}\pi} \quad \text{اگر } 0 < ع < 1$$

متکمل کو ان شکلوں میں لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{1}{1+\text{لا}} \times \frac{1}{\text{لا}^{1-ع}} \text{، لا} = \infty \text{ کے نزدیک } \frac{1}{\frac{1}{\text{لا}}+1} \times \frac{1}{\text{لا}^{2-ع}} \text{ لا} = 0 \text{ کے نزدیک}$$

اسلئے استدقاق کے لئے ضروری ہے کہ ۰ < ع < ۱

تکملہ کو اگر ت سے تعبیر کریں تو

$$ت = \int_{۰}^{۱} \frac{لا^{ع-۱}\, ور لا}{۱+لا} + \int_{۱}^{\infty} \frac{لا^{ع-۱}\, ور لا}{۱+لا}$$

دوسرے تکملہ میں رکھو $لا = \frac{۱}{ی}$ تو حاصل ہوگا

$$\int_{۱}^{\infty} \frac{لا^{ع-۱}\, ور لا}{۱+لا} = \int_{۰}^{۱} \frac{ی^{-ع}\, ور ی}{۱+ی} = \int_{۰}^{۱} \frac{لا^{-ع}\, ور لا}{۱+لا}$$

$$پس\ ت = \int_{۰}^{۱} \frac{لا^{ع-۱} + لا^{-ع}}{۱+لا}\, ور لا$$

$$اب\ \frac{۱}{۱+لا} = \sum_{ک=۰}^{ک=ن} (-۱)^{ک} لا^{ک} + (-۱)^{ن+۱} \frac{لا^{ن+۱}}{۱+لا}$$

$$لیکن\ \int_{۰}^{۱} (لا^{ع-۱} + لا^{-ع})\, لا^{ک}\, ور لا = \frac{۱}{ک+ع} + \frac{۱}{ک+۱-ع}$$

$$پس\ ت = \sum_{ک=۰}^{ک=ن} (-۱)^{ک} \left(\frac{۱}{ک+ع} + \frac{۱}{ک+۱-ع}\right) + (-۱)^{ن+۱} \int_{۰}^{۱} \frac{(لا^{ع-۱} + لا^{-ع})\, لا^{ن+۱}}{۱+لا}\, ور لا$$

جیسے ن لاتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے موخرالذکر تکملہ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے کیونکہ یہ کم ہے ذیل کے تکملہ سے

$$\int_{۰}^{۱} (لا^{ع-۱} + لا^{-ع})\, لا^{ن+۱}\, ور لا = \frac{۱}{ن+ع+۱} + \frac{۱}{ن-ع+۲}$$

$$اسلئے\ ت = \sum_{ک=۰}^{ک=ن} (-۱)^{ک} \left(\frac{۱}{ک+ع} + \frac{۱}{ک+۱-ع}\right) = \frac{\pi}{جب\ ع\pi}$$

۶۷ - **گاما تفاعل** - مشق ۹ حصہ دوم صفحات ۱۳۳ تا ۱۳۵ پر گاما اور بیٹا تفاعلوں کے چند سادہ خواص بیان کئے گئے ہیں - اب ہم دو ضروری نتائج درج کرتے ہیں -

(ا) - اگر ۰ < ع < ۱ تو $\text{جا}(\text{ع})\,\text{جا}(1-\text{ع}) = \dfrac{\pi}{\text{جب ع}\,\pi}$

امثلہ ۲۰، ۲۱ مشق ۹ صفحہ ۱۳۴ میں فرض کرو کہ ن = ع، م = ۱ - ع اس طرح جا (م + ن) = جا (۱) = ۱، تب

$$\text{جا}(\text{ع})\,\text{جا}(1-\text{ع}) = \text{با}(\text{ع}, 1-\text{ع}) = \int_0^\infty \frac{\text{لا}^{\text{ع}-1}\,\text{فرلا}}{1+\text{لا}} = \frac{\pi}{\text{جب ع}\,\pi}$$

دفعہ بالا، نتیجہ (ب) کی رو سے -

(ب) $\text{جا}(\text{ع})\,\text{جا}(\text{ع}+\tfrac{1}{2}) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2\text{ع}-1}}\,\text{جا}(2\text{ع})$

با (ع، ع) پر غور کرو -

$$\text{با}(\text{ع},\text{ع}) = \int_0^1 \text{لا}^{\text{ع}-1}(1-\text{لا})^{\text{ع}-1}\,\text{فرلا} = \int_0^1 \left\{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}-\text{لا}\right)^2\right\}^{\text{ع}-1}\text{فرلا}$$

یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ دوسرا تکملہ (مقابلہ کرو دفعہ ۱۶ مسئلہ ۳ کے ساتھ) مساوی ہے اس تکملہ کے

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}-\text{لا}\right)^2\right\}^{\text{ع}-1}\text{فرلا}$$

جس سے ابدال $\frac{1}{2} - \text{لا} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{غ}}$ کے ذریعہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{با}(\text{ع},\text{ع}) = \frac{1}{2^{2\text{ع}-1}}\int_0^1 \text{غ}^{-\frac{1}{2}}(1-\text{غ})^{\text{ع}-1}\,\text{فرغ} = \frac{1}{2^{2\text{ع}-1}}\,\text{با}\left(\tfrac{1}{2}, \text{ع}\right)$$

بیلیٹا تفاعلوں کو گاما تفاعلوں کی رقوم میں بیان کرنے سے اور یہ ملحوظ رکھنے سے کہ جا $(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ہمیں مساوات ب حاصل ہوتی ہے۔

۶۸ ۔ اوسط قیمت کا دوسرا مسئلہ

مشق ۵ امثلہ ۳۰، ۳۱ میں اس مسئلہ کا حوالہ دیا گیا ہے۔ چونکہ محدود تکملوں کی بحث میں یہ اساسی اہمیت رکھتا ہے، اس لئے اب ہم اسے ثابت کرینگے۔ یہاں پر چند الفاظ ایسے تفاعل کے متعلق بیان کردینا مناسب ہوگا جو اپنی وجہ یا دلیل کے بڑھنے سے یا تو کبھی نہیں گھٹتا یا کبھی نہیں بڑھتا۔ ایسے تفاعل کو ہم یکرنگ (Monotonic) کہینگے اس مسئلہ کا ثبوت ذیل کے سادہ سے تمہیدیہ پر منحصر ہے جسے ایبل کی لامساوی کے نام سے موسوم کرتے ہیں۔

تمہیدیہ اگر ر کی تمام قیمتوں کے لئے جو ن کے مساوی ہوں یا اس سے کم ہوں جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے

$$ا > ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \ldots\ldots + ع_ر > ب$$

جہاں $ع_۱$، $ع_۲$، ......، $ع_ن$ کوئی حقیقی مقداریں ہیں اور اگر $ا_۱$، $ا_۲$، ...، $ا_ن$ مثبت مقادیر کا نہ بڑھنے والا تواتر ہو تو

$$ا_۱ ا > ا_۱ ع_۱ + ا_۲ ع_۲ + \ldots\ldots + ا_ن ع_ن > ا_۱ ب$$

اعداد $ا_۱$، $ا_۲$، ...... $ا_ن$ ایک نہ بڑھنے والا تواتر بنائینگے اگر اس کا ہر ایک عدد اپنے بعد کے عدد سے بڑا ہو یا اس کے مساوی ہو۔ اسی طرح نہ گھٹنے والا تواتر وہ ہوگا جس میں کا ہر ایک عدد اپنے بعد کے عدد کی نسبت کم ہو یا اسکے مساوی ہو۔ اس تمہیدیہ کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ

$$س_ر = ع_۱ + ع_۲ + \ldots\ldots + ع_ر، \text{ تب}$$

$$ع_۱ = س_۱، \; ع_۲ = س_۲ - س_۱، \; ع_۳ = س_۳ - س_۲، \ldots\ldots ع_ن = س_ن - س_{ن-۱}$$

$ا_1ع_1 + ا_2ع_2 + ا_3ع_3 + \dots + ا_نع_ن$ کو س سے تعبیر کرو اور $ع_1، ع_2 \dots$ کی قیمتیں $س_1، س_2، \dots$ کی رقوم میں درج کرو۔ اس طرح حاصل ہوگا

$$س = ا_1س_1 + ا_2(س_2 - س_1) + ا_3(س_3 - س_2) + \dots + ا_ن(س_ن - س_{ن-1})$$

$$= (ا_1 - ا_2)س_1 + (ا_2 - ا_3)س_2 + \dots + (ا_{ن-1} - ا_ن)س_{ن-1} + ا_نس_ن$$

فرق $ا_1 - ا_2، ا_2 - ا_3، \dots$ یا تو سب مثبت ہیں یا صفر ہیں اور ہر ایک مقدار $س_1، س_2، \dots$ کم ہے ا سے اور بڑی ہے ب سے۔ اسلئے

$$س < \{(ا_1 - ا_2) + (ا_2 - ا_3) + \dots + (ا_{ن-1} - ا_ن) + ا_ن\}\, ا$$

لیکن $> \{(ا_1 - ا_2) + (ا_2 - ا_3) + \dots + (ا_{ن-1} - ا_ن) + ا_ن\}\, ب$

یعنی $ا_1 ا > س > ا_1 ب$

اگر ا اور ب کے درمیان ط ایک اوسط قیمت ہو تو

$$س = ا_1 ط$$

مسئلہ ۱۔ اگر تمام وقفہ $ا \le لا \le ب$ میں تفاعل فا(لا) مسلسل، مثبت اور نہ بڑھنے والا ہو اور اگر سا(لا) اس وقفہ میں مسلسل ہو تو

$$\int_ا^ب فا(لا)\, سا(لا)\, د لا = فا(ا) \int_ا^ض سا(لا)\, د لا$$

جہاں $ا \le ض \le ب$۔

وقفہ (ا، ب) کو ن حصوں $(ا، لا_1)، (لا_1، لا_2)، \dots (لا_{ن-1}، ب)$ میں تقسیم کرو

اور تشاکل کی خاطر فرض کرو کہ ا = لا۰ ، ب = لان تب

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ}(\text{لا})\,\text{سا}(\text{لا})\,\text{ولا} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \int_{\text{لا}_{\text{ر}-1}}^{\text{لا}_{\text{ر}}} \text{فہ}(\text{لا})\,\text{سا}(\text{لا})\,\text{ولا} \;\ldots\ldots(۱)$$

وقفہ (لار-۱ ، لار) میں فہ(لا) کی بجائے فہ(لار-۱) + {فہ(لار-۱) − فہ(لا)}
رکھو اور لار-۱ سے لار تک کے اس تکملہ کو بطور دو تکملوں کے فرق کے مساوی لکھو۔ اس طرح

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ}(\text{لا})\,\text{سا}(\text{لا})\,\text{ولا} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \text{فہ}(\text{لا}_{\text{ر}-1}) \int_{\text{لا}_{\text{ر}-1}}^{\text{لا}_{\text{ر}}} \text{سا}(\text{لا})\,\text{ولا} - \text{ح} \;\ldots\ldots(۲)$$

$$\text{جہاں ح} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \int_{\text{لا}_{\text{ر}-1}}^{\text{لا}_{\text{ر}}} \left[\text{فہ}(\text{لا}_{\text{ر}-1}) - \text{فہ}(\text{لا})\right] \text{سا}(\text{لا})\,\text{ولا} \;\ldots\ldots(۳)$$

تمہیدیہ میں فرض کرو کہ $\text{ا}_{\text{ر}} = \text{فہ}(\text{لا}_{\text{ر}-1})$ اور

$$\text{ع}_{\text{ر}} = \int_{\text{لا}_{\text{ر}-1}}^{\text{لا}_{\text{ر}}} \text{سا}(\text{لا})\,\text{ولا} \text{ ، پس } \text{س}_{\text{ر}} = \int_{\text{ا}}^{\text{لا}_{\text{ر}}} \text{سا}(\text{لا})\,\text{ولا}$$

تکملہ $\int_{\text{ا}}^{\text{لا}} \text{سا}(\text{لا})\,\text{ولا}$ ، لا = ا سے لا = ب تک مسلسل تفاعل ہے،
اس لئے اس صورت میں تمہیدیہ کی اوسط قیمت ط وقفہ (ا ، ب) کے اندر لا کی کسی قیمت (یا قیمتوں) کے جواب میں اس تکملہ کی ایک قیمت ہے۔ فرض کرو کہ لا کی ایسی ایک قیمت ضا ہے جہاں ا ≤ ضا ≤ ب ، تب (۲) کے بائیں جانب کے رکن میں پہلا

مجموعہ اس شکل کا ہوگا

فہ (ر) $\int$ سا (لا) ءلا

اب ہم ثابت کرینگے کہ ب صفر کی طرف مائل ہوتا ہے جبکہ ن لاتناہی کی طرف مائل ہو، ایسی حالت میں وقفہ (لا، لا) بھی ساتھ ہی صفر کی طرف مائل ہوتا ہے۔ وقفہ (لا، لا) کے اندر فرق فہ (لا) - فہ (لا) یا مثبت ہوگا یا صفر اور (دفعہ ۱۵ مسائل ۶، ۷)

$$|ب| \leq \sum_{ر=۱}^{ن} \int \{فہ(لا_{ر-۱}) - فہ(لا)\} |سا(لا)| ءلا$$

$$< \sum_{ر=۱}^{ن} \{فہ(لا_{ر-۱}) - فہ(لا_ر)\} \int_{لا_{ر-۱}}^{لا_ر} |سا(لا)| ءلا$$

اب ہم ن کو اتنا بڑا منتخب کرسکتے ہیں (اور ہر وقفہ کو اتنا چھوٹا) کہ ر کی ہر قیمت کے لئے تکملہ

$$\int_{لا_{ر-۱}}^{لا_ر} |سا(لا)| ءلا$$

کسی معینہ، اختیاری طور پر چھوٹے مثبت عدد صہ سے کم ہو۔ ایسا کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$|ب| < صہ \sum_{ر=۱}^{ن} \{فہ(لا_{ر-۱}) - فہ(لا_ر)\} = صہ \{فہ(ا) - فہ(ب)\}$$

پس معلوم ہوا کہ ب کی انتہا صفر ہے اور مسئلہ ثابت ہوا۔

یہ دیکھنا مشکل نہیں کہ اوپر کا ثبوت برقرار رہتا ہے خواہ فہ (لا) اور سا (لا) کے ایسے عدم تسلسلوں کی محدود تعداد وقفہ کے اندر ہو جن کا دفعات ۶۳ تا ۶۵ میں ذکر کیا گیا ہے بشرطیکہ فہ (لا) کے عدم تسلسل محدود ہوں۔

مسئلہ ۲۔ اگر تمام وقفہ ا ≥ لا ≥ ب میں تفاعل فہ (لا) مسلسل اور یکرنگ ہو اور تفاعل سا (لا) مسلسل ہو تو

$$\int_{ا}^{ب} فہ(لا)\, سا(لا)\, فرلا = فہ(ا) \int_{ا}^{ضا} سا(لا)\, فرلا + فہ(ب) \int_{ضا}^{ب} سا(لا)\, فرلا$$

.... (۲، ا)

$$= فہ(ا) \int_{ا}^{ب} سا(لا)\, فرلا + \{فہ(ب) - فہ(ا)\} \int_{ضا}^{ب} سا(لا)\, فرلا$$

.... (۲، ب)

جہاں ا ≥ ضا ≥ ب

مسئلہ (۱) سے یہ مسئلہ فوراً حاصل ہوتا ہے۔ کیونکہ اگر فہ (لا) بڑھتا ہو لیکن یہ مثبت ہو یا منفی تو فہ (لا) ۔ فہ (ب) نہیں بڑھیگا اور مثبت ہوگا اسی طرح اگر فہ (لا) گھٹتا نہ ہو تو فہ (ب) ۔ فہ (لا) نہیں بڑھیگا اور مثبت ہوگا۔ مسئلہ (۱) میں فہ (لا) کی بجائے فہ (لا) ۔ فہ (ب) یا فہ (ب) ۔ فہ (لا) رکھنے سے تھوڑے سے استحالہ کے بعد مساوات (۲، ا) حاصل ہوگی۔ مساوات (۲، ب) صرف ایک اور شکل ہے (۲، ا) کی جو بعض اوقات مفید ثابت ہوتی ہے۔

مثال ۱۔ اگر $ع = \int_{0}^{\infty} \frac{جم\, لا\, فرلا}{لا^{ر}}$ ، $و = \int_{0}^{\infty} \frac{جب\, لا\, فرلا}{لا^{ر}}$

تو ثابت کرو کہ ع مستدق ہے اگر ۰ < ر < ۱ اور و مستدق ہے اگر ۰ < ر < ۲ (ا ≥ ۰)

مسئلہ دفعہ ۶۵ کی رو سے دونوں تکملے نچلی حد پر مستدق ہیں، جب لا > ۰ تو تفاعل $\frac{1}{لا^{ر}}$ دونوں صورتوں میں گھٹنے والا تفاعل ہوتا ہے اسلئے

$$\int_{ھ}^{ک} \frac{جم\, ر\, لا}{لا^{ر}}\, د\, لا = \frac{1}{ھ^{ر}} \int_{ھ}^{ضا} جم\, ر\, لا\, د\, لا + \frac{1}{ک^{ر}} \int_{ضا}^{ک} جم\, ر\, لا\, د\, لا$$

$$= \frac{جب\, ر\, ضا - جب\, ر\, ھ}{ر\, ھ^{ر}} + \frac{جب\, ر\, ک - جب\, ر\, ضا}{ر\, ک^{ر}}$$

اسلئے یہ تعداداً کم ہے $\frac{2}{ر\, ھ^{ر}} + \frac{2}{ر\, ک^{ر}}$ سے۔ پس اگر ر > ۰ تو ھ

اور ک کے لامتناہی کی طرف مائل ہونے سے یہ انتہا صفر ہوتی ہے۔
اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ و مستدق ہے۔
مثال ۲۔ مشق ۱۲ سوالات ۱۴، ۱۵ کو ثابت کرنے کے لئے ایبل کی لاتساوی استعمال کرو۔
سوال ۱۴ کو لو۔ فرض کرو کہ

$$ع\, ر_{ن} = \frac{1}{ن+1} جم (ن+1) طہ + \frac{1}{ن+2} جم (ن+2) طہ + \ldots + \frac{1}{ن+ع} جم (ن+ع) طہ$$

ایبل کی لاتساوی میں فرض کرو کہ $ل_{ر} = \frac{1}{ن+ر}$، $ع_{ر} =$ جم (ن + ر) طہ

تب $س_{ر} = جب \frac{ر طہ}{2}\, جم \left(ن + \frac{ر+1}{2} طہ\right) \div جب \frac{طہ}{2}$

اگر طہ صفر نہ ہو اور نہ ہی یہ ۲ π کا ضعف ہو تو $س_{ر}$، ر کی ہر قیمت کے لئے محدود ہوتا ہے۔ مثلاً فرض کرو کہ $|س_{ر}|$ کم ہے ج سے۔ اسلئے $|ع\, س_{ن}|$ کم ہے $\frac{ج}{ن+1}$ سے اور جب، ن لاتناہی کی طرف مائل ہو تو ع کی ہر قیمت کے لئے یہ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ پس سلسلہ مجوزہ مستدق ہے۔

مشق ۱۸

۱- اگر ا اور ب دونوں مثبت ہوں تو ثابت کرو کہ تکملہ

$$\int_0^\infty \frac{\text{جب ا لا جم ب لا}}{\text{لا}}\ \text{د لا}$$

مساوی ہے $\frac{\pi}{۲}$ کے اگر ا بڑا ہو ب سے اور صفر کے مساوی ہے اگر ا چھوٹا ہو ب سے اور یہ تکملہ $\frac{\pi}{۴}$ مساوی ہے اگر ا = ب

۲- ثابت کرو کہ (۱) $\int_0^\infty \frac{\text{جب}^۲\text{لا}}{\text{لا}^۲}\ \text{د لا} = \frac{\pi}{۲}$ (۲) $\int_0^\infty \frac{\text{جب}^۳\text{لا}}{\text{لا}^۳}\ \text{د لا} = \frac{۳\pi}{۸}$

۳- ذیل کے تکملیات کو مرتسم کرو

(۱) $\text{ما} = \int_0^\infty \frac{\text{جب ط جب لا ط}}{\text{ط}^۲}\ \text{د ط}$ (۲) $\int_0^\infty \frac{\text{جب}^۲\text{ط جب لا ط}}{\text{ط}^۳}\ \text{د ط}$

۴- اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$$\int_0^\infty \frac{\text{جب}^{۲ن+۱}\text{لا}}{\text{لا}}\ \text{د لا} = \int_0^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{۲ن}\text{لا}\ \text{د لا} = \frac{۱\times۳\times۵\times\ldots\times(۲ن-۱)}{۲\times۴\times۶\times\ldots\times۲ن} \times \frac{\pi}{۲}$$

۵- اگر $۰ < ع < ۱$ تو ثابت کرو کہ

$$\int_0^\infty \frac{\text{لا}^{ع-۱} - \text{لا}^{-ع}}{۱-\text{لا}}\ \text{د لا} = ۲\int_0^۱ \frac{\text{لا}^{ع-۱} - \text{لا}^{-ع}}{۱-\text{لا}}\ \text{د لا} = ۲\pi\ \text{مم}\ ع\pi$$

دفعہ ۶۶ (ب) کے موافق عمل کرو اور ذیل کا نتیجہ استعمال کرو [دفعہ ۸۴، مثال (۵)]

$$\pi\ \text{مم}\ ع\pi = \sum_{ن=-\infty}^{ن=\infty} \left(\frac{۱}{ن+ع} - \frac{۱}{ن+۱-ع} \right)$$

۶- ذیل کی مساواتیں قائم کرو۔ یہ سب دفعہ ۶۶، (ب) کے استحالہ سے حاصل ہوتی ہیں یا مثال (۵) سے۔

(۱) $\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{لا}^{۲\text{م}}\,\text{ولا}}{۱+\text{لا}^{۲\text{ن}}} = \frac{\pi}{۲\text{ن}\,\text{جب}\,\frac{۲\text{م}+۱}{۲\text{ن}}\pi}$ م، ن مثبت صحیح عدد ہیں

اور $\text{م} < \text{ن}$

(۲) $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{لا}^{\text{ن}}+\text{لا}^{-\text{ن}}}{۱+\text{لا}^{۲}}\,\text{ولا} = \int_{۰}^{\infty} \frac{\text{لا}^{\text{ن}}+\text{لا}^{-\text{ن}}}{\text{لا}+\text{لا}^{-۱}}\,\frac{\text{ولا}}{\text{لا}} = \frac{\pi}{۲}\,\text{قط}\,\frac{\text{ن}\pi}{۲}$ ، $-۱<\text{ن}<۱$

(۳) $\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{لا}^{\text{ا}-۱}-\text{لا}^{\text{ب}-۱}}{۱-\text{لا}}\,\text{ولا} = \pi\,(\text{مم}\,\text{ا}\pi-\text{مم}\,\text{ب}\pi)$ ؛ $۰<\text{ا}<۱$ ، $۰<\text{ب}<۱$

(۴) $\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{ئو}^{\text{ن}\text{لا}}+\text{ئو}^{-\text{ن}\text{لا}}}{\text{ئو}^{\text{لا}}+\text{ئو}^{-\text{لا}}}\,\text{ولا} = \frac{\pi}{۲}\,\text{قط}\,\frac{\text{ن}\pi}{۲}$ ، $-۱<\text{ن}<۱$

(۵) $\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{ئو}^{\text{ن}\text{لا}}-\text{ئو}^{-\text{ن}\text{لا}}}{\text{ئو}^{\text{لا}}-\text{ئو}^{-\text{لا}}}\,\text{ولا} = \frac{\pi}{۲}\,\text{مس}\,\frac{\text{ن}\pi}{۲}$ ، $-۱<\text{ن}<۱$

(۶) $\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{جمز}\,\text{ا}\text{لا}\,\text{جمز}\,\text{ب}\text{لا}}{\text{جمز}\,\text{لا}}\,\text{ولا} = \frac{۲\pi\,\text{جم}\,\frac{\text{ا}\pi}{۲}\,\text{جم}\,\frac{\text{ب}\pi}{۲}}{\text{جم}\,\text{ا}\pi+\text{جم}\,\text{ب}\pi}$ ، $-۱<\text{ا}\pm\text{ب}<۱$

۷۔ ثابت کرو کہ اگر $۰<\text{ع}<۱$ تو

$$\int_{۰}^{۱} (\text{لا}^{\text{ع}}+\text{لا}^{-\text{ع}})\,\text{لوک}\,(۱+\text{لا})\,\frac{\text{ولا}}{\text{لا}} = \frac{\pi}{\text{ع}\,\text{جب}\,\text{ع}\pi} - \frac{۱}{\text{ع}^{۲}}$$

۸۔ ثابت کرو کہ [ملاحظہ ہو دفعہ ۸۴ مثال ۲ (۶)]

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{جب}\,\text{ا}\text{لا}}{\text{ئو}^{\text{لا}}-\text{ئو}^{-\text{لا}}}\,\text{ولا} = \sum_{\text{ن}=۰}^{\infty} \frac{\text{ا}}{\text{ا}^{۲}+(۲\text{ن}+۱)^{۲}} = \frac{\pi}{۴}\,\text{مسز}\,\frac{\text{ا}\pi}{۲}$$

۹۔ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ [ملاحظہ ہو مثال ۶ مشق ۸]

$$\int_{0}^{\pi} لا \; لوک \,(جب^{2} لا)\, ءلا = ن^{'} \pi^{2} \; لوک \,(\tfrac{1}{2})$$

امثلہ ۱۰تا ۱۸ مناسب ابدالوں سے گا ما تفاعلوں میں تحویل ہو سکتی ہیں۔

۱۰- $$\int_{0}^{1} \frac{لا^{م-1}\, ءلا}{(1 - لا^{ن})^{\frac{م}{ن}}} = \frac{\pi}{ن \; جب \frac{م\pi}{ن}}$$

۱۱- $$\int_{0}^{1} \frac{لا^{ن-1}\, ءلا}{(1+الا)(1-لا)^{ن}} = \frac{\pi}{(1+ا)^{ن} \; جب \; ن\pi}$$

۱۲- $$\int_{0}^{1} \frac{لا^{م-1}(1-لا)^{ن-1}\, ءلا}{(ا+ب لا)^{م+ن}} = \frac{با(م، ن)}{ا^{ن}(ا+ب)^{م}}$$

۱۳- $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{جم^{2م-1} لا \; جب^{2ن-1} لا \; ءلا}{(ا جم^{2} لا + ب جب^{2} لا)^{م+ن}} = \frac{با(م، ن)}{2 \, ا^{م} ب^{ن}}$$

۱۴- $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{مس^{ک} لا \; ءلا}{ا جم^{2} لا + ب جب^{2} لا} = \frac{\pi \; قط \frac{ک\pi}{2}}{2 \, ا^{\frac{1-ک}{2}} \, ب^{\frac{1+ک}{2}}}$$

۱۵- $$\int_{0}^{\pi} \frac{جب^{ن-1} لا \; ءلا}{(ا+ب جم لا)^{ن}} = \frac{2^{ن-1}}{(ا^{2}-ب^{2})^{\frac{ن}{2}}} \; با\left(\frac{ن}{2}، \frac{ن}{2}\right)$$

۱۶- $$\int_{0}^{1} \frac{لا^{م-1} + لا^{ن-1}}{(1+لا)^{م+ن}} \, ءلا = با(م، ن)$$

۱۷- $$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{ق}^{2م لا} + \text{ق}^{-2م لا}}{(\text{ق}^{لا} + \text{ق}^{-لا})^{2ن}} \, ءلا = \frac{1}{2} \, با(ن+م، ن-م)$$

۱۸ ــ $\int_{0}^{1} \frac{(1+x)^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx = 2^{m+n-2} B(m, n)$

۱۹ ــ اگر ذیل کا ہر ایک تکملہ (ا > ۰)

$p = \int_{0}^{\infty} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \log x \frac{dx}{x}$ ، $q = \int_{0}^{\infty} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{dx}{x}$

مستدق ہو تو ثابت کرو کہ $p = q \log a$

۲۰ ــ ذیل کے منحنی کو مرتسم کرو (ا > ۰)

$y = \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x\theta \sin^2 a\theta}{\theta \sin a\theta} d\theta$

۶۹ ــ **علامت تکمل کے اندر اعمال** ــ فرض کرو کہ فا(لا، ما) دو متبوع متغیروں لا، ما کا مسلسل تفاعل ہے ان دو وسعتوں کے اندر

$a \leq x \leq b$ ، $a' \leq y \leq b'$ .... (س)

تو تفاعل ف (ما) جسکی تعیین اس تکملہ سے ہوتی ہے

$f(y) = \int_{a}^{b} F(x, y)\, dx$ ....(۱)

ما کا ایک مسلسل تفاعل ہوگا [ملاحظہ ہو حسب ذیل]

مسلسل تفاعلوں کی ایک خاصیت جو ہم نے ہمیشہ ضمنی طور پر تسلیم کرلی ہے یعنی یکساں تسلسل وہ اس مسئلہ اور دیگر مسائل کے ثبوت میں اہم خاص حصہ رکھتی ہے ــ اگر وسعتوں (س) میں لا، ما قیمتوں کا کوئی جوڑا ہو تو تسلسل کی ابتدائی تعریف کی رو سے (دفعہ ۸۹ اور ۵۴ حصہ اول) ہم ہمیشہ ایک مثبت عدد ع ما کا ایسا معلوم کرسکتے ہیں کہ فرق

$|F(x_1, y_1) - F(x, y)|$ ....(۲)

دی ہوئی مقدار صہ سے کم ہو (جہاں صہ کا مفہوم حسب معمول ہے) جبکہ |لا۲ - لا۱| اور |ما۲ - ما۱| میں سے ہر ایک عا سے کم ہو۔ اگر لا، ما کی بجائے قیمتوں کا اور جوڑا لاَ، ماَ کیا جائے تو بالعموم ہمیں عا کی ایک اور نئی قیمت منتخب کرنا ہوگی۔ اب فا (لا، ما) کے یکساں تسلسل کا یہ مفہوم ہے (مقابلہ کرو دفعہ ۲۴ کے ساتھ) کہ جب، صہ مقرر کر لیا جائے تو ہمیشہ ایک عا معلوم ہو سکتا ہے اس طور پر کہ فرق (۲) صہ سے کم ہو بشرطیکہ |لا۲ - لا۱| اور |ما۲ - ما۱| میں سے ہر ایک، عا سے کم ہو خواہ جوڑا (لا، ما) کسی طور پر بھی منتخب کیا جائے۔

[جب، لا = ا یا ب اور ما = اَ یا بَ تو جو ضروری ترمیمات عمل میں لانا چاہیں ہم انہیں طالب علم پر چھوڑتے ہیں۔]

یہ ہم مان لینگے کہ تسلسل یکساں ہے۔

ف (ما) کا تسلسل ہم آسانی سے ثابت کر سکتے ہیں۔ کیونکہ

ف (ما + ھ) - ف (ما) = ∫ا^ب {فا (لا، ما + ھ) - فا (لا، ما)} ءلا ...(۳)

خواہ لا کی وقفہ (ا، ب) کے اندر کوئی سی قیمت ہو ہم ھ کو ہمیشہ اسقدر چھوٹا منتخب کر سکتے ہیں کہ |فا (لا، ما + ھ) - فا (لا، ما)|، صہ سے کم ہو اور اسلئے |ف (ما + ھ) - ف (ما)| > صہ (ب - ا) اس سے ظاہر ہے کہ ف (ما) مسلسل ہے اور یہ ما کی ہر ایک قیمت کے لئے مسلسل ہے وقفہ (اَ، بَ) کے درمیان۔

اب ہم ذیل کا مسئلہ ثابت کرتے ہیں، ا، ب، ما پر منحصر نہیں۔

مسئلہ ا۔ اگر فا (لا، ما) اور اس کا جزوی مشتق فاما (لا، ما) وسعتوں (س) کے اندر بے تعلق متغیروں (لا، ما) کے مسلسل تفاعل ہوں تو تفاعل ف (ما) کا مشتق فَ (ما) جس کی تعیین (ا) سے

ہوتی ہے ذیل کی مساوات سے حاصل ہوگا

ف َ (ما) = ∫ ب جف فا (لا ، ما) / جف ما ء لا .... (۴)

یہ مسئلہ "علامت تکمل کے اندر تفرق" کے نام سے موسوم ہے اور متغیر ما کو بعض اوقات متبدل کہا جاتا ہے۔

دفعہ ۳۷ حصہ اول کے مسئلہ اوسط قیمت کی رو سے

فا (لا ، ما + ھ) - فا (لا ، ما) = ھ فا ما (لا ، ما)

= ھ فا ما (لا ، ما) + ھ {فا ما (لا ، ما) - فا ما (لا ، ما)}

جہاں ما کوئی ایک قیمت ہے ما اور ما + ھ کے درمیان۔
(۳) میں مندرج کرنے اور ھ پر تقسیم کرنے سے ہم دیکھتے ہیں

ف (ما + ھ) - ف (ما) / ھ = ∫ ب ا فا ما (لا ، ما) ء لا + ∫ ب ا {فا ما (لا ، ما) - فا ما (لا ، ما)} ء لا .... (۵)

لیکن ھ کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے | فا ما (لا ، ما) - فا ما (لا ، ما) | کو اسقدر کم کیا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں خواہ وقفہ (ا ، ب) کے اندر لا کی کوئی قیمت ہو اس لئے (۵) میں آخری تکمل ھ کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے اور ہمیں مساوات (۴) حاصل ہوتی ہے۔

اب فرض کرو کہ ا اور ب دونوں ما کے مسلسل تفاعل ہیں مسئلہ (۱) کے شرائط برقرار ہیں اور ء ا / ء ما ، ء ب / ء ما مسلسل ہیں۔ تو ف (ما) کا پورا مشتق (دفعہ ۹۰ حصہ اول) کی رو سے ہے

ء ف / ء ما = جف ف / جف ا · ء ا / ء ما + جف ف / جف ب · ء ب / ء ما + جف ف / جف ما

$$= -\text{فا}(\text{ر، ما})\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ما}} + \text{فا}(\text{ب، ما})\frac{\text{فر ب}}{\text{فر ما}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \quad\ldots\ldots (\text{۶})$$

جہاں $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ر}}$، $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ب}}$ دفعہ ۶۳ (۳) کے موافق معلوم کئے گئے ہیں اور $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$ اوپر کے تکملہ (۴) سے حاصل ہوتا ہے۔

ذیل کا مسئلہ دفعہ ۲۶ میں ثابت کیا گیا ہے لیکن اُس دفعہ کے تحلیلات سے علاوہ اسے قائم کرنا علم آموز ہوگا۔

مسئلہ ۲ ۔ اگر فا(لا، ما) متبوع متغیروں لا، ما کا مسلسل تفاعل ہو سعتوں (س) میں اور اگر

$$\text{فہ}(\text{لا، ما}) = \int_{\text{ر}}^{\text{ما}} \text{فر د} \int_{\text{ر}}^{\text{لا}} \text{فا}(\text{ع، د})\,\text{فر ع} \quad\ldots\ldots\ldots (\text{۷})$$

تو
$$\frac{\text{جف}^2\,\text{فہ}}{\text{جف لا جف ما}} = \text{فا}(\text{لا، ما}) = \frac{\text{جف}^2\,\text{فہ}}{\text{جف ما جف لا}} \quad\ldots\ldots (\text{۸})$$

اور ذیل کے تکملے ایک دوسرے کے مساوی ہیں

$$\text{ف} = \int_{\text{ر}}^{\text{ب}} \text{فر ما} \int_{\text{ر}}^{\text{ب}} \text{فا}(\text{لا، ما})\,\text{فر لا}، \quad \text{ق} = \int_{\text{ر}}^{\text{ب}} \text{فر لا} \int_{\text{ر}}^{\text{ب}} \text{فا}(\text{لا، ما})\,\text{فر ما} \quad\ldots\ldots (\text{۹})$$

دوسرے تکملے ف، ق دراصل مکرر یا متواتر تکملے ہیں جیسا کہ (۸) میں کے مشتق متواتر ہیں۔ دفعہ ۲۶ کے نتائج کو نہیں استعمال کیا جائیگا۔

فرض کرو کہ $\text{سا}(\text{لا، و}) = \int_{\text{ر}}^{\text{لا}} \text{فا}(\text{ع، و})\,\text{فر ع}$، $\text{فہ}(\text{لا، ما}) = \int_{\text{ر}}^{\text{ما}} \text{سا}(\text{لا، و})\,\text{فر و}$

تب سا(لا، و) مسلسل ہے اور

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \int_{\text{ر}}^{\text{ما}} \text{سا}(\text{لا، و})\,\text{فر و} = \text{سا}(\text{لا، ما}) = \int_{\text{ر}}^{\text{لا}} \text{فا}(\text{ع، ما})\,\text{فر ع}$$

$$\frac{جف^2 فہ}{جف لا جف ما} = \frac{جف}{جف لا} \int_د^{لا} فا (ع، ما) ءع = فا (لا، ما)$$

نیز مسئلہ ا کی رو سے

$$\frac{جف فہ}{جف لا} = \frac{جف}{جف لا} \int_د^{ما} سا (لا، و) ءو = \int_د^{ما} \frac{جف سا (لا، و)}{جف لا} ءو$$

$$= \int_د^{ما} فا (لا، و) ءو$$

$$\frac{جف^2 فہ}{جف ما جف لا} = \frac{جف}{جف ما} \int_د^{ما} فا (لا، و) ءو = فا (لا، ما)$$

جس سے مساوات (۸) قائم ہوتی ہے۔

اسکے بعد ف کے تکمل میں فا (لا، ما) کی بجائے $\frac{جف^2 فہ}{جف لا جف ما}$ رکھو تب

$$\int_د^{ب} فا (لا، ما) ءلا = \left[\frac{جف فہ (لا، ما)}{جف ما}\right]_د^{ب} = \frac{جف فہ (ب، ما)}{جف ما} - \frac{جف فہ (د، ما)}{جف ما}$$

اور

$$ف = \int_د^{بَ} \frac{جف فہ (ب، ما)}{جف ما} ءما - \int_د^{بَ} \frac{جف فہ (د، ما)}{جف ما} ءما$$

$$= فہ (ب، بَ) - فہ (ب، دَ) - فہ (د، بَ) + فہ (د، دَ)$$

ق کے تکمل میں فا (لا، ما) کی بجائے $\frac{جف^2 فہ}{جف ما جف لا}$ رکھو اور ق کے لئے ہمیں عین وہی قیمت حاصل ہوتی ہے جو ف کے لئے حاصل ہوئی۔

تفاعل ف (ما) کو لیکر جو (۱) سے متعین ہوتا ہے ہم مساوات ف = ق کو اس شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$\int_{دَ}^{بَ} ف (ما) ءما = \int_د^{ب} ءلا \int_{دَ}^{بَ} فا (لا، ما) ءما \quad \text{.......... (۱۰)}$$

(۱۰) میں جو مسئلہ منضبط ہے اسے "علامت تکمل کے اندر تکمل" کے نام سے موسوم کرتے ہیں۔

یہ ٹھیک طور پر پیش نظر رہے کہ اس تمام دفعہ میں اعداد ا، ب، ار، ب محدود ہیں۔ ذیل کی مثالوں سے جن طریقوں کی توضیح ہوتی ہے وہ تکملوں کے حل میں اکثر مفید ثابت ہوتے ہیں۔ اور مثالیں بعد میں دی جائیگی۔

مثال ۱۔ $\int \frac{و لا}{(لا^2 + ار^2)^2}$ کی قیمت معلوم کرو

اس مساوات پر غور کرو

$$\int^{لا} \frac{1}{ع^2 + ار^2} \, و ع = \frac{1}{ار} \, مس^{-1} \frac{لا}{ار}$$

ار کو متبدل مان کر ہم بلحاظ ار کے تفرق کرتے ہیں۔ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$\int_{ب}^{لا} \frac{-2 ار و ع}{(ع^2 + ار^2)^2} = -\frac{1}{ار^2} \, مس^{-1} \frac{لا}{ار} + \frac{1}{ار} \times \frac{1}{1 + لا^2 / ار^2} \times \left(-\frac{لا}{ار^2}\right)$$

یا

$$\int_{ب}^{لا} \frac{و ع}{(ع^2 + ار^2)^2} = \frac{1}{2 ار^3} \, مس^{-1} \frac{لا}{ار} + \frac{1}{2 ار^2} \times \frac{لا}{لا^2 + ار^2}$$

اوپر کی قیمت $\frac{1}{(لا^2 + ار^2)^2}$ کے اس تکمل کی قیمت ہے جو صفر ہوتا جبکہ لا = ۰؛ ع کو تکمل کا متغیر صرف اس لئے مانا گیا ہے کہ عمل صراحت سے پیش ہو سکے لیکن نا محدود تکملہ کے حاصل کرنے میں متغیر کو بدلنے کی ضرورت نہیں ہوگی۔

مثال ۲۔ $\int_{ب}^{\frac{\pi}{2}}$ لوک (۱ - ذ^2 جب^2 لا) و لا کو محسوب کرو ذ^2 < ۱

تکملہ کو ع سے تعبیر کرو اور اسے بلحاظ ذ کے تفرق کرو

$$\frac{وع}{وز} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-۲ ز جب^{۲} لا فرلا}{۱ - ز^{۲} جب^{۲} لا} = \frac{\pi}{۲} - \frac{۲}{ز} \int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{فرلا}{۱ - ز^{۲} جب^{۲} لا}$$

ابدال و = مم لا کے ذریعہ اوپر کا تکملہ فوراً حاصل ہوتا ہے، اس طرح

$$\frac{وع}{وز} = \frac{\pi}{ز} - \frac{\pi}{ز\sqrt{۱ - ز^{۲}}}$$

بلحاظ ز کے تکمل کرنے اور یہ ملحوظ رکھنے سے کہ ع = ۰ جبکہ ز = ۰ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ع = \pi \text{ لوک } \left\{ \frac{۱ + \sqrt{۱ - ز^{۲}}}{۲} \right\}$$

یہ تکملہ مسلسل رہتا ہے بشمول ز = ۱، ز کو ۱ کے مساوی رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{لوک (جم لا) فرلا} = \frac{\pi}{۲} \text{ لوک } \left(\frac{۱}{۲}\right) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{لوک (جب لا) فرلا}$$

۷۰۔ تکملوں کا یکساں استدقاق۔ جب تکملہ (۱) دفعہ ۶۹ کی حد ب (یا ا) لاانتہا ہو تو اس دفعہ کے مسائل کی مزید تحقیق لازم آتی ہے۔ جو بحث ذیل میں درج ہے اس میں ہم نے بالکل وہی طریق عمل اختیار کیا ہے جو (Ch. J. de la Vallee Poussin) نے اپنے مکتوب میں دیا ہے۔

Etude des integrales a limites, infinies (Annales de la societe Scientifique de Bruxelles Vol 16 (1891-2) pp 150-180)

نیز پروفیسر اوسگوڈ کے ایک مضمون کا بھی یہاں حوالہ دیا جاتا ہے
(Problems in Infinite Series and Definite Integrals) (Annals)

of Math (2nd Series) (Vol 3 pp 129-146)

طالب علم ذیل کی بحث کو دفعات ۴۲ ، ۴۶ کے ساتھ مقابلہ کرے۔ مختلف مسئلوں کے قیام کے لئے جو شرائط بیان کئے گئے ہیں وہ محض کافی ہیں ضروری نہیں۔

نوٹ۔ جب تک کہ اسکے خلاف بالتصریح نہ بیان کیا جائے تکمل جو بالعموم فا (لا ، ما) سے تعبیر ہوگا دو بے تعلق متغیروں لا ، ما کا ان کی تمام زیر بحث قیمتوں کے لئے مسلسل تفاعل خیال کیا جائیگا۔ وتفہ یا وسعت (ا ، ب) سے بالعموم بند وتفہ مراد ہوگا دفعہ ۵ ، حصۂ اول اگر اس کے خلاف بالتصریح نہ بیان کیا جائے۔ علامت صہ سے اختیاری چھوٹی مثبت مقدار تعبیر ہوگی۔ اگر ان قراردادوں کو ملحوظ رکھا جائے تو بہت سے تکرار سے باہم بچ جائینگے۔

تعریف۔ تکملہ $\int_{ر}^{\infty}$ فا (لا ، ما) ء لا .... (ا)

تمام وسعت ا ≤ ما ≤ ب میں یکساں طور پر مستدق کہلاتا ہے اگر صہ کے دئے جانے کی صورت میں ایک ایسا عدد م معلوم کرلینا ممکن ہو جو ما پر منحصر نہ ہو اور ت کی ہر ایسی قیمت کے لئے جو م سے بڑی ہو

$$\left| \int_{ت}^{\infty} \text{فا (لا ، ما) ء لا} \right| < \text{صہ} \quad \text{.......... (ب)}$$

ذیل کے اشارے مفید ہونگے۔ اگر تکملہ (ا) محض مستدق ہو تو م اس طور پر مقرر ہوسکتا ہے کہ لاتساوی (ب) پوری ہو جبکہ ت > م لیکن عام طور پر م صرف صہ پر ہی منحصر نہیں ہوگا بلکہ ما پر بھی۔ اگر م صرف صہ کا تفاعل ہو جبکہ ا ≤ ما ≤ ب تو تکملہ (ا) وتفہ (ا ، ب) میں یکساں طور پر مستدق ہوگا۔

ایسا ہو سکتا ہے کہ مر صرف صہ کا تفاعل ہو ما کی ہر ایسی قیمت کے لئے جو $\geqq$ اَ۔ ایسی صورت میں تکملہ (۱) بلا حد وقفہ ما $\geqq$ اَ میں یکساں طور پر مستدق ہوگا۔ لیکن یہ بھی ممکن ہے کہ مر صرف صہ کا تفاعل ہو خواہ کوئی **معین** قیمت (جو کتنی بڑی ہو سکتی ہے) بَ کو دی جائے اور ساتھ ہی ہر قیمت ما $\geqq$ اَ کے لئے یہ صرف صہ کا تفاعل نہ ہو، مر اس صورت میں بَ کے ساتھ لاانتہا ہی کی طرف جا سکتا ہے، استدقاق اس لئے لاانتہا سست یا بطی ہوگا (مقابلہ کرو دفعہ ۹، کے ساتھ) ایسی حالت میں اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ تکملہ (۱) یکساں طور پر مستدق ہے **اختیاری** وقفہ (اَ، بَ) میں۔

تکملہ $\int_{ب}^{\infty}$ وِ $^{-ما لا}$ فرلا یکساں طور پر مستدق ہے بے حدود وقفہ ما $\geqq$ اَ $>$ ۰ میں لیکن تکملہ $\int_{ب}^{\infty}$ و $^{-ما لا}$ فرلا یکساں طور پر مستدق ہے صرف ایک اختیاری وقفہ ۰ $<$ اَ $\leqq$ ما $\leqq$ بَ میں جہاں بَ کوئی معیّن عدد ہے خواہ یہ کتنا ہی بڑا ہو۔

مسئلہ۔ تکملہ (۱) تمام وقفہ (اَ، بَ) کے اندر یکساں طور پر مستدق ہوگا اگر ایک ایسے تفاعل فہ (لا) کا وجود ہو جو ما پر منحصر نہ ہو اور ایسا ہو کہ اَ $\leqq$ ما $\leqq$ بَ کے لئے

(الف) فہ (لا) $\geqq$ ۰ جبکہ لا $\geqq$ ا

(ب) |فا (لا، ما)| $\leqq$ فہ (لا) جبکہ لا $\geqq$ ا

(ج) تکملہ $\int_{ا}^{\infty}$ فہ (لا) فرلا مستدق ہو۔

ثبوت آسان ہے۔

$$\left| \int_{ن}^{\infty} \text{فا (لا، ما) فرلا} \right| \leqq \int_{ن}^{\infty} \left| \text{فا (لا، ما)} \right| \text{فرلا} < \int_{ن}^{\infty} \text{فہ (لا) فرلا}$$

اور شرط (جـ۱) کی رو سے ہم مـ کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں (جو ما پر منحصر نہیں) کہ اگر ن > مـ تو موخر الذکر تکملہ صـ سے کم ہو۔
یہ مسئلہ دفعہ ۲۴ کے مسئلہ ۳ کا جواب ہے۔ وقفہ (ا، ب) محدود یا نا محدود ہو سکتا ہے۔
نتیجہ صریح ۱۔ اگر تمام وقفہ (ا، ب) میں

فا (لا، ما) = ف (لا) سا (لا، ما)

جہاں سا (لا، ما) محدود ہے اور $\int^{\infty}$ ف (لا) د لا مطلق طور پر مستدق تو تکملہ (ا) یکساں طور پر مستدق ہوگا تمام وقفہ (ا، ب) میں۔
اگر |سا (لا، ما)| < س (مستقل) تو رکھو

فـ (لا) = س |ف (لا)|

اور مسئلہ لگ سکتا ہے۔
نتیجہ صریح ۲۔ لکھو فا (لا، ما) = $لا^{-ک} \times لا^{ک}$ فا (لا، ما)۔ اگر $لا^{ک}$ فا (لا، ما)، لا، ما کی تمام زیر بحث قیمتوں کے لئے محدود ہو تو تکملہ (ا) یکساں طور پر مستدق ہوگا بشرطیکہ ک > ۱ (دفعہ ۶۴)

مثال۔ جا (ما) = $\int^{\infty}$ $لا^{ما-۱}$ $و^{-لا}$ د لا تمام اختیاری وقفہ (ا، ب) میں یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے کیونکہ $لا^{ما-۱}$ $و^{-لا}$ = $لا^{-۲}$ ($لا^{ما+۱}$ $و^{-لا}$) اور $لا^{ما+۱}$ $و^{-لا}$ محدود ہے۔
اگر ۰ < ما < ۱ تو مستکمل نچلی حد پر غیر مسلسل ہے لیکن تکمل بالحصص کے عمل سے ہم دیکھتے ہیں کہ

جا (ما) = $\frac{۱}{ما}$ $\int^{\infty}$ $لا^{ما}$ $و^{-لا}$ د لا

اور یہ تکملہ تمام وسعت د > ر ≤ ما ≤ ب کے اندر یکساں طور پر مستدق ہے۔
نوٹ، ترقیم اگا ما تفاعل کے لئے جا(ما) = Γ(ج)

۱۷۔ تسلسل اور حدود۔ اب ہم چند مسائل پر بحث کرینگے جو اساسی اہمیت رکھتے ہیں۔

مسئلہ ۱۔ اگر تکملہ

ف(ما) = ∫ر^∞ فا(لا، ما) ء لا

یکساں طور پر مستدق ہو تمام وسعت ر ≤ ما ≤ ب میں تو اس تمام وسعت میں یہ ما کا مسلسل تفاعل ہوگا۔

ثبوت: مسئلہ ا دفعہ ۲۴ کے ثبوت سے مشابہ ہے اور طالب علم کے لئے چھوڑا جاتا ہے۔

مسئلہ ۲۔ اگر سا(لا) مسلسل ہو جبکہ لا ≥ ر اور تکملہ

ت = ∫ر^∞ سا(لا) ء لا

مستدق ہو، تو ذیل کا تکملہ، جبکہ ما > ۰.

ف(ما) = ∫ر^∞ قو^(-مالا) سا(لا) ء لا

مستدق ہوگا اور نہا(ما→۰) ف(ما) = ت

چونکہ قو^(-مالا) گھٹنے والا تفاعل ہے، اسلئے جب ب مثبت ہو اور

ر < ب ≤ ضا ≤ ج

∫ب^ج قو^(-مالا) سا(لا) ء لا = قو^(-ماب) ∫ب^ضا سا(لا) ء لا + قو^(-ماج) ∫ضا^ج سا(لا) ء لا ...(۱)

اجزائے ضربی $\text{قو}^{-\text{ماب}}$، $\text{قو}^{-\text{ماج}}$ محدود ہیں اور چونکہ تکملہ ت مستدق ہے اسلئے (۱) کے بائیں جانب کے دونوں تکملے صفر کی طرف مائل ہوتے ہیں جیسے ب اور ج لاتناہی کی طرف مائل ہوں۔ تکملہ ف (ما) اسلئے مستدق ہے (جیساکہ اور طرح بھی ظاہر ہے)۔

اب فرض کرو کہ ج مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے اور ب محدود رہتا ہے۔ چونکہ $\text{قو}^{-\text{ماج}}$ صفر کی طرف مائل ہوتا ہے اسلئے (۱) سے ہم دیکھتے ہیں

$$\int_{\text{ب}}^{\infty} \text{قو}^{-\text{مالا}}\, \text{سا}(\text{لا})\, \text{ولا} = \text{قو}^{-\text{ماب}} \int_{\text{ب}}^{\text{ضا}} \text{سا}(\text{لا})\, \text{ولا}،\quad \text{ضا} \geqq \text{ب}$$

(۱۱) میں ضا کی قیمت بالعموم ج کے ساتھ بدلیگی) اور اس لئے

$$\text{ف}(\text{ما}) = \int_{\text{د}}^{\text{ب}} \text{قو}^{-\text{مالا}}\, \text{سا}(\text{لا})\, \text{ولا} + \text{قو}^{-\text{ماب}} \int_{\text{ب}}^{\text{ضا}} \text{سا}(\text{لا})\, \text{ولا} \quad \ldots\ldots (۲)$$

اب لو

$$\text{ت} = \int_{\text{د}}^{\text{ب}} \text{سا}(\text{لا})\, \text{ولا} + \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{سا}(\text{لا})\, \text{ولا} \quad \ldots\ldots (۳)$$

پس

$$\text{ف}(\text{ما}) - \text{ت} = \int_{\text{د}}^{\text{ب}} (\text{قو}^{-\text{مالا}} - ۱)\, \text{سا}(\text{لا})\, \text{ولا} + \text{قو}^{-\text{ماب}} \int_{\text{ب}}^{\text{ضا}} \text{سا}(\text{لا})\, \text{ولا}$$

$$- \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{سا}(\text{لا})\, \text{ولا} \quad \ldots\ldots (۴)$$

اب چونکہ ت مستدق ہے اور $\text{قو}^{-\text{ماب}}$ محدود ہے اس لئے ہم ب کو اتنا بڑا منتخب کرسکتے ہیں کہ (۴) کے بائیں جانب کی دوسری اور تیسری رقمیں تعداداً اتنی چھوٹی ہوں جتنا ہم چاہیں۔ ب کے لئے ایسا انتخاب کرو

اور اس کو اس قیمت پر ثابت رکھو۔ اب ما کو صفر کے اسقدر قریب لو کہ (۴) کے بائیں جانب تیسرا تکملہ تعداداً اتنا چھوٹا ہو جتنا ہم چاہیں۔ پس معلوم ہوا کہ ما کو صفر کے اتنا قریب لیا جا سکتا ہے کہ |ف(ما) - ت| اسقدر چھوٹا ہو جتنا ہم چاہیں۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔

یہ مسئلہ تکملوں کی قیمتیں دریافت کرنے میں بڑا مفید ثابت ہوتا ہے۔ اگلا مسئلہ زیادہ عام ہے اور دوہرے تکملوں کی صورت میں خاص اہمیت رکھتا ہے اگرچہ فی الحال اس پر سے سرسری طور پر گذر جانا کافی ہوگا۔

مسئلہ ۳۔ فرض کرو کہ ف(لا، ما) مسلسل تفاعل ہے لا ما کا سعتوں لا ≧ لِ اور ما ≧ رَ کے لئے۔ اگر (۱) تکملہ

$$\text{سا(ما)} = \int_{ل}^{\infty} \text{ف(لا، ما) ء لا}$$

یکساں طور پر مستدق ہو ہر ما کے لئے جبکہ ما ≧ رَ اور اگر (۲) ما کے مائل بہ لاتناہی ہونے سے ف(لا، ما) یکساں طور پر مستدق ہو ایک معین انتہا فہ(لا) کی طرف ہر ایسے لا کے لئے جبکہ لِ ≦ لا ≦ ب جہاں ب کوئی دیا ہوا عدد ہو سکتا ہے (خواہ یہ کتنا بڑا ہو) تو

$$\text{نہا}_{\text{ما}\to\infty} \int_{ل}^{\infty} \text{ف(لا، ما) ء لا} = \int_{ل}^{\infty} \text{فہ(لا) ء لا} = \int_{ل}^{\infty} \left[\text{نہا}_{\text{ما}\to\infty} \text{ف(لا، ما)}\right] \text{ء لا}$$

سب سے پہلے ہم ثابت کرتے ہیں کہ سا(ما) ایک معین انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ ما کی دو قیمتیں ماَ اور ماً ہیں، تب

$$\text{سا(ماَ)} - \text{سا(ماً)} = \int_{ل}^{ب} \{\text{ف(لا، ماَ)} - \text{ف(لا، ماً)}\} \text{ء لا} + \int_{ب}^{\infty} \text{ف(لا، ماَ) ء لا} - \int_{ب}^{\infty} \text{ف(لا، ماً) ء لا}$$

(۵) . . . .

= ل۱ + ص۱ - ن۱ (فرض کرو)

شرط (۱) کی رو سے ہم ب کو اتنا بڑا لے سکتے ہیں کہ ماَ ماً کی قیمتیں خواہ کچھ ہی ہوں تکملوں |ص۱| اور |ن۱| میں سے ہر ایک کی قیمت ص/۳ سے کم ہو،

ب کی ایسی قیمت منتخب کرو اور پھر اسے ثابت رکھو۔ شرط (۲) کی رو سے ہم ما کی قیمت اس طرح منتخب کر سکتے ہیں کہ وقفہ (ا، ب) میں لا کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو فرق |ف (لا، ما) - ف (لا، مآ)| اکم ہو $\frac{صہ}{۳(ب-ا)}$ سے بشرطیکہ ہر دو ما، مآ بڑے ہوں ما سے محض یہ اس امر کے لئے شرط ہے کہ ف (لا، ما) یکساں طور پر ایک معین انتہا کی طرف مائل ہو جبکہ ما لا انتاہی کی طرف مائل ہو۔ اگر ما کا اس طور پر انتخاب کیا جائے تو |لہ| اکم ہوگا $\frac{صہ}{۳}$ سے۔ پس اگر ما، مآ بڑے ہوں ما سے تو فرق |سا (ما) - سا (مآ)| اکم ہوگا صہ سے۔ دوسرے الفاظ میں جب ما لا انتاہی کی طرف مائل ہوتا ہے تو سا (ما) ایک معین انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے، اس انتہا کو پ سے تعبیر کرو۔

اب ہم ثابت کرینگے کہ

$$پ = \int_{ا}^{\infty} فا(لا)\, ذلا$$

ہم لکھتے ہیں (ب فی الحال غیر معین ہے)

$$\int_{ا}^{ب} فا(لا)\, ذلا - پ = \int_{ا}^{ب} \{فا(لا) - ف(لا، ما)\}\, ذلا$$

$$+ \left[\int_{ا}^{ب} ف(لا، ما)\, ذلا - \int_{ا}^{\infty} ف(لا، ما)\, ذلا\right] + \left[\int_{ا}^{\infty} ف(لا، ما)\, ذلا - پ\right]$$

$$= عا + با + جا \quad (مانو)$$

چونکہ سا (ما) کی انتہا پ ہے ہم ما کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ اگر ما > ما تو $|جا| < \frac{صہ}{۳}$۔ شرط (۱) کی رو سے ہم ب کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ اگر ب > ب تو $|با| < \frac{صہ}{۳}$ خواہ ما کی کچھ ہی قیمت ہو۔ اس شرط کے ماتحت ب کی قیمت منتخب کر کے شرط (۲) کی رو سے

ہم ما₂ کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ اگر ما > ما₂ تو |عہ| < صہ/۲، پس اگر ما بڑا ہو ما₁ اور ما₂ سے اور ب کوئی عدد ہو بڑا ب سے تو

$$\left| \int_{د}^{ب} \text{فہ}(\text{لا})\,\text{ولا} - \text{چ} \right| < \text{صہ} \qquad \ldots\ldots (٦)$$

چونکہ اس لاتساوی میں ما شامل نہیں ہوتا ہم آسان عبارت میں اسے یوں بیان کر سکتے ہیں کہ خواہ صہ کسقدر چھوٹا ہو ب معلوم ہو سکتا ہے کہ اگر ب > ب تو لاتساوی (٦) پوری ہوتی ہے۔ دوسرے الفاظ میں جیسے ب لاتناہی کیطرف مائل ہوتا ہے تکملہ $\int_{د}^{ب}$ فہ (لا) ولا مائل بہ چ ہوتا ہے۔ مسئلہ اس طرح ثابت ہوتا ہے۔

۷۲۔ علامت تکمل کے اندر اعمال۔ اب ہم دفعہ ۶۹ کے مسئلوں کو وسعت دینگے، طالب علم کو نوٹ دفعہ ۷۰ کی طرف توجہ دلائی جاتی ہے۔

مسئلہ ۱۔ اگر تکملہ

$$\text{ف}(\text{ما}) = \int_{د}^{\infty} \text{فا}(\text{لا}، \text{ما})\,\text{ولا} \qquad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

یکساں طور پر مستدق ہو پوری وسعت د ≦ ما ≦ ب میں تو

$$\int_{د}^{ما} \text{ف}(\text{ما})\,\text{وما} = \int_{د}^{ما} \text{وما} \int_{د}^{\infty} \text{فا}(\text{لا}، \text{ما})\,\text{ولا} = \int_{د}^{\infty} \text{ولا} \int_{د}^{ما} \text{فا}(\text{لا}، \text{ما})\,\text{وما} \quad \ldots (۲)$$

جہاں ما کوئی معین عدد ہے وقفہ (د، ب) میں۔

جب تکمل کے حدود محدود مستقل ہوں تو تکمل کی ترتیب کوئی بھی ہو سکتی ہے، اسلئے

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ولا} \int_{\text{ا}}^{\text{ما}} \text{فا}(\text{لا}،\text{ما})\,\text{وما} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{وما} \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا}(\text{لا}،\text{ما})\,\text{ولا} = \int_{\text{ا}}^{\text{ما}} \text{وما} \int_{\text{ا}}^{\infty} \text{فا}(\text{لا}،\text{ما})\,\text{ولا}$$

$$- \int_{\text{ا}}^{\text{ما}} \text{وما} \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{فا}(\text{لا}،\text{ما})\,\text{ولا}$$

فرض کرو کہ ب مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے، تب

$$\int_{\text{ا}}^{\infty} \text{ولا} \int_{\text{ا}}^{\text{ما}} \text{فا}(\text{لا}،\text{ما})\,\text{وما} = \int_{\text{ا}}^{\text{ما}} \text{ف}(\text{ما})\,\text{وما} - \text{نہا}_{\text{ب}\to\infty} \int_{\text{ا}}^{\text{ما}} \text{وما} \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{فا}(\text{لا}،\text{ما})\,\text{ولا}$$

لیکن چونکہ تکملہ (۱) یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے پورے وقفہ (ا، ب) میں اس لئے ہم م منتخب کر سکتے ہیں (جو ما پر منحصر نہ ہو) اور جبکہ ب > م تو

$$\left|\int_{\text{ب}}^{\infty} \text{فا}(\text{لا}،\text{ما})\,\text{ولا}\right| < \text{صہ} \quad \text{اور} \quad \left|\int_{\text{ا}}^{\text{ما}} \text{وما} \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{فا}(\text{لا}،\text{ما})\,\text{ولا}\right| < \text{صہ}(\text{ما}-\text{ا})$$

اسلئے جیسے ب مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے موخر الذکر تکملہ مائل بہ صفر ہوتا ہے مسئلہ اس طرح ثابت ہوتا ہے۔

یہ قابل توجہ ہے کہ علامت تکمل کے اندر تکمل کرنے سے جو نیا تکملہ حاصل ہوتا ہے وہ خود سعت $\text{ا} \leq \text{ما} \leq \text{ب}$ کے اندر یکساں طور پر مستدق ہے۔

اس مسئلہ کی توسیع مسئلہ (۲) دفعہ ۳۷ میں کی گئی ہے۔

مسئلہ ۲۔ اگر تکملہ $\int_{\text{ا}}^{\infty} \frac{\text{جف}\,\text{فا}(\text{لا}،\text{ما})}{\text{جف}\,\text{ما}}\,\text{ولا}$ یکساں طور پر مستدق ہو تمام سعت $\text{ا} \leq \text{ما} \leq \text{ب}$ میں تو یہ تکملہ (۱) کا مشتق ہوگا۔

کیونکہ اگر $\text{ف}_1(\text{ما}) = \int_{\text{ا}}^{\infty} \frac{\text{جف}\,\text{فا}(\text{لا}،\text{ما})}{\text{جف}\,\text{ما}}\,\text{ولا}$

تو مسئلہ (۱) کی رو سے

$\int_{ل}^{ما} فہ(ما)\, ورما = \int_{ل}^{ما} ورلا \int_{ل}^{ما} \frac{جف فا(لا، ما)}{جف ما} ورما = \int_{ل}^{ما} فا(لا، ما) ورلا - \int_{ل}^{ما} فا(لا، ل) ورلا$

یعنی $\int_{ل}^{ما} فہ(ما)\, ورما = ف(ما) - ف(ل)$

بلحاظ ما کے تفرق کرنے سے $فہ(ما) = فَ(ما)$۔

اب ہم ان مسائل کو بعض مشہور تکملوں کی قیمتیں معلوم کرنے میں لگائینگے، جب اس امر کا ثبوت نہ درج کیا جائے کہ تکملہ یکساں طور پر مستدق ہے تو طالب علم اسے بآسانی خود بہم پہنچا سکیگا۔ اوسط قیمت کے مسئلے اور تکمل بالحصص کا عمل یکساں استدقاق کے جانچنے میں اکثر مفید ہوگا متغیر کی تبدیلی بھی بعض اوقات کارآمد ہوگی۔

(نیز ملاحظہ ہو دفعہ ۷۴ کے شروع کی عبارت)

مثال ۱۔ فرض کرو کہ $ء = \int_{.}^{\infty} قو^{-لہ لا} \frac{جب مالا}{لا} ورلا،\ لہ > .$

بلحاظ ما کے تفرق کرو اس لئے

$$\frac{ورء}{ورما} = \int_{.}^{\infty} قو^{-لہ لا} جم مالا\, ورلا = \frac{لہ}{لہ^2 + ما^2}$$

اس مساوات کو بلحاظ ما کے تکمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$ء = مس^{-1}\left(\frac{ما}{لہ}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

کیونکہ ء = ۰ جبکہ ما = ۰۔

جب لہ = ۰ تو تکملہ مستدق ہوتا ہے، اس لئے مسئلہ (۲) دفعہ ۱۷ کی رو سے

$$\int_{.}^{\infty} \frac{جب مالا}{لا} ورلا = \lim_{لہ \to .} مس^{-1}\left(\frac{ما}{لہ}\right) = \pm \frac{\pi}{2} \ldots\ldots (۲)$$

مثبت علامت لینی چاہیئے اگر ما > ۰ اور - اگر ما < ۰، اگر ما = ۰ تو تکملہ صفر ہوگا۔

مثال ۲ - $\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{قو}^{-\text{ا لا}} - \text{قو}^{-\text{ب لا}}}{\text{لا}} \text{ور لا} = \text{لوک} \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ ، $\text{ب} > \text{ا} > ۰$.

ذیل کے تکملہ پر غور کرو جبکہ $\text{ما} \geq \text{ج} > ۰$.

$$\int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-\text{ما لا}} \text{ور لا} = \frac{1}{\text{ما}}$$

اگر $\text{ا} \geq \text{ج}$ جہاں ج ایک ثابت مثبت عدد ہے تو ہم بلحاظ ما کے تکمل کر سکتے ہیں $\text{ما} = \text{ا}$ سے $\text{ما} = \text{ب} > \text{ا}$ تک، اسلئے

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{قو}^{-\text{ا لا}} - \text{قو}^{-\text{ب لا}}}{\text{لا}} \text{ور لا} = \text{لوک} \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$$

مثال ۳ - $\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{جم ا لا} - \text{جم ب لا}}{\text{لا}} \text{ور لا} = \text{لوک} \left(\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right)$ ، $\text{ب} > ۰$ ، $\text{ا} > ۰$.

اگر $\text{لہ} > ۰$ تو $\int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-\text{لہ لا}} \text{جب ما لا ور لا} = \frac{\text{ما}}{\text{لہ}^2 + \text{ما}^2}$

بلحاظ ما کے تکمل کرو $\text{ما} = \text{ا}$ سے $\text{ما} = \text{ب}$ تک، اس طرح

$$\int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-\text{لہ لا}} \frac{\text{جم ا لا} - \text{جم ب لا}}{\text{لا}} \text{ور لا} = \frac{1}{2} \text{لوک} \left(\frac{\text{لہ}^2 + \text{ب}^2}{\text{لہ}^2 + \text{ا}^2}\right)$$

یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ یہ تکملہ مستدق ہے جبکہ $\text{لہ} = ۰$ ، لہ کو صفر کے مساوی رکھنے سے مطلوبہ قیمت حاصل ہوتی ہے۔

تکملہ کی قیمت کیا ہوگی اگر ا یا ب یا ا اور ب دونوں منفی ہوں؟

مثال ۴ - $\text{ع} = \int_{۰}^{\infty} \frac{\text{جم ا لا ور لا}}{1 + \text{لا}^2}$ ، $\text{و} = \int_{۰}^{\infty} \frac{\text{لا جب ا لا}}{1 + \text{لا}^2} \text{ور لا}$

$$\frac{\text{ور ع}}{\text{ور ا}} = - \int_{۰}^{\infty} \frac{\text{لا جب ا لا ور لا}}{1 + \text{لا}^2} = -\text{و} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

بشرطیکہ تکملہ و یکساں طور پر مستدق ہو اور ایسا ہوگا اگر $\text{ا} \geq \text{ج} > ۰$ ،

کیونکہ اگر لا ≧ ھ > ا تو جزو ضربی $\frac{\text{لا}}{۱+\text{لا}^۲}$، لا کا گھٹنے والا تفاعل ہے اور اس لئے (ھ ≦ ضا ≦ ک)

$$\int_{\text{ھ}}^{\text{ک}} \frac{\text{لا جب ا لا}}{۱+\text{لا}^۲}\,\text{ولا} = \frac{\text{ھ}}{۱+\text{ھ}^۲}\cdot\frac{\text{جم ا ھ} - \text{جم ا ضا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ک}}{۱+\text{ک}^۲}\cdot\frac{\text{جم ا ضا} - \text{جم ا ک}}{\text{ا}}$$

$$\text{پس}\quad \left|\int_{\text{ھ}}^{\infty} \frac{\text{لا جب ا لا}}{۱+\text{لا}^۲}\right| \leqq \frac{۲\,\text{ھ}}{(۱+\text{ھ}^۲)\,\text{ج}} < \frac{۲}{\text{ھ ج}}$$

لیکن $\frac{۲}{\text{ھ ج}}$، ا پر منحصر نہیں ہے اور ھ کے مناسب انتخاب سے اتنا چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔

و کے تفرق کرنے سے جو تکملہ ملتا ہے وہ مستدق نہیں ہے لیکن اگر مثال (۲) میں ہم لیں ما = ا ≧ ج > ۰ تو حاصل ہوگا

$$\text{و} - \frac{\pi}{۲} = \int_{۰}^{\infty}\left(\frac{\text{لا}}{۱+\text{لا}^۲} - \frac{۱}{\text{لا}}\right)\text{جب ا لا ولا} = -\int_{۰}^{\infty}\frac{\text{جب ا لا ولا}}{\text{لا}(۱+\text{لا}^۲)}$$

اب ہم تفرق کر سکتے ہیں پس

$$\frac{\text{دو}}{\text{دا}} = -\int_{۰}^{\infty}\frac{\text{جم ا لا ولا}}{۱+\text{لا}^۲} = -\text{ع} \quad\ldots\ldots\ldots (۲)$$

(۱) اور (۲) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{د}^۲\text{ع}}{\text{دا}^۲} = -\frac{\text{دو}}{\text{دا}} = \text{ع}$$

ع میں اس تفرقی مساوات کا پورا تکملہ ہے

$$\text{ع} = \text{ا}\,\text{قو}^{\text{ا}} + \text{ب}\,\text{قو}^{-\text{ا}}$$

اب ا کی ہر قیمت کے لئے ع محدود ہے ($\frac{\pi}{۲}$ سے بڑا نہیں)، اسلئے

ا = ۰ کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو ا کے صفر ہونے سے ع مائل بہ لاانتہا ہی ہوگا۔ نیز ہر ا کے لئے ع مسلسل ہے تکمل میں ا کو صفر بنانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{ع} = \frac{\pi}{۲}$، جس سے $\text{ب} = \frac{\pi}{۲}$ اس لئے

$$\text{ع} = \frac{\pi}{۲}\,\text{قو}^{-\text{ا}}،\ \text{ا} \geq ۰،\quad \text{و} = -\frac{\text{دع}}{\text{دا}} = \frac{\pi}{۲}\,\text{قو}^{-\text{ا}}،\ \text{ا} > ۰.$$

اگر $\text{ا} < ۰$ تو $\text{ع} = \frac{\pi}{۲}\,\text{قو}^{\text{ا}}$، $\text{و} = -\frac{\pi}{۲}\,\text{قو}^{\text{ا}}$۔ اگر $\text{ا} = ۰$ تو $\text{و} = ۰$۔

نتیجہ صریح

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{جم ا لا دلا}}{\text{ب}^۲ + \text{لا}^۲} = \frac{\pi}{۲\text{ب}}\,\text{قو}^{-\text{اب}}،\quad \text{ا} \geq ۰،\ \text{ب} > ۰.$$

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{لا جب ا لا دلا}}{\text{ب}^۲ + \text{لا}^۲} = \frac{\pi}{۲}\,\text{قو}^{-\text{اب}}،\quad \text{ا} > ۰،\ \text{ب} > ۰.$$

مثال ۵۔ $$\int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-\text{ا}^۲\text{لا}^۲}\,\text{جم ۲ب لا دلا} = \frac{\sqrt{\pi}}{۲\text{ا}}\,\text{قو}^{-\frac{\text{ب}^۲}{\text{ا}^۲}}$$

تکملہ کو ع سے تعبیر کرو اور بلحاظ ب کے تفرق کرو، اس طرح

$$\frac{\text{دع}}{\text{دب}} = \int_{۰}^{\infty} -۲\text{لا}\,\text{قو}^{-\text{ا}^۲\text{لا}^۲}\,\text{جب ۲ب لا دلا} = \left[\frac{\text{قو}^{-\text{ا}^۲\text{لا}^۲}}{\text{ا}^۲}\,\text{جب ۲ب لا}\right]_{۰}^{\infty}$$

$$-\frac{۲\text{ب}}{\text{ا}^۲}\int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-\text{ا}^۲\text{لا}^۲}\,\text{جم ۲ب لا دلا}$$ تکمل بالحصص سے۔

تکمل شدہ حصہ دونوں حدود پر صفر ہوتا ہے۔ پس

$$\frac{\text{دع}}{\text{دب}} = -\frac{۲\text{ب}}{\text{ا}^۲}\,\text{ع}،\quad \text{ع} = \text{ا}\,\text{قو}^{-\frac{\text{ب}^۲}{\text{ا}^۲}}$$

لیکن جب ب = ۰، $\text{ع} = \int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-\text{ا}^۲\text{لا}^۲}\,\text{دلا} = \frac{۱}{\text{ا}}\int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-\text{م}^۲}\,\text{دم} = \frac{\sqrt{\pi}}{۲\text{ا}}$ (دفعہ ۷ مثال ۳)

اسلئے $\text{ا} = \frac{\sqrt{\pi}}{۲\text{ا}}$ اور $\text{ع} = \frac{\sqrt{\pi}}{۲\text{ا}}\,\text{قو}^{-\frac{\text{ب}^۲}{\text{ا}^۲}}$

مثال ۶۔ $\int_{0}^{\infty} \text{ق}^{-(\text{ا}\,\text{لا}^{2}+\frac{\text{ب}}{\text{لا}^{2}})}\,\text{دلا}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\text{ا}}}\,\text{ق}^{-2\sqrt{\text{اب}}}$، $\text{ا}>0$، $\text{ب}>0$.

اس تکملہ کی قیمت بلحاظ ب کے تفرق کرنے سے حاصل ہو سکتی ہے لیکن متغیر کے بدلنے کا قاعدہ زیادہ علم آموز ہوگا، رکھو

$$\text{ما}=\sqrt{\text{ا}}\,\text{لا}+\frac{\sqrt{\text{ب}}}{\text{لا}}\text{، جس سے } \text{لا}=\left\{\text{ما}\pm\sqrt{\text{ما}^{2}-4\sqrt{\text{اب}}}\right\}\Big/2\sqrt{\text{ا}} \quad \ldots(1)$$

$$\frac{\text{دما}}{\text{دلا}}=\sqrt{\text{ا}}-\frac{\sqrt{\text{ب}}}{\text{لا}^{2}}\text{، }\frac{\text{دلا}}{\text{دما}}=\frac{1}{2\sqrt{\text{ا}}}\left\{1\pm\frac{\text{ما}}{\sqrt{\text{ما}^{2}-4\sqrt{\text{اب}}}}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

متغیر ما اقل ہے جبکہ $\text{لا}=\sqrt{\frac{\sqrt{\text{ب}}}{\sqrt{\text{ا}}}}$۔ جیسے لا بڑھتا ہے صفر سے $\sqrt{\frac{\sqrt{\text{ب}}}{\sqrt{\text{ا}}}}$ تک، ما گھٹتا ہے ∞ سے $2\sqrt{\sqrt{\text{اب}}}$ تک، لا کی اس وسعت کے لئے (۱) اور (۲) میں منفی علامت لینی چاہیئے۔ جیسے لا بڑھتا ہے $\sqrt{\frac{\sqrt{\text{ب}}}{\sqrt{\text{ا}}}}$ سے ∞ تک، ما بڑھتا ہے $2\sqrt{\sqrt{\text{اب}}}$ سے ∞ تک لا کی اس وسعت کے لئے (۱) اور (۲) میں مثبت علامت لینی چاہیئے۔

نیز $\text{ا}\,\text{لا}^{2}+\frac{\text{ب}}{\text{لا}^{2}}=\text{ما}^{2}-2\sqrt{\text{اب}}$، پس تکملہ مساوی ہے

$$\frac{\text{ق}^{2\sqrt{\text{اب}}}}{2\sqrt{\text{ا}}}\int_{\infty}^{2\sqrt{\sqrt{\text{اب}}}}\text{ق}^{-\text{ما}^{2}}\left\{1-\frac{\text{ما}}{\sqrt{\text{ما}^{2}-4\sqrt{\text{اب}}}}\right\}\text{دما}+\frac{\text{ق}^{2\sqrt{\text{اب}}}}{2\sqrt{\text{ا}}}\int_{2\sqrt{\sqrt{\text{اب}}}}^{\infty}\text{ق}^{-\text{ما}^{2}}\left\{1+\frac{\text{ما}}{\sqrt{\text{ما}^{2}-4\sqrt{\text{اب}}}}\right\}\text{دما}$$

$$=\frac{\text{ق}^{2\sqrt{\text{اب}}}}{2\sqrt{\text{ا}}}\int_{2\sqrt{\sqrt{\text{اب}}}}^{\infty}\text{ق}^{-\text{ما}^{2}}\frac{2\,\text{ما}\,\text{دما}}{\sqrt{\text{ما}^{2}-4\sqrt{\text{اب}}}}=\frac{\text{ق}^{-2\sqrt{\text{اب}}}}{\sqrt{\text{ا}}}\int_{0}^{\infty}\text{ق}^{-\text{ی}^{2}}\,\text{دی}$$

ابدال $\text{ی}^{2}=\text{ما}^{2}-4\sqrt{\text{اب}}$ کی مدد سے۔ موخر الذکر تکملہ کی مطلوبہ قیمت

فوراً حاصل ہوتی ہے۔ طالب علم ابدال و = ا رلا ۔ ب/لا کی مدد سے قیمت محسوب کرے۔ جیسے لا بڑھتا ہے صفر سے ∞ تک، و بڑھتا ہے ۔ ∞ سے ∞ تک۔

مثال ۷۔ ی = ∫ قو^(-رلا) لا^(ن-۱) جم ب لا ور لا، و = ∫ قو^(-رلا) لا^(ن-۱) جب ب لا ور لا

جہاں ا > ۰، ن > ۰۔

ذیل کے ابدال عمل میں لاؤ۔

ا = رجم طہ، ب = رجب طہ جہاں ۔ π/۲ < طہ < π/۲

رلا = ما، ی رن = ی، و رن = و .... (۱)

اس طرح تکملے یہ شکل اختیار کرتے ہیں

ی = ∫ قو^(-ما جم طہ) ما^(ن-۱) جم (ما جب طہ) ور ما،

و = ∫ قو^(-ما جم طہ) ما^(ن-۱) جب (ما جب طہ) ور ما

اب ی کو بلحاظ طہ کے تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

وری/ورطہ = ∫ قو^(-ما جم طہ) ما^ن جب طہ جم (ما جب طہ) ور ما

۔ ∫ قو^(-ما جم طہ) ما^ن جم طہ جب (ما جب طہ) ور ما) .... (۲)

بشرطیکہ تکملے یکساں طور پر مستدق ہوں اور یہ ہیں کیونکہ اگر ج مثبت ہو خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا کیوں نہ ہو تو ا ≥ جم طہ ≥ ج اور ان میں سے ہر ایک تکملہ تعدادا کم ہے ذیل کے تکملہ سے

$$\int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-\text{ج ما}}\ \text{ما}^{\text{ن}}\ \text{ء ما} = \frac{\text{جا(ن+۱)}}{\text{ج}^{\text{ن+۱}}}$$

پس ہر ایک تکملہ یکساں طور پر مستدق ہے جبکہ $-\frac{\pi}{۲} < \text{طہ} < \frac{\pi}{۲}$
ہم مساوات (۲) کو اس شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$\frac{\text{ء ع}}{\text{ء طہ}} = \int_{۰}^{\infty} \text{ما}^{\text{ن}}\ \frac{\text{ء}}{\text{ء ما}} \left\{ \text{قو}^{-\text{ما جم طہ}}\ \text{جب(ما جب طہ)} \right\} \text{ء ما}$$

اور تکمل بالحصص سے

$$\frac{\text{ء ع}}{\text{ء طہ}} = -\text{ن} \int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-\text{ما جم طہ}}\ \text{ما}^{\text{ن}-۱}\ \text{جب(ما جب طہ) ء ما} = -\text{ن و} \quad (۳)$$

اسی طرح سے $\frac{\text{ء و}}{\text{ء طہ}} = \text{ن ع}$ .... (۴)

(۳) اور (۴) سے $\frac{\text{ء}^۲\text{ع}}{\text{ء طہ}^۲} + \text{ن}^۲\text{ع} = ۰$، $\text{ع} = \text{ا جم ن طہ} + \text{ب جب ن طہ}$

جب طہ = ۰ تو $\text{ع} = \int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-\text{ما}}\ \text{ما}^{\text{ن}-۱}\ \text{ء ما} = \text{جا(ن)}$، $\frac{\text{ء ع}}{\text{ء طہ}} = ۰$

پس ا = جا(ن)، ب = ۰

اور اس لئے ع = جا(ن) جم ن طہ، $\text{و} = -\frac{۱}{\text{ن}} \frac{\text{ء ع}}{\text{ء طہ}} = \text{جا(ن) جب ن طہ}$

.... (۵)

اس لئے ہمیں ذیل کے نتائج حاصل ہوتے ہیں

$$\int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-\text{لا}}\ \text{لا}^{\text{ن}-۱}\ \text{جم ب لا ء لا} = \frac{\text{جا(ن) جم ن طہ}}{\text{ر}^{\text{ن}}} \quad .... (۶)$$

$$\int_{۰}^{\infty} \text{و}^{-\text{الا}}\, \text{لا}^{\text{ن}-۱}\, \text{جب ب لا ولا} = \frac{\text{جا(ن) جب ن طہ}}{\text{ر}^{\text{ن}}} \quad \ldots\ldots (۷)$$

جہاں $\text{طہ} = \text{مس}^{-۱}\left(\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right)$، $\text{ر} = (\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲)^{\frac{۱}{۲}}$

(۶) اور (۷) میں مستقلات کو خاص قیمتیں دینے سے کئی ضروری نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

جب $\text{ا} = ۰$، $\text{ب} > ۰$ تو ہمیں حاصل ہوتا ہے اگر $۰ < ۱ - \text{ن} < ۱$

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{جم ب لا ولا}}{\text{لا}^{۱-\text{ن}}} = \frac{\text{جا(ن) جم}\frac{\text{ن}\pi}{۲}}{\text{ب}^{\text{ن}}}\ ,\quad \int_{۰}^{\infty} \frac{\text{جب ب لا ولا}}{\text{لا}^{۱-\text{ن}}}$$

$$= \frac{\text{جا(ن) جب}\frac{\text{ن}\pi}{۲}}{\text{ب}^{\text{ن}}} \quad \ldots\ldots (۸)$$

دوسری مساوات درست رہتی ہے اگر $۰ < ۱ - \text{ن} < ۲$

ان تکملوں میں رکھو $\text{ب} = ۱$، $\text{ن} = \frac{۱}{۲}$ تب چونکہ $\text{جا}\left(\frac{۱}{۲}\right) = \sqrt{\pi}$، اسلئے

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{جم لا}}{\sqrt{\text{لا}}}\, \text{ولا} = \sqrt{\frac{\pi}{۲}} = \int_{۰}^{\infty} \frac{\text{جب لا}}{\sqrt{\text{لا}}}\, \text{ولا} \quad \ldots\ldots (۹)$$

اور لا کی بجائے $\text{لا}^۲$ مندرج کرنے سے

$$\int_{۰}^{\infty} \text{جم}(\text{لا}^۲)\, \text{ولا} = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{۲}} = \int_{۰}^{\infty} \text{جب}(\text{لا}^۲)\, \text{ولا} \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

نیز (۶) اور (۷) میں رکھو $\text{ن} = \frac{۱}{۲}$ اور لا کی بجائے $\text{لا}^۲$ رکھو تب

$$\int_{۰}^{\infty} \text{و}^{-\text{الا}^۲}\, \text{جم}(\text{ب لا}^۲)\, \text{ولا} = \frac{\sqrt{\pi}\ \text{جم}\frac{\text{طہ}}{۲}}{۲\,\text{ر}^{\frac{۱}{۲}}}\ ,\quad \int_{۰}^{\infty} \text{و}^{-\text{الا}^۲}\, \text{جب}(\text{ب لا}^۲)\, \text{ولا}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\ \text{جب}\frac{\text{طہ}}{۲}}{۲\,\text{ر}^{\frac{۱}{۲}}} \quad \ldots\ldots (۱۱)$$

جہاں طہ اور ر کی قیمتیں وہی ہیں جو پہلے تھیں۔

۷۳۔ لاانتہا حدود کے لئے تکمل کی ترتیب

مسئلہ ۱ دفعہ ۷۲ سے ظاہر ہے کہ بعض حالات کے ماتحت تکمل کی ترتیب اُس صورت میں بھی بدل سکتی ہے جبکہ ایک حد لامتناہی ہو۔ دفعہ ۷۱ کے مسئلہ ۳ سے اُن شرائط کی تعیین ہوتی ہے جن کے ماتحت دفعہ ۷۲ کے مسئلہ ۱ کو توسیع دیکر ہم اُس صورت پر بھی حاوی کر سکتے ہیں جس میں اوپر کی حد ما بھی لامتناہی ہو۔

مسئلہ ۱۔ اگر تکملے

$$\int_{\text{ا}}^{\infty} \text{ف}(\text{لا}، \text{ما})\, \text{ءلا} \quad \ldots\ldots (۱)، \qquad \int_{\text{ر}}^{\infty} \text{ف}(\text{لا}، \text{ما})\, \text{ءما} \quad \ldots\ldots (۲)$$

بالترتیب یکساں طور پر مستدق ہوں بالتمام اختیاری وقفوں (ر، ب) اور (ا، ب) میں

اور اگر تکملہ

$$\int_{\text{ا}}^{\infty} \text{ءلا} \int_{\text{ر}}^{\text{ما}} \text{ف}(\text{لا}، \text{ما})\, \text{ءما} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

یکساں طور پر مستدق ہو پورے نامحدود وقفہ ما $\geq$ ر میں تو

$$\int_{\text{ر}}^{\infty} \text{ءما} \int_{\text{ا}}^{\infty} \text{ف}(\text{لا}، \text{ما})\, \text{ءلا} = \int_{\text{ا}}^{\infty} \text{ءلا} \int_{\text{ر}}^{\infty} \text{ف}(\text{لا}، \text{ما})\, \text{ءما} \quad \ldots\ldots (۴)$$

فرض کرو کہ دفعہ ۷۱ مسئلہ ۳ کے تفاعل ف (لا، ما) کی تعیین ذیل کی مساوات سے ہوتی ہے

$$\text{ف}(\text{لا}، \text{ما}) = \int_{\text{ر}}^{\text{ما}} \text{ف}(\text{لا}، \text{ما})\, \text{ءما}$$

اس صورت میں اوپر کا تکملہ (۳) مسئلہ مذکورہ کا تفاعل سا (ما) ہوگا۔ اوپر کے تکملہ (۲) کا استدقاق مسئلہ مذکورہ کی شرط (۲) کو پورا کرتا ہے اور تکملہ (۳) کا استدقاق شرط (۱) کو اور اوپر کے تکملہ (۱) کے استدقاق کی وجہ سے ہم دفعہ ۷۲ کے مسئلہ ۱ کو لگا سکتے ہیں۔ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$\int_{\text{ر}}^{\infty} \text{ءما} \int_{\text{ا}}^{\infty} \text{ف}(\text{لا}، \text{ما})\, \text{ءلا} = \text{نہا}_{\text{ب} \to \infty} \int_{\text{ر}}^{\text{ب}} \text{ءما} \int_{\text{ا}}^{\infty} \text{ف}(\text{لا}، \text{ما})\, \text{ءلا}$$

= نہا$_{ما \to \infty}$ $\int_{ر}^{\infty}$ ورلا $\int_{ر}^{ما}$ فا (لا، ما) فرما (مسئلہ ۱، دفعہ ۲)

= $\int_{ر}^{\infty}$ ورلا $\int_{ر}^{\infty}$ فا (لا، ما) فرما (مسئلہ ۳، دفعہ ۱)

طالب علم شاید یہ خیال کریگا کہ موخرالذکر تکملہ اس سے پہلے تکملہ کو لکھنے کا صرف ایک اور طریقہ ہے لیکن یہ ایسا نہیں ہے۔ آخر سے دوسرے تکملہ میں اعمال کی ترتیب یہ ہے (۱) تکمل بلحاظ ما کے (۲) تکمل بلحاظ لا کے اور انتہا لا $\to \infty$ کی طرف گذر (۳) انتہا ما $\to \infty$ کی طرف گذر۔ آخری تکملہ میں ترتیب یہ ہے (۱) تکمل بلحاظ ما کے (۲) انتہا ما $\to \infty$ کی طرف گذر (۳) تکمل بلحاظ لا کے اور انتہا لا $\to \infty$ کی طرف گذر۔ ترتیب الٹانے کے لئے اس کا جواز ثابت کرنے کی ضرورت ہوگی جیسے ذیل کی سادہ مثال سے ظاہر ہے۔ اگر ا > ۰ تو

نہا$_{ما \to \infty}$ $\int_{ر}^{\infty}$ فرلا $\int_{ر}^{ما}$ جم (لا ما) فرما = نہا$_{ما \to \infty}$ $\int_{ر}^{\infty}$ $\frac{\text{جب (لا ما)}}{\text{لا}}$ ورلا

= نہا$_{ما \to \infty}$ $\int_{ر ما}^{\infty}$ $\frac{\text{جب ع}}{\text{ع}}$ ورع = ۰

لیکن $\int_{ر}^{\infty}$ ورلا $\int_{ر}^{\infty}$ جم (لا ما) ورما ایک معین مقدار نہیں ہے۔
ہم صورت حال کو اس طور پر بھی بیان کر سکتے ہیں

نہا$_{ما \to \infty}$ $\int_{ر}^{\infty}$ ورلا $\int_{ر}^{ما}$ فا (لا، ما) ورما = $\int_{ر}^{\infty}$ ورلا $\int_{ر}^{\infty}$ فا (لا، ما) ورما

- نہا$_{ما \to \infty}$ $\int_{ر}^{\infty}$ ورلا $\int_{ما}^{\infty}$ فا (لا، ما) ورما ...... (۵)

ہمیں ثابت کرنا چاہئے کہ آخری تکملہ صفر کی طرف مائل ہوتا ہے جیسے ما لاتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے، اوپر کے مسئلہ کے لئے ثبوت دفعہ ۱،

مسئلہ ۳ کے اندر شامل ہوگا۔

یکساں استدقاق بالعموم ایسا ممکن ہے کہ تکملہ (۱) یکساں طور پر مستدق ہو بالتمام وقفوں (دَ، ج - عا)، (ج + عَا، بَ) میں جہاں دَ ≧ ج ≧ بَ اور عا، عَا اختیاری چھوٹی مثبت مقداریں ہیں یعنی استدقاق ج کے پاس یکساں نہیں رہتا۔ اگر ج جیسی قیمتیں تعداد میں محدود ہوں تو اسے ہم یوں بیان کرینگے کہ تکملہ تمام وقفہ (دَ، بَ) میں عام طور پر یکساں استدقاق رکھتا ہے۔ اگر ج = دَ تو ہم لے سکتے ہیں عا = ۰ اور اگر ج = بَ تو عَا = ۰ لیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ ۲ - اگر تکملہ (۱) محض عام طور پر یکساں استدقاق رکھتا ہو لیکن تکملہ (۳) مسلسل تفاعل ہو ما کا سعت دَ ≧ ما ≧ بَ کے لئے تو

$$\int_{\text{دَ}}^{\text{ما}} \text{د ما} \int_{\text{دِ}}^{\text{ب}} \text{فا(لا، ما)}\,\text{د لا} = \int_{\text{دِ}}^{\text{ب}} \text{د لا} \int_{\text{دَ}}^{\text{ما}} \text{فا(لا، ما)}\,\text{د ما} \quad \ldots\ldots (۶)$$

جہاں اوپر کی حدِ ما کوئی عدد ہے وقفہ (دَ، بَ) کے درمیان۔

مسئلہ ا دفعہ ۲۰۷ کی یہ توسیع ہے، فرض کرو کہ صرف ایک نقطہ ج ایسا ہے اور دَ < ج < ما، اگر ایک سے زیادہ ایسے نقطے ہوں تو اسی استدلال کو مکرر استعمال کیا جاسکتا ہے۔ تکملہ (۱) کو ف (ما) سے تعبیر کرو تب (مقابلہ کرو دفعہ ۶۵ کے ساتھ)

$$\int_{\text{دَ}}^{\text{ما}} \text{ف(ما)}\,\text{د ما} = \lim_{\text{عا}\to 0} \int_{\text{دَ}}^{\text{ج - عا}} \text{ف(ما)}\,\text{د ما} + \lim_{\text{عَا}\to 0} \int_{\text{ج + عَا}}^{\text{ما}} \text{ف(ما)}\,\text{د ما} \quad \text{(تعریف کی رو سے)}$$

$$= \lim_{\text{عا}\to 0} \int_{\text{دِ}}^{\text{ب}} \text{د لا} \int_{\text{دَ}}^{\text{ج - عا}} \text{فا(لا، ما)}\,\text{د ما} + \lim_{\text{عَا}\to 0} \int_{\text{دِ}}^{\text{ب}} \text{د لا} \int_{\text{ج + عَا}}^{\text{ما}} \text{فا(لا، ما)}\,\text{د ما}$$

[مسئلہ ا دفعہ ۲۰۷ کی رو سے]

$$= \int_{\text{د}}^{\infty} \text{ورلا} \int_{\text{دَ}}^{\text{ج}} \text{فا(لا، ما) ورما} + \int_{\text{د}}^{\infty} \text{ورلا} \int_{\text{ج}}^{\text{ما}} \text{فا(لا، ما) ورما}$$

کیونکہ تکملہ (۳) مسلسل ہے اور ہم عا = ۰، عاَ = ۰ بنا سکتے ہیں۔ اس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے کیونکہ اِن تکملوں کا مجموعہ (۲) کے بائیں جانب کے تکملہ کے مساوی ہے۔

یہ یاد رہے کہ (۳) مسلسل ہوگا اگر یہ وقفہ (د، ب) میں یکساں طور پر مستدق ہو۔

مسئلہ ۳۔ مساوات (۴) اُس صورت میں بھی درست رہتی ہے جبکہ تکملہ (۱) یکساں طور پر مستدق ہو بالعموم بشرطیکہ مسئلہ (۱) کے اور شرائط پورے ہوں۔ یہ مسئلہ مسئلہ بالا کا سیدھا نتیجہ صریح ہے۔

مسئلہ ۴۔ اگر تکملے (۱) اور (۲) یکساں طور پر مستدق ہوں محض عام طور پر سراسر وقفوں (دَ، ب)، (د، ب) میں بالترتیب، لیکن اگر تکملہ (۳) اور متناظر تکملہ

$$\int_{\text{دَ}}^{\infty} \text{فرما} \int_{\text{د}}^{\text{لا}} \text{فا(لا، ما) فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۳َ})$$

یکساں طور پر مستدق ہوں سراسر نامحدود وقفوں ما $\geq$ دَ اور لا $\geq$ د میں بالترتیب تو مساوات (۴) درست رہتی ہے بشرطیکہ (۴) میں کا ایک تکملہ قابل تعین ہو۔

فرض کرو کہ (۴) کے بائیں جانب کا تکملہ $\int_{\text{د}}^{\infty} \text{فرلا} \int_{\text{دَ}}^{\infty} \text{فا(لا، ما) فرما}$

قابل تعین ہے اور اس کو ا سے تعبیر کرو۔ تب (مقابلہ کرو دفعہ ۴۶ کے ساتھ)

$$\underset{\text{ب}\to\infty}{\text{نہا}} \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{ورلا} \int_{\text{دَ}}^{\infty} \text{فا(لا، ما) ورما} = \cdot \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۷})$$

چونکہ تکملہ (۳) مسلسل ہے، اسلئے مسئلہ (۲) کی رُو سے

ت فرما ت^∞ فا (لا، ما) فرلا = ت^∞ فرلا ت فا (لا، ما) فرما = ا - ت فرلا ت^∞ فا (لا، ما) فرما

موخرالذکر تکملہ کو حب (ما) سے تعبیر کرو۔ ہمیں ثابت کرنا چاہئے (مقابلہ کرو مساوات (۵) کے ساتھ اور اس کے متعلق جو عبارت ہے) کہ

نہا حب (ما) = ۰ جبکہ ما ← ∞ ۔

اب حب (ما) یکساں طور پر مستدق ہے جبکہ ما ≥ ر کیونکہ

ت^∞ فرلا ت^∞ فا (لا، ما) فرما = ت^∞ فرلا ت فا (لا، ما) فرما - ت فرلا ت فا (لا، ما) فرما

= عہ - بہ (مانو)

(۷) کی رو سے ہم مہ کا اس طور پر انتخاب کر سکتے ہیں کہ | عہ | < صہ اگر ب > مہ اور چونکہ تکملہ (۳) یکساں طور پر مستدق ہے ما ≥ ر کے لئے ہم مہ کا انتخاب اس طور پر کر سکتے ہیں کہ | بہ | < صہ ہر ایسے ما ≥ ر کے لئے اگر ب > مہ۔ فرض کرو کہ م ہر دو اعداد مہ، مہ سے بڑا ہے، تب | عہ - بہ | < ۲ صہ ہر ایسے ما ≥ ر کے لئے اگر ب > م، اسلئے حب (ما) مستدق ہے جیسے بیان ہوا۔

اور حب (ما) = ت فرلا ت^∞ فا (لا، ما) فرما + ت^∞ فرلا ت^∞ فا (لا، ما) فرما

= ت فرما ت فا (لا، ما) فرلا + ت^∞ فرلا ت^∞ فا (لا، ما) فرما

مسئلہ (۲) کی رو سے کیونکہ (۳) مسلسل ہے۔

= جہ + (عہ - بہ)، مانو

اب فرض کرو کہ ب ایک ثابت عدد ہے جو بڑا ہے م سے (جیسے اوپر معلوم کیا گیا) تب | عہ - بہ | < ۲ صہ، نیز چونکہ تکملہ (۳) یکساں طور پر مستدق ہے لا ≥ ا کے لئے ہم ن کا اس طور پر انتخاب کر سکتے ہیں کہ

ا جما ا < صہ اگر ما > ن، اسلئے ا ح ب (ما) ا < ۳ صہ اگر ما > ن،
دوسرے الفاظ میں نہا ح ب (ما) = ۰ جبکہ ما ← ∞، پس مسئلہ
ثابت ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح۔ اگر فا (لا، ما) ہمیشہ مثبت ہو تو تکملوں (۳)، (۳ؔ) کا
استدقاق اس امر سے حاصل ہو سکتا ہے کہ (۴) کا ایک تکملہ قابل تعین
ہے۔ طالب علم کے لئے اچھی مشق ہوگی کہ وہ اس بیان کی صداقت
قائم کرے۔ اس لئے اگر فا (لا، ما) مثبت ہو تو مسئلہ (۴) بہت مختصر
ہو جاتا ہے کیونکہ تکملوں (۳) اور (۳ؔ) سے قطع نظر کی جا سکتی ہے۔

نوٹ۔ دفعات ۲۷، ۳۷ کے مختلف مسائل کے جواز کے لئے جو شرائط
بیان کئے گئے ہیں وہ محض کافی ہیں ضروری نہیں۔ یہ بھی ہمیشہ یاد رکھنا
چاہئے کہ تفاعیل زیر بحث مسلسل فرض کئے گئے ہیں۔

۴۷۔ دیگر غیر واجب تکملے۔

جب متکمل غیر مسلسل تفاعل
ہو تو متغیر کی تبدیلی یا تکمل بالحصص سے بعض اوقات یہ عدم تسلسل دور
ہو سکیگا اور اوپر کے مسائل لگ سکینگے۔

مثلاً اگر ۰ < ن < ۱ تو دونوں قو^{-لا} لا^{ن-۱} اور قو^{-لا} لا^{ن-۱} لوک لا

غیر مسلسل ہیں جبکہ لا = ۰ اور $\frac{\text{و جا(ن)}}{\text{و ن}}$ معلوم کرنے کے لئے ہم

مسئلہ ۲ دفعہ ۲۷ سیدھا نہیں لگا سکتے۔ لیکن تکمل بالحصص سے جا(ن) = $\frac{\text{جا(ن+۱)}}{\text{ن}}$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{و جا(ن)}}{\text{و ن}} = -\frac{\text{جا(ن+۱)}}{\text{ن}^2} + \frac{1}{\text{ن}}\int_{0}^{\infty} \text{قو}^{-\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{لوک لا ورلا} = \int_{0}^{\infty} \text{قو}^{-\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{لوک لا ورلا}$$

(اور یہی تکملہ مسئلہ ۲ دفعہ ۲۷ کو سیدھا لگانے سے حاصل ہوگا (نیز ملاحظہ ہو مثال ۵ نیچے)
دفعہ ۶۹ کے مسئلوں کو ذیل کی تعریف کے زیر عمل

محدود حدود والے تکملہ کی صورت میں بھی توسیع دی جا سکتی ہے جس میں متکمل ایک حد پر لاانتہاہی ہو جائے۔

تعریف۔ اگر فا(لا، ما) مسلسل ہو سراسر وقفوں

$$\text{ا} < \text{لا} \leq \text{ب}،\ \text{اَ} \leq \text{ما} \leq \text{بَ}$$

میں لیکن لاانتہاہی ہو جائے لا = ا، ما = ما کے لئے تو تکملہ

$$\text{ف(ما)} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا(لا، ما) ڈلا} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

یکساں طور پر مستدق کہلاتا ہے سراسر وقفہ اَ ≤ ما ≤ بَ میں اگر ایک عدد لہ ایسا موجود ہو جو ما پر منحصر نہ ہو اور جبکہ ا < لا < ا + لہ تو

$$\left| \int_{\text{ا}}^{\text{لا}} \text{فا(لا، ما) ڈلا} \right| < \text{صہ} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

اگر فا(لا، ما) لاانتہاہی ہو جبکہ لا = ب، ما = ما تو (۲) کے جواب میں تکملہ کے حدود لا اور ب ہونگے ایسے کہ ب - لہ < لا < ب

طالب علم بآسانی ثابت کر سکیگا کہ مسئلہ ۱ دفعہ ۱، اور مسائل ۱، ۲ دفعہ ۲، (مناسب ترمیموں کے ساتھ) غیر واجب تکملہ (۱) کی صورت میں بھی جاری ہیں

ہم ذیل کی چند مثالوں کے ساتھ ختم کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ $\text{ا} = \int_{۰}^{\infty} \text{تو}^{-\text{ع}^۲} \text{ڈع} = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}$

متغیر ع کو لا میں ابدال ع = لا ما کے ذریعہ تبدیل کرو، تب

$$\text{ا} = \int_{۰}^{\infty} \text{تو}^{-\text{لا}^۲\text{ما}^۲}\ \text{ما ڈلا}$$

$\text{تو}^{-\text{ما}^۲}$ سے ضرب دو اور ما = ۰ سے ما = ∞ تک تکمل کرو، اس طرح

$$\text{ا}^۲ = \text{ا} \int_{۰}^{\infty} \text{تو}^{-\text{ما}^۲} \text{ڈما} = \int_{۰}^{\infty} \text{ڈما} \int_{۰}^{\infty} \text{تو}^{-(۱+\text{لا}^۲)\text{ما}^۲}\ \text{ما ڈلا}$$

تکمل کی ترتیب بدلنے سے

$$\text{ا}^{۲} = \int_{۰}^{\infty} \text{دلا} \int_{۰}^{\infty} \text{و}^{-(۱+\text{لا}^{۲})\text{ما}^{۲}}\ \text{ما دما} = \int_{۰}^{\infty} \frac{\text{دلا}}{۲(۱+\text{لا}^{۲})} = \frac{\pi}{۴}$$

$$\text{پس ا} = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}$$

یہ دیکھنے کے لئے کہ ہم تکمل کی ترتیب بدل سکتے ہیں، فرض کرو کہ

$$\text{ما و}^{-(۱+\text{لا}^{۲})\text{ما}^{۲}} = \text{فا(لا، ما)}$$

$$\text{اب} \int_{\text{ن}}^{\infty} \text{فا(لا، ما) دلا} = \text{و}^{-\text{ما}^{۲}} \int_{\text{ن}}^{\infty} \text{و}^{-\text{لا}^{۲}\text{ما}^{۲}}\ \text{ما دلا} = \text{و}^{-\text{ما}^{۲}} \int_{\text{ن ما}}^{\infty} \text{و}^{-\text{ی}^{۲}}\ \text{دی}$$

اگر $\text{ما} \geq \text{ر} > ۰$ تو [چونکہ $\int^{\infty} \text{و}^{-\text{ی}^{۲}}\ \text{دی}$ مستدق ہے] ہم صریحاً م دریافت کرسکتے ہیں جو ما پر منحصر نہ ہو اور جبکہ $\text{ن} > \text{م}$ تو

$$\left| \int_{\text{ن}}^{\infty} \text{فا(لا، ما) دلا} \right| < \text{ح}$$

اسلئے $\int^{\infty} \text{فا(لا، ما) دلا}$ یکساں طور پر مستدق ہے سعت $\text{ما} \geq \text{ر} > ۰$ کے لئے۔ یہ یکساں طور پر مستدق ہے بالعموم سعت $\text{ما} \geq ۰$ کے لئے اور زیادہ قوی وجوہات کی بناء پر اختیاری وقفہ (۰، ب) کے لئے۔ دفعہ ۳۳، مسئلہ ۳ کے اطلاق کے متعلق اور شرائط صریحاً پورے ہوتے ہیں۔ تکمل کی ترتیب کا بدلنا اس لئے جائز ہے۔

مثال ۲ ـ اگر $\text{ا} > ۰$، $\text{ج} > ۰$، $\text{ن} \geq ۱$ تو ثابت کرو کہ

$$\int_0^\infty \frac{\text{جم}\,۲\,\text{ج لا د لا}}{(\text{ا}^۲+\text{لا}^۲)^{\text{ن}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\text{جا}(\text{ن})}\int_0^\infty \text{قو}^{-(\text{ا}^۲\text{لا}^۲+\frac{\text{ج}^۲}{\text{لا}^۲})}\,\text{لا}^{۲\text{ن}-۲}\,\text{د لا}$$

$$\frac{\text{جا}(\text{ن})}{(\text{ا}^۲+\text{لا}^۲)^{\text{ن}}} = \int_0^\infty \text{قو}^{-(\text{ا}^۲+\text{لا}^۲)\text{ما}}\,\text{ما}^{\text{ن}-۱}\,\text{د ما}$$ (مثال ۱۷، مشق ۹)

جم ۲ ج لا کے ساتھ ضرب دو اور لا = ۰ سے لا = ∞ تک تکمل کرو اور مکرر تکملہ میں تکمل کی ترتیب بدلو۔ اس طرح

$$\text{جا}(\text{ن})\int_0^\infty \frac{\text{جم}\,۲\,\text{ج لا د لا}}{(\text{ا}^۲+\text{لا}^۲)^{\text{ن}}} = \int_0^\infty \text{قو}^{-\text{ا}^۲\text{ما}}\,\text{ما}^{\text{ن}-۱}\,\text{د ما}\int_0^\infty \text{قو}^{-\text{لا}^۲\text{ما}}\,\text{جم}\,۲\,\text{ج لا د لا}$$

$$= \sqrt{\pi}\int_0^\infty \text{قو}^{-(\text{ا}^۲\text{ما}+\frac{\text{ج}^۲}{\text{ما}})}\,\text{ما}^{\text{ن}-۱}\,\frac{\text{د ما}}{۲\sqrt{\text{ما}}}$$ [مثال ۵، دفعہ ۲۷]

$$= \sqrt{\pi}\int_0^\infty \text{قو}^{-(\text{ا}^۲\text{لا}^۲+\frac{\text{ج}^۲}{\text{لا}^۲})}\,\text{لا}^{۲\text{ن}-۲}\,\text{د لا}$$ ، ابدال $\text{ما} = \text{لا}^۲$ کی مدد سے۔

ابھی ہمیں یہ دیکھنا ہے کہ تکمل کی ترتیب کا بدلنا جائز ہے۔ متکمل کو فا(لا، ما) سے تعبیر کرو۔

$$\left|\int_{\text{ب}}^\infty \text{فا}(\text{لا}،\text{ما})\,\text{د لا}\right| = \text{ما}^{\text{ن}-۱}\,\text{قو}^{-\text{ا}^۲\text{ما}}\left|\int_{\text{ب}}^\infty \text{قو}^{-\text{لا}^۲\text{ما}}\,\text{جم}\,۲\,\text{ج لا د لا}\right| \le \text{ما}^{\text{ن}-۱}\,\text{قو}^{-\text{ا}^۲\text{ما}}\int_{\text{ب}}^\infty \text{قو}^{-\text{لا}^۲\text{ما}}\,\text{د لا}$$

اگر ر > ۰ تو تکملہ $\int_{\text{ب}}^\infty \text{قو}^{-\text{لا}^۲\text{ما}}\,\text{د لا}$ چھوٹا ہے ہر ایسے ما ≥ ر کے لئے جبکہ ب بڑا ہو۔ نیز $\text{ما}^{\text{ن}-۱}\,\text{قو}^{-\text{ا}^۲\text{ما}}$ محدود ہے ہر ما ≥ ر کے لئے۔ اسلئے $\int_0^\infty \text{فا}(\text{لا}،\text{ما})\,\text{د لا}$ یکساں طور پر مستدق ہے عام طور پر اختیاری وقفہ (۰، ب) کے اندر۔ اور یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ دفعہ ۳۷،

مسئلہ ۳ کے باقی شرائط پورے ہوتے ہیں، اس لئے تکمل کی ترتیب کا بدلنا جائز ہے۔

مثال ۳۔ اگر ا > ۰، ج > ۰، ن ≧ ۱ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جا}(\text{ن}) \int_{0}^{\infty} \text{و}^{-(\text{ا}\,\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ج}^{۲}}{\text{لا}^{۲}})}\, \text{لا}^{-۲\text{ن}-۲}\, \text{ورلا} = \sqrt{\pi}\; \text{و}^{-۲\text{ا}\text{ج}} \int_{0}^{\infty} \text{و}^{-۲\text{ا}\text{لا}} (۲\text{ج}+\text{لا})^{\text{ن}-۱}\, \text{لا}^{\text{ن}-۱}\, \text{ورلا}$$

لا کی بجائے $\frac{۱}{\text{لا}}$ رکھنے سے دائیں جانب کا رکن ہو جاتا ہے

$$\text{جا}(\text{ن}) \int_{0}^{\infty} \text{و}^{-(\text{ج}^{۲}\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ا}^{۲}}{\text{لا}^{۲}})}\, \frac{\text{ورلا}}{\text{لا}^{۲\text{ن}}}$$

اور مثال (۱) کی طرح $\frac{\text{جا}(\text{ن})}{\text{لا}^{۲\text{ن}}}$ کے لئے ایک تکملہ رکھنے سے یہ ہو جاتا ہے

$$\int_{0}^{\infty} \text{و}^{-(\text{ج}^{۲}\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ا}^{۲}}{\text{لا}^{۲}})}\, \text{ورلا} \int_{0}^{\infty} \text{و}^{-\text{لا}^{۲}\text{ما}}\, \text{ما}^{\text{ن}-۱}\, \text{وما}$$

$$= \int_{0}^{\infty} \text{ما}^{\text{ن}-۱}\, \text{وما} \int_{0}^{\infty} \text{و}^{-[(\text{ج}^{۲}+\text{ما})\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ا}^{۲}}{\text{لا}^{۲}}]}\, \text{ورلا}$$

$$= \sqrt{\pi} \int_{0}^{\infty} \text{و}^{-۲\text{ا}\sqrt{\text{ج}^{۲}+\text{ما}}}\, \text{ما}^{\text{ن}-۱} \frac{\text{وما}}{۲\sqrt{\text{ج}^{۲}+\text{ما}}} \qquad [\text{مثال ۶، دفعہ ۷۲}]$$

$$= \sqrt{\pi}\; \text{و}^{-۲\text{ا}\text{ج}} \int_{0}^{\infty} \text{و}^{-۲\text{ا}\text{لا}} (۲\text{ج}+\text{لا})^{\text{ن}-۱}\, \text{لا}^{\text{ن}-۱}\, \text{ورلا}$$

ابدال $\sqrt{\text{ج}^{۲}+\text{ما}} = \text{ج}+\text{لا}$ کی مدد سے

تکمل کی ترتیب بدلنے کے جواز پر ہم بحث نہیں کرتے لیکن اس کا ثبوت دفعہ ۳۷، مسئلہ ۴ نتیجہ صریح کے ذریعہ بآسانی حاصل ہو سکتا ہے۔

یہ مثال، مثال ۲ سے ملا کر ایک دلچسپ نتیجہ پیدا کرتی ہے۔

مثال ۴۔ اگر $\text{ع} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{فرلا}}{\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{لا}}$ اور $۰ < \text{ن} < ۱$ تو $\frac{\text{فرع}}{\text{فرن}}$ معلوم کرو۔

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرن}} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\text{لوک}(\text{جب لا})}{\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{لا}}\,\text{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۱)$$

بشرطیکہ تکملہ یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔
اب رکھو ما = جب لا، تو حاصل ہوگا

$$\int_{0}^{\text{لا}} \frac{-\text{لوک}(\text{جب لا})}{\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{لا}}\,\text{فرلا} = \int_{0}^{\text{جب لا}} \frac{-\text{لوک ما}}{\text{ما}^{\text{ن}}} \times \frac{\text{فرما}}{\sqrt{۱-\text{ما}^{۲}}}$$

$$< \frac{۱}{\text{جم لا}} \int_{0}^{\text{جب لا}} \frac{-\text{لوک ما}}{\text{ما}^{\text{ن}}}\,\text{فرما}$$

$$< \frac{۱}{\text{جم لا}} \left\{ \frac{\text{جب}^{۱-\text{ن}}\,\text{لا}}{(۱-\text{ن})^{۲}} - \frac{\text{جب}^{۱-\text{ن}}\,\text{لا}\;\text{لوک}(\text{جب لا})}{۱-\text{ن}} \right\}$$

چونکہ جب$^{۱-\text{ن}}$ لا لوک (جب لا)، لا کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے اس لئے صریحاً دفعہ ۴، کی تعریف کے شرائط پورے ہوتے ہیں اس لئے (۱) کا تکملہ یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے اور مساوات (۱) سے $\frac{\text{فرع}}{\text{فرن}}$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۵۔ $\text{جا}(\text{ن}) = \int_{0}^{\infty} \text{قو}^{-\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}\,\text{فرلا}$ کے مشتق معلوم کرو۔

اگر ن > ۱ تو دفعہ ۲، مسئلہ ۲ لگ سکتا ہے کیونکہ لا$^{\text{ن}-۱}$ (لوک لا)$^{\text{م}}$ صفر کی طرف استدقاق کرتا ہے لا کے ساتھ اگر ن ـ ۱ اور م مثبت ہوں (مثال ۱۰، مشق ۲، حصہ اول) اس انتہا کو ہم تفاعل کی قیمت مانتے ہیں جبکہ لا = ۰، اگر ن ≤ ۱ تو لکھو

$$\text{جا}(\text{ن}) = \int_{0}^{۱} \text{قو}^{-\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}\,\text{فرلا} + \int_{۱}^{\infty} \text{قو}^{-\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}\,\text{فرلا} = \text{ع} + \text{و} \quad (\text{لکھو})$$

ء کے مشتق معلوم کرو جیسے مثال ۴ میں، و کے مشتق اب بھی دفعہ ۲۷ مسئلہ ۲ کی مدد سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ اس طرح مجموعا $\frac{\text{فر}\,\text{ء}}{\text{فر}\,\text{ن}} + \frac{\text{فر}\,\text{و}}{\text{فر}\,\text{ن}}$، وغیرہ کو ایک تکملہ میں ملانے سے

$$\frac{\text{فر}\,\text{جا}(\text{ن})}{\text{فر}\,\text{ن}} = \int_0^\infty \text{و}^{-\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{لوک}\,\text{لا}\;\text{فر}\,\text{لا}$$

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{جا}(\text{ن})}{\text{فر}\,\text{ن}^2} = \int_0^\infty \text{و}^{-\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\,(\text{لوک}\,\text{لا})^2\,\text{فر}\,\text{لا}$$ ، وغیرہ۔

مشق ۱۹

ذیل کی معادلات ۱ تا ۲۰ کو قائم کرو

۱۔ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{لوک}\,(\text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{لا} + \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{لا})\,\text{فر}\,\text{لا} = \pi\,\text{لوک}\,\frac{\text{ا}+\text{ب}}{2}$، ا، ب > ۰۔

۲۔ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{لوک}\,(1+\text{جم}\,\text{ع}\,\text{جم}\,\text{لا})}{\text{جم}\,\text{لا}}\,\text{فر}\,\text{لا} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \text{ع}^2\right)$، ۰ ≤ ع < π

۳۔ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{لوک}\left(\frac{\text{ا}+\text{ب}\,\text{جب}\,\text{لا}}{\text{ا}-\text{ب}\,\text{جب}\,\text{لا}}\right)\frac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{جب}\,\text{لا}} = \pi\,\text{جب}^{-1}\left(\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right)$، ا > ب > ۰۔

۴۔ $\int_0^1 \frac{\text{لا}^{\text{ن}}-1}{\text{لوک}\,\text{لا}}\,\text{فر}\,\text{لا} = \text{لوک}\,(\text{ن}+1)$، ن > ۰۔

۵۔ $\int_0^\infty \frac{\text{مس}^{-1}(\text{ا}\,\text{لا})\,\text{فر}\,\text{لا}}{\text{لا}\,(1+\text{لا}^2)} = \frac{\pi}{2}\,\text{لوک}\,(1+\text{ا})$

۶۔ $\int_0^1 \frac{\text{مس}^{-1}(\text{ا}\,\text{لا})\,\text{فر}\,\text{لا}}{\text{لا}\sqrt{1-\text{لا}^2}} = \frac{\pi}{2}\,\text{لوک}\,(\text{ا}+\sqrt{1+\text{ا}^2})$

۷۔ $\int_0^\infty \text{لا}\,\text{و}^{-\text{ا}\,\text{لا}}\,\text{جم}\,\text{ب}\,\text{لا}\,\text{فر}\,\text{لا} = \frac{\text{ا}^2-\text{ب}^2}{(\text{ا}^2+\text{ب}^2)^2}$، ا > ۰۔

۸۔ $$\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{لا}^{ن}\,\text{لوک لا ور لا}}{۱+\text{لا}^{۲}} = \frac{\pi^{۲}}{۴}\,\text{قط}\,\frac{ن\pi}{۲}\,\text{مس}\,\frac{ن\pi}{۲}\text{، } ۱ > ن > ۱$$

۹۔ $$\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{قو}^{ن\text{لا}} + \text{قو}^{-ن\text{لا}}}{\text{قو}^{\text{لا}} - \text{قو}^{-\text{لا}}}\,\text{لا ور لا} = \frac{\pi^{۲}}{۴}\,\text{قط}^{۲}\,\frac{ن\pi}{۲}\text{، } -۱ < ن < ۱$$

۱۰۔ $$\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{جم الا} - \text{جم ب لا}}{\text{لا}^{۲}}\,\text{ور لا} = \frac{\pi}{۲}(\text{ب} - \text{ا})\text{، ا} > ۰\text{، ب} > ۰$$

۱۱۔ $$\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{لوک}(۱+\text{ا}^{۲}\text{لا}^{۲})}{۱+\text{لا}^{۲}}\,\text{ور لا} = \pi\,\text{لوک}\,(\text{ا}+۱)\text{، ا} \geqq ۰$$

۱۲۔ $$\int_{۰}^{\pi} \frac{\text{لوک}(۱+\text{ا جب}^{۲}\text{لا})}{\text{جب}^{۲}\text{لا}}\,\text{ور لا} = ۲\pi\left\{\sqrt{۱+\text{ا}} - ۱\right\}\text{، ا} > -۱$$

۱۳۔ $$\int_{۰}^{\infty} \text{لا}^{۲ن}\,\text{قو}^{-\text{ا لا}^{۲}}\,\text{ور لا} = \frac{\sqrt{\pi}}{۲} \times \frac{۱\times۳\times۵\times\cdots(۲ن-۱)}{۲^{ن}}\,\text{ا}^{-\frac{۲ن+۱}{۲}}$$

۱۴۔ $$\int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-\text{ا}^{۲}\text{لا}^{۲}}\,\text{جم ۲ب لا ور لا} = \frac{\sqrt{\pi}}{۲\text{ا}}\,\text{قو}^{-\frac{\text{ب}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}}$$

۱۵۔ $$\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{جم الا ور لا}}{(\text{ب}^{۲}+\text{لا}^{۲})^{۲}} = \frac{\pi}{۱\times۲^{۲}}\left(\frac{\text{ا}}{\text{ب}^{۲}} + \frac{۱}{\text{ب}^{۳}}\right)\text{قو}^{-\text{اب}}$$

۱۶۔ $$\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{جم الا ور لا}}{(\text{ب}^{۲}+\text{لا}^{۲})^{۳}} = \frac{\pi}{۱\times۲\times۲^{۳}}\left(\frac{\text{ا}^{۲}}{\text{ب}^{۳}} + \frac{۳\text{ا}}{\text{ب}^{۴}} + \frac{۳}{\text{ب}^{۵}}\right)\text{قو}^{-\text{اب}}$$

۱۷۔ $$\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{لا جب الا ور لا}}{(\text{ب}^{۲}+\text{لا}^{۲})^{۲}} = \frac{\pi}{۱\times۲^{۲}}\;\frac{\text{ا}}{\text{ب}}\;\text{قو}^{-\text{اب}}$$

۱۸۔ $$\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{لا جب الا ور لا}}{(\text{ب}^{۲}+\text{لا}^{۲})^{۳}} = \frac{\pi}{۱\times۲\times۲^{۳}}\left(\frac{\text{ا}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} + \frac{\text{ا}}{\text{ب}^{۳}}\right)\text{قو}^{-\text{اب}}$$

۱۹۔ $$\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{جب الا}}{(\text{ب}^{۲}+\text{لا}^{۲})^{۲}}\;\frac{\text{ور لا}}{\text{لا}} = \frac{\pi}{۲\text{ب}^{۴}}\left\{۱ - \frac{\text{اب}+۲}{۲}\,\text{قو}^{-\text{اب}}\right\}$$

۲۰ ـ $\int_{ب}^{\infty} قو^{-لا^۲} جب ۲ب لا \frac{فرلا}{لا} = \frac{\pi}{۲} \int_{0}^{ب} قو^{-لا^۲} فرلا$

۲۱ ـ تکملہ $\int_{0}^{\infty} \frac{لا^{ن-\frac{۱}{۲}} فرلا}{(ا+ب لا+ج لا^۲)^ن}$ کو ابدال $ما = ج لا + \frac{ا}{لا}$ کے ذریعہ تحویل کرو، ا، ب، ج سب مثبت ہیں اور ثابت کرو کہ تکملہ کی قیمت یہ ہے

$$\sqrt{\pi}\, جا(ن-\frac{۱}{۲}) \div ج^{\frac{۱}{۲}} \{ب+۲\sqrt{اج}\}^{ن-\frac{۱}{۲}} جا(ن)$$

۲۲ ـ اگر ع کی ہر مثبت قیمت کے لئے فہ(ع) اور اس کا مشتق فہَ(ع) مسلسل ہوں اور اگر فہ(ع) محدود اعداد م اور ن کی جانب مستدق ہو جبکہ ع بالترتیب لاتناہی اور صفر کی طرف مائل ہو تو ثابت کرو کہ

(۱) $\int_{0}^{\infty} فرلا \int_{ا}^{ب} فہَ(لا ما) فرما = \int_{ا}^{ب} فرما \int_{0}^{\infty} فہَ(لا ما) فرلا$

(۲) $\int_{0}^{\infty} \frac{فہ(ب لا) - فہ(ا لا)}{لا} فرلا = (م - ن) لوک \frac{ب}{ا}$

واضح ہو کہ فہَ(لا ما) حاصل ضرب لا ما کا تفاعل ہے۔ مسئلہ (۲) فرولینی کا مسئلہ کہلاتا ہے۔

۲۳ ـ ب > ا > ۰ ثابت کرو کہ

(۱) $\int_{0}^{\infty} \frac{مسں^{-۱}(ب لا) - مسں^{-۱}(ا لا)}{لا} فرلا = \frac{\pi}{۲} لوک \frac{ب}{ا}$

(۲) $\int_{0}^{\infty} \frac{مسر(ب لا) - مسر(ا لا)}{لا} فرلا = لوک \frac{ب}{ا}$

۲۴ ـ ذیل کے نتائج قائم کرو

(۱) $\int_{0}^{\infty} \left(\frac{قو^{-لا} - قو^{-۲لا}}{لا^۲} - \frac{قو^{-۲لا}}{لا} \right) فرلا = ۱ - لوک ۲$

(۲) $\int_{0}^{\infty}$ {(ن - ۱/۲) قو^-لا + (۱/لا + ۱/۲)(قو^-ن لا - قو^-۱/۲ لا)} ولا/لا

= (ن - ۱/۲) لوک ن - (ن - ۱/۲)

۲۵ - مثال ۲۵ مشق ۱۳ کے دوسرے تکملہ کو تفرق کرنے سے مثال ۲۶ مشق ۱۳ کی مساوات قائم کرو ۔

۲۶ - اگر جے. (لا) = ۱/π $\int_{0}^{\pi}$ جم (لا جم طہ) فرطہ تو ثابت کرو کہ (ب > ۰)

$\int_{0}^{\infty}$ قو^-ب لا جے. (لا) ولا = ۱/√(۱ + ب^۲)

جہاں جے. (لا) سے مراد ہے $J_0(x)$

۲۷ - اگر ۰ < م < ۱ تو ثابت کرو کہ

$\int_{0}^{\infty}$ جے. (لا) ولا / لا^(۱-م) = جا(م) جا(م/۲) جا((۱-م)/۲) جب م π / ۲ π^(۳/۲) ۲^م

۲۸ - اگر و = ۲ق/π $\int_{0}^{\infty}$ قو^(-کہ عہ^۲ ت) جب لا عہ / عہ وعہ تو ثابت کرو کہ

(۱) جف و / جف ت = کہ جف^۲ و / جف لا^۲ (۲) و = ق جبکہ ت = ۰، لا > ۰

۲۹ - اگر و = ۱/√π $\int_{-\infty}^{+\infty}$ ف (ء) قو^(-عہ^۲) وعہ جہاں ء = لا + ۲ عہ √(کہ ت) تو ثابت کرو کہ

(۱) جف و / جف ت = کہ جف^۲ و / جف لا^۲ (۲) و = ف (لا) جبکہ ت = ۰

[یہ دیکھا جائے کہ

$$\frac{\text{جف ف(ع)}}{\text{جف ت}} = \frac{\text{فر ف(ع)}}{\text{فر ع}} \cdot \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ت}} = \text{فَ(ع)} \frac{\text{عہ}}{\sqrt{\text{۲ ہا کہ ت}}}$$

$$\text{فً(ع)} = \frac{۱}{\sqrt{\text{۲ ہا کہ ت}}} \cdot \frac{\text{فرفَ(ع)}}{\text{فرعہ}}$$

اور فَ (ع) کو محدود مانو جبکہ $\text{ع} \to \pm \infty$

۳۰- اگر $\text{و} = \frac{۲}{\sqrt{\pi}} \int_{\cdot}^{\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{۲ ہا کہ ت}}}} \text{و}^{-\text{عہ}^۲}\,\text{فرعہ}$ تو ثابت کرو کہ

(۱) $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} = \text{کہ} \frac{\text{جف}^۲\text{و}}{\text{جف لا}^۲}$ (۲) $\underset{\text{ت} \to \cdot}{\text{نہا}}\ \text{و} = \text{ق}$، $\text{لا} > \cdot$

۳۱- اگر $\text{ع} = \int_{\cdot}^{\infty} \frac{\text{فرت}}{\sqrt{(\text{لا}+\text{ت})(\text{ما}+\text{ت})(\text{ی}+\text{ت})}}$ اور لا، ما، ی سب مثبت ہوں تو ثابت کرو کہ

(۱) $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}} = -\frac{۱}{\sqrt{\text{لا ما ی}}}$

(۲) $۲(\text{لا}-\text{ما})\frac{\text{جف}^۲\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$

(۳) $\text{لا}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \text{ما}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} + \text{ی}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}} = -\frac{۱}{۲}\text{ع}$

۳۲- اگر $\text{ع} = \int_{\cdot}^{\infty} \text{و}^{-\text{لا}^۲} \text{جم}\left(\frac{\text{ر}^۲}{\text{لا}^۲}\right) \text{فرلا}$، $\text{و} = \int_{\cdot}^{\infty} \text{و}^{-\text{لا}^۲} \text{جب}\left(\frac{\text{ر}^۲}{\text{لا}^۲}\right) \text{فرلا}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر}^۲\text{ع}}{\text{فرر}^۲} = ۴\,\text{و}$، $\frac{\text{فر}^۲\text{و}}{\text{فرر}^۲} = -۴\,\text{ع}$

اور پھر ثابت کرو کہ

$$ع = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}\ \text{قو}^{-ا/\sqrt{۲}}\ \text{جم}(ا/\sqrt{۲})\text{، } و = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}\ \text{قو}^{-ا/\sqrt{۲}}\ \text{جب}(ا/\sqrt{۲})$$

۳۳- ثابت کرو کہ $\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{لا جب ۲ا لا فرلا}}{\text{لا}^{۴}+۱} = \int_{۰}^{\infty} \text{لا جب ۲ا لا فرلا} \int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-\text{لا}^{۲}\text{ما}}\ \text{جب ما فرما}$

اور پھر تکمل کی ترتیب بدلنے اور مثال ۳۲ کو استعمال کرنے سے ثابت کرو کہ

تکملہ کی قیمت $\frac{۱}{۲}\ \pi\ \text{قو}^{-ا\sqrt{۲}}\ \text{جب}(ا\sqrt{۲})$ ہے۔

ذیل کے نتائج حاصل کرو

(۱) $\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{جم ۲ا لا فرلا}}{\text{لا}^{۴}+۱} = \frac{\pi}{۲}\ \text{قو}^{-ا\sqrt{۲}}\ \text{جب}\left(ا\sqrt{۲} + \frac{\pi}{۴}\right)$

(۲) $\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{لا}^{۲}\ \text{جم ۲ا لا فرلا}}{\text{لا}^{۴}+۱} = \frac{\pi}{۲}\ \text{قو}^{-ا\sqrt{۲}}\ \text{جم}\left(ا\sqrt{۲} + \frac{\pi}{۴}\right)$

(۳) $\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{لا}^{۳}\ \text{جب ۲ا لا فرلا}}{\text{لا}^{۴}+۱} = \frac{\pi}{۲}\ \text{قو}^{-ا\sqrt{۲}}\ \text{جم}\left(ا\sqrt{۲}\right)$ ۔

۳۴- دفعہ ۲، مثال ۷، مساوات ۱۰ سے ذیل کے نتائج حاصل کرو

(۱) $\int_{-\infty}^{\infty} \text{جم}(ا\,\text{لا}^{۲} + ۲\text{ب لا})\ \text{فرلا} = \sqrt{\frac{\pi}{۲ا}}\left\{\text{جم}\left(\frac{\text{ب}^{۲}}{ا}\right) + \text{جب}\left(\frac{\text{ب}^{۲}}{ا}\right)\right\}$

(۲) $\int_{-\infty}^{\infty} \text{جب}(ا\,\text{لا}^{۲} + ۲\text{ب لا})\ \text{فرلا} = \sqrt{\frac{\pi}{۲ا}}\left\{\text{جم}\left(\frac{\text{ب}^{۲}}{ا}\right) - \text{جب}\left(\frac{\text{ب}^{۲}}{ا}\right)\right\}$

(۳) $\int_{۰}^{\infty} \text{جم}(ا\,\text{لا}^{۲})\ \text{جم ۲ب لا فرلا} = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{۲ا}}\left\{\text{جم}\left(\frac{\text{ب}^{۲}}{ا}\right) + \text{جب}\left(\frac{\text{ب}^{۲}}{ا}\right)\right\}$

(۴) $\int_{۰}^{\infty} \text{جب}(ا\,\text{لا}^{۲})\ \text{جم ۲ب لا فرلا} = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{۲ا}}\left\{\text{جم}\left(\frac{\text{ب}^{۲}}{ا}\right) - \text{جب}\left(\frac{\text{ب}^{۲}}{ا}\right)\right\}$

۳۵- اگر ل > ۰، ل + م + ن < ۰، ۱ > ن > ۰ ۔ تو ثابت کرو کہ

$$\int_{\text{ب}}^{\infty}\frac{\text{درما}}{(\text{۱}+\text{ما})^{\text{مس}+\text{۱}}\,\text{ما}^{\text{نہ}}}\int_{\text{ب}}^{\text{۱}}\text{لا}^{\text{نہ}-\text{۱}}(\text{۱}+\text{لاما})^{\text{مس}}\,\text{درلا}=\frac{\pi}{\text{جب نہ}\pi}\cdot\frac{\text{جا(لہ)جا(لہ+مس+نہ)}}{\text{جا(لہ+مس+۱)جا(لہ+مس)}}$$

[ستشلو ملش]

۳۶ - اگر م > ۰، ن > ۰ تو ثابت کرو کہ

(۱)
$$\int_{\text{ب}}^{\infty}\text{قو}^{-\text{ن ما}}\,\text{درما}\int_{\text{ب}}^{\infty}\frac{\text{جم}^{\text{م}}\text{لا جب لاما}}{\text{لا}}\,\text{درلا}=\int_{\text{ب}}^{\infty}\frac{\text{جم}^{\text{م}}\text{لا}}{\text{لا}}\,\text{درلا}\int_{\text{ب}}^{\infty}\text{قو}^{-\text{ن ما}}\,\text{جب لاما درما}$$

(۲)
$$\int_{\text{ب}}^{\infty}\text{قو}^{-\text{ن ما}}\,\text{درما}\int_{\text{ب}}^{\infty}\frac{\text{جب}^{\text{م}}\text{لا جم لاما}}{\text{لا}}\,\text{درلا}=\int_{\text{ب}}^{\infty}\frac{\text{جب}^{\text{م}}\text{لا}}{\text{لا}}\,\text{درلا}\int_{\text{ب}}^{\infty}\text{قو}^{-\text{ن ما}}\,\text{جم لاما درما}$$

اور مثال ۴ دفعہ ۲۷ کے تکملوں کی قیمتیں حاصل کرو۔

۳۷ - منحنی $\text{ما}=\text{جا(لا)}=\int_{\text{ب}}^{\infty}\text{قو}^{-\text{ع}}\,\text{ع}^{\text{لا}-\text{۱}}\,\text{درع}$ کو مرتسم کرو۔ ثابت کرو کہ اسکی اقل قیمت ہے لا = ۱ اور لا = ۲ کے درمیان اور یہ محور لا کی طرف ہمیشہ محدب ہے۔

۳۸ - ثابت کرو کہ

$$\int_{\text{ب}}^{\infty}\text{جم لا درلا}\int_{\text{ب}}^{\infty}\text{قو}^{-\text{ما لا}}\,\text{درما}=\int_{\text{ب}}^{\infty}\text{درما}\int_{\text{ب}}^{\infty}\text{قو}^{-\text{ما لا}}\,\text{جم لا درلا}$$

اس تکملہ سے اور جم لا کی بجائے جب لا رکھنے سے جو متناظر تکملے حاصل ہوتے ہیں دفعہ ۲۷ مثال (۹) کے تکملے حاصل کرو۔ [لگاؤ دفعہ ۲۰ مسئلہ ۴]

باب دہم

فوریر کے سلسلے

۷۵ - فوریر کے سلسلے۔ فرض کرو کہ سعت $-\pi \leqq \text{لا} \leqq \pi$ کے لئے تفاعل ف (لا) ذیل کے لامتناہی سلسلہ سے تعبیر ہوسکتا ہے

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{ا}_{\cdot} + \sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \text{ا}_{\text{ن}}\ \text{جم ن لا} + \sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \text{ب}_{\text{ن}}\ \text{جب ن لا} \quad \dots\dots (1)$$

نیز یہ بھی مان لو کہ ف (لا) کا تکملہ اس سلسلہ کو رقم بر رقم تکمل کرنے سے حاصل ہوسکتا ہے۔ ایسی صورت میں سروں $\text{ا}_{\cdot}$، $\text{ا}_{\text{ن}}$، $\text{ب}_{\text{ن}}$ کو بطور محدود تکملوں کے بیان کرنا ممکن ہے۔

سب سے پہلے یہ قابل توجہ ہے کہ ذیل کے دونوں تکملے (م، ن مثبت صحیح ہیں)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{جم م لا جم ن لا د لا}، \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \text{جب م لا جب ن لا د لا}$$

صفر ہوتے ہیں اگر م، ن غیر مساوی ہوں لیکن ان میں سے ہر ایک π کے مساوی ہے

اگر م = ن۔ نیز تکملہ $\int_{-\pi}^{\pi} \text{جم م لا جب ن لا د لا}$ ہمیشہ صفر ہوتا ہے۔ یہ نتائج جیوب اور جیوب التمام کے حاصل ضربوں کو بطور حاصل جمع اور حاصل تفریق کے بیان کرنے کے باسانی ثابت ہوسکتے ہیں۔

اب مساوات (۱) کے ہر رکن کو $-\pi$ سے π تک تکمل کرو، سلسلہ کا ہر تکملہ سوائے پہلے کے صفر ہوتا ہے اور ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$\int_{-\pi}^{\pi}$ ف (لا) ؍لا = ۲ π ا یعنی ا = $\frac{1}{2\pi}$ $\int_{-\pi}^{\pi}$ ف (لا) ؍لا ..... (۲)

اب ن کی کوئی قیمت منتخب کرو، (۱) کے ہر رکن کو جم ن لا سے ضرب دو (جبکہ ن کی منتخبہ قیمت ہو) اور − π سے π تک تکمل کرو، سلسلہ کا ہر تکملہ صفر ہوتا ہے سوائے اُس رقم کے تکملہ کے جس کے اندر جم ن لا شامل ہوتا ہے۔ اس طرح ہمیں ملتا ہے

$\int_{-\pi}^{\pi}$ ف (لا) جم ن لا ؍لا = ا$_{ن}$ $\int_{-\pi}^{\pi}$ جم^{2} ن لا ؍لا

ا$_{ن}$ = $\frac{1}{\pi}$ $\int_{-\pi}^{\pi}$ ف (لا) جم ن لا ؍لا .... (۳)

اور آخر الامر اسی طرح جب ن لا کے ساتھ ضرب دینے سے

ب$_{ن}$ = $\frac{1}{\pi}$ $\int_{-\pi}^{\pi}$ ف (لا) جب ن لا ؍لا .... (۴)

اگر (۳) اور (۴) میں ہم فرض کریں کہ ن کو ترتیب وار قیمتیں ۱، ۲، ۳، ..... دی گئی ہیں تو ہمیں سب سر ا$_{۱}$، ا$_{۲}$ ..... ب$_{۱}$، ب$_{۲}$.....

حاصل ہو جائینگے اور سلسلہ (۱) پورے طور پر معیّن ہو جائیگا۔

سلسلہ (۱) کو فوریئے یا فوریر کا سلسلہ کہتے ہیں اور یہ مشاہدہ طلب ہے کہ سلسلۂ لا کا دوری تفاعل ہے جس کا دور ۲ π ہے۔ اسلئے اگر ف (لا) دوری تفاعل نہ ہو جس کا دور ۲ π ہو تو یہ ناممکن ہوگا کہ سلسلہ (۱)، ف (لا) کو سعت (− π، π) سے باہر تعبیر کر سکے، دراصل موجودہ بحث میں سعت (− π، π) کے باہر تفاعل ف (لا) کی نوعیت سے ہمیں سروکار نہیں اور تفاعل کی سعت کے متعلق اس قید کو طالب علم ہمیشہ پیش نظر رکھے۔ دریافت کرنے کے طریقہ کی توضیح کے لئے اس جگہ ہم ایک دو مثالیں حل کرینگے، ان سے یہ بھی معلوم ہوگا کہ ہمارا یہ مفروضہ کہ تفاعل فوریئے کے

سلسلہ سے تعبیر ہو سکتا ہے پورے دور کے لئے بھی ہمیشہ درست نہیں۔

مثال ا۔ $\text{ف}(\text{لا}) = \text{لا}$

تھوڑے تکمل سے ظاہر ہے کہ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{لا}\,\text{د لا} = ۰ \text{ ، } \int_{-\pi}^{\pi} \text{لا جم ن لا د لا} = ۰ \text{ ، اسلئے}$$

$$\text{ا}_۰ = ۰ \text{ ، } \text{ا}_\text{ن} = ۰ \text{ ، ن کی ہر قیمت کے لئے۔}$$

نیز $\int_{-\pi}^{\pi} \text{لا جب ن لا د لا} = -\frac{۲\pi \text{ جم ن}\pi}{\text{ن}}$ ، جس سے $\text{ب}_\text{ن} = -۲\frac{\text{جم ن}\pi}{\text{ن}}$

پس سلسلہ ہے

$$\text{لا} = ۲\left(\frac{\text{جب لا}}{۱} - \frac{\text{جب ۲لا}}{۲} + \frac{\text{جب ۳لا}}{۳} - \frac{\text{جب ۴}\pi}{۴} + \dots\dots\right)$$

یہ دیکھا جائے کہ $\text{ف}(\pi) = \pi$ ، $\text{ف}(-\pi) = -\pi$ ، لیکن جب $\text{لا} = \pm\pi$ تو سلسلہ کی قیمت صفر ہے پس سلسلہ تفاعل کو تعبیر نہیں کرتا جبکہ $\text{لا} = \pi$ اور جبکہ $\text{لا} = -\pi$ ۔ نیز یہ بھی قابل توجہ ہے کہ سلسلہ کا استدقاق مشروط ہے۔

مثال ۲۔ $\text{ف}(\text{لا}) = \text{لا}^۲$

اس صورت میں ہمیں ملتا ہے

$$\text{ا}_۰ = \frac{\pi^۲}{۳} \text{ ، } \text{ا}_\text{ن} = \frac{۴\text{ جم ن}\pi}{\text{ن}^۲} \text{ ، } \text{ب}_\text{ن} = ۰$$

$$\text{لا}^۲ = \frac{\pi^۲}{۳} - ۴\left(\frac{\text{جم لا}}{۱^۲} - \frac{\text{جم ۲لا}}{۲^۲} + \frac{\text{جم ۳لا}}{۳^۲} - \frac{\text{جم ۴لا}}{۴^۲} + \dots\dots\right)$$

دونوں صورتوں میں جبکہ $\text{لا} = \pi$ اور $\text{لا} = -\pi$ سلسلہ کی قیمت ہے

[دیکھو مثال ۲۲ (۲) مشق ۱۳]

$$\frac{\pi^۲}{۳} + ۴\left(\frac{۱}{۱^۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \dots\right) = \frac{\pi^۲}{۳} + ۴\frac{\pi^۲}{۶} = \pi^۲$$

پس اس صورت میں سلسلہ تفاعل کو تعبیر کرتا ہے دونوں صورتوں میں جبکہ $\text{لا} = \pi$ اور $\text{لا} = -\pi$۔ یہ دیکھا جائے کہ سلسلہ سعت $-\pi \leqq \text{لا} \leqq \pi$ کے اندر مسلسل تفاعل ہے (مسئلہ ۳ دفعہ ۴۲)۔ سلسلہ لا کی ہر قیمت کے لئے مسلسل ہے لیکن سعت $(-\pi، \pi)$ کے باہر لا^2 کو تعبیر نہیں کرتا۔ مثلاً $\text{لا} = \pi$ سے $\text{لا} = 3\pi$ تک یہ $(\text{لا} - 2\pi)^2$ کو تعبیر کرتا ہے۔

مثال ۳۔ $\text{ف}(\text{لا}) = 0$، $\text{لا} = -\pi$ سے $\text{لا} = 0$ تک اور $\text{ف}(\text{لا}) = 1$، $\text{لا} = 0$ سے $\text{لا} = \pi$ تک۔

تفاعل ف(لا) ایک محدود عدم تسلسل رکھتا ہے $\text{لا} = 0$ کے لئے دفعہ (۶۳)۔ سلسلہ کی کیا قیمت ہوگی جبکہ $\text{لا} = 0$، پورے معائنہ سے پیشتر یہ کسی طور پر صاف ظاہر نہیں ہے کہ اسکی کوئی معین قیمت ہوگی۔

$$\text{ا} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{ف}(\text{لا})\,\text{دلا} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\,\text{دلا} + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 1\,\text{دلا} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ا}_{\text{ن}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{ف}(\text{لا})\,\text{جم ن لا}\,\text{دلا} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\,\text{دلا} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\,\text{جم ن لا}\,\text{دلا} = 0$$

$$\text{ب}_{\text{ن}} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\,\text{جب ن لا}\,\text{دلا} = \frac{1 - \text{جم ن}\pi}{\text{ن}\pi}$$

اس لئے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف}(\text{لا}) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\text{جب لا}}{1} + \frac{\text{جب ۳لا}}{3} + \frac{\text{جب ۵لا}}{5} + \cdots\cdots\right)$$

اب ہم دیکھتے ہیں کہ جب $\text{لا} = 0$ تو سلسلہ $\frac{1}{2}$ کے مساوی ہے۔ جب $\text{لا} = \pi$ تو سلسلہ $\frac{1}{2}$ کے برابر ہے لیکن $\text{ف}(\pi) = 1$، اور جب $\text{لا} = -\pi$ تو سلسلہ $\frac{1}{2}$ کے مساوی ہے لیکن $\text{ف}(-\pi) = 0$

۷۶۔ **مسئلہ کا بیان کرنا**۔ دفعہ بالا کا عمل اس مفروضہ پر مبنی ہے کہ کسی تفاعل کو فوریئے کے سلسلے سے تعبیر کرنا ممکن ہے، لیکن یہ مفروضہ آسانی سے

قبول نہیں کرلیا جا سکتا۔ دراصل ایک مدت سے یہ دیکھ لیا گیا ہے کہ یہ نا مستحکم ہے۔ اس مفروضہ کے جواز کو ثابت کرنے کا سب سے آسان طریقہ یہ ہے کہ ہم یہ دکھا دیں کہ جیسے ن لاانتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے سلسلہ (۱) کی پہلی (۲ ن + ۱) رقموں کا مجموعہ $س_{ن+۱}$ جبکہ اس کے سر (۲)، (۳)، (۴) کی رو سے دریافت کرلئے جائیں فی الحقیقت قیمت ف (لا) کی طرف مستدق ہوتا ہے۔
زیادہ وضاحت کی خاطر گزشتہ دفعہ کی مساواتوں (۲)، (۳)، (۴) میں تکمل کے متغیر کو ع فرض کرو اور فرض کرو کہ $س_{۲ن+۱}$ سے ذیل کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے۔

$$س_{۲ن+۱} = ا + \sum_{ر=۱}^{ر=ن} (ا_{ن} \text{ جم } ن لا + ب_{ن} \text{ جب } ن لا)$$

یہ مجموعہ اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے

$$س_{۲ن+۱} = \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{۱}{۲} + \sum_{ر=۱}^{ر=ن} \text{جم } ر(ع - لا) \right\} ف(ع) \, د ع \quad \ldots (۱)$$

یا خطوط وحدانی کے اندر کے سلسلہ کو جمع کرنے سے

$$س_{۲ن+۱} = \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ف(ع) \frac{\text{جب}(۲ن+۱)\frac{ع-لا}{۲}}{۲ \text{ جب } \frac{ع-لا}{۲}} \, د ع$$

فرض کرو کہ ع - لا = ۲ و، ہمیں حاصل ہوگا

$$س_{۲ن+۱} = \frac{۱}{\pi} \int_{-\frac{\pi+لا}{۲}}^{\frac{\pi-لا}{۲}} ف(لا + ۲ و) \frac{\text{جب}(۲ن+۱) و}{\text{جب } و} \, د و \quad \ldots\ldots (۲)$$

آخرالامر تکمل کی وسعت کو ان حصوں میں تقسیم کرو $[-\frac{۱}{۲}(\pi+لا), ۰]$ اور $[۰, \frac{۱}{۲}(\pi-لا)]$،

اسطرح سے دو تکملے حاصل ہوتے ہیں، پہلے میں و کی بجائے ۔ و رکھو۔ اس طرح $ب_{۲ن+۱}$ کے لئے ذیل کے دو تکملے حاصل ہوتے ہیں

$$ب_{۲ن+۱} = \frac{۱}{\pi} \int^{\frac{\pi - لا}{۲}} ف(لا + ۲و) \frac{جب(۲ن+۱)و}{جب و} دو$$

$$+ \frac{۱}{\pi} \int^{\frac{\pi + لا}{۲}} ف(لا - ۲و) \frac{جب(۲ن+۱)و}{جب و} دو \ldots (۳)$$

اب ف (لا) پر جو قیود ہیں انہیں ہم بیان کرتے ہیں۔ یہ محض کافی ہیں ضروری نہیں۔

تفاعل پر قیود۔ (۱) تفاعل کو محدود ہونا چاہئیے جس کی عددی قیمتوں کی اوپر کی حد مثلاً ع ہو (۲) بالعموم اسے مسلسل ہونا چاہئیے لیکن اسمیں محدود تعداد محدود عدم تسلسلوں کی ہو سکتی ہے جن کی دفعہ ۶۳ میں توضیح کی گئی ہے (۳) اسکی موڑ کی قیمتوں کی تعداد محدود ہونی چاہئیے (مثلاً تفاعل ایسا جب $\frac{۱}{لا}$ نہیں ہو سکتا)

اگر عا کوئی چھوٹا مگر ثابت مثبت عدد ہو تو وقفہ (ج ۔ عا، ج + عا) کو ہم ج کی پڑوس یا قرب کہینگے۔ اکثر قیمت ج (دفعہ ۵، حصۂ اول) کی بجائے ہم نقطہ ج کہینگے۔

ترقیم ف (لا ± ۰) کو اکثر استعمال کیا جائیگا (دفعہ ۴۴ حصۂ اول، دفعہ ۱۳)۔

اب سوال ہمارے سامنے یہ ہے۔ ہمیں یہ دکھانا چاہئیے کہ جب، ن لاتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے تو $ب_{۲ن+۱}$ قیمت

$$\frac{۱}{۲} \{ ف(لا + ۰) + ف(لا - ۰) \}$$

کیطرف مائل ہوتا ہے اگر لا، ± π کے مساوی نہ ہو اور

$$\frac{۱}{۲} \{ ف(- \pi + ۰) + ف(\pi - ۰) \}$$

کی طرف مائل ہوتا ہے اگر لا $-\pi$ یا π کے مساوی ہو نیز اگر لا کسی نقطہ غیر تسلسل کے قرب میں نہ ہو تو استدقاق یکساں ہوتا ہے۔

جب ف (لا) مسلسل ہو تو $س_{ن+1}$ ، ف (لا) کی طرف مستدق ہوتا ہے کیونکہ اس صورت میں ف (لا+٠) = ف (لا) = ف (لا-٠)، اگر ج نقطہ عدم تسلسل ہو تو $س_{ن+1}$ قیمت $\frac{1}{2}$ {ف (ج+٠) + ف (ج-٠)} کی طرف مائل ہوتا ہے۔ اگر ف (π) اور ف ($-\pi$) مساوی نہ ہوں تو نقاط π اور $-\pi$ کو نقاط عدم تسلسل میں شمار کرنا چاہئے۔

۷۷۔ ڈیرشلے کا تکملہ۔ ذیل کے تکملہ پر غور کرو، اسے **ڈیرشلے کا تکملہ** کہتے ہیں

$$\int_{0}^{ب} فہ(و) \text{ جب } م و \, د و \quad .... (1)$$

جہاں م کوئی مثبت عدد ہے صحیح یا کسور اور فہ (و) اُن شرائط کو پورا کرتا ہے جنکی دفعہ گذشتہ میں ف (لا) کی صورت میں تخصیص کی گئی ہے، حدود ۰، ب میں اور تفاعل فہ (و) میں متبدل لا شریک ہو سکتا ہے، مثلاً فہ (و)، ف (لا + ۲ و) ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ و کی قیمتیں $ل_1$، $ل_2$، .... $ل_پ$ تعداد میں پ ایسی ہیں جنکے جواب میں فہ (و) کی یا تو موڑ کی قیمت ہے یا یہ غیر مسلسل ہے، اور فرض کرو کہ | فہ (و) | کم ہے عدد ع سے۔

تفاعل فہ (و) ہر وقفہ (۰، $ل_1$)، ($ل_1$، $ل_2$)، .... میں یکرنگ ہے اس لئے قیمتوں $ل_1$، $ل_2$، .... $ل_پ$ سے جو تکملہ (۱)، (پ + ۱) تکملوں میں تقسیم ہو جاتا ہے انمیں سے ہر ایک تکملہ پر اوسط قیمت کا دوسرا مسئلہ لگ سکتا ہے۔

اب $\int_{ر_ر}^{ر_{ر+1}} \text{فا(و) جب م و د و} = \text{فا}(ر_ر)\int_{ر_ر}^{\text{ضا}}\text{جب م و د و} + \text{فا}(ر_{ر+1})\int_{\text{ضا}}^{ر_{ر+1}}\text{جب م و د و}$

$$= \text{فا}(ر_ر)\frac{\text{جم م}\,ر_ر - \text{جم م ضا}}{\text{م}} + \text{فا}(ر_{ر+1})\frac{\text{جم م ضا} - \text{جم م}\,ر_{ر+1}}{\text{م}}$$

اسلئے $\left|\int_{ر_ر}^{ر_{ر+1}} \text{فا(و) جب م و د و}\right| \leq \frac{2}{\text{م}}\left|\text{فا}(ر_ر)\right| + \frac{2}{\text{م}}\left|\text{فا}(ر_{ر+1})\right| < \frac{4\text{ع}}{\text{م}}$

اور $\left|\int_{ر}^{ب} \text{فا(و) جب م و د و}\right| < \frac{4(\text{پ}+1)\text{ع}}{\text{م}}$ ......(۲)

مقادیر پ، ع متبدل لا پر منحصر نہیں ہیں اسلئے جب، م لامتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے تو تکملہ (۱) یکساں طور پر صفر کی طرف مائل ہوتا ہے۔

نوٹ۔ اگر پ، لا پر منحصر ہو تو بھی ہم تسلیم کر سکتے ہیں کہ اسکی قیمت کی محدود اوپر کی حد ہے جو لا پر منحصر نہیں۔

اسی طرح سے دکھایا جا سکتا ہے کہ تکملہ

$$\int_{ر}^{ب} \text{فا(و) جم م و د و} \qquad \text{......(۳)}$$

یکساں طور پر صفر کی طرف مائل ہوتا ہے جیسے م لامتناہی ہو۔

اب فرض کرو کہ $ب > ر > 0$ یعنی قیمتیں ر، ب مثبت ہیں۔ ہم ثابت کرینگے کہ تکملہ

$$\int_{ر}^{ب} \text{فا(و)}\,\frac{\text{جب م و}}{\text{و}}\,\text{د و} \qquad \text{......(۴)}$$

یکساں طور پر صفر کی طرف مائل ہوتا ہے جبکہ م لامتناہی کی طرف جاتا ہے۔

$$\int_{ر_ر}^{ر_{ر+1}} \text{فا(و)}\frac{\text{جب م و}}{\text{و}}\,\text{د و} = \text{فا}(ر_ر)\int_{ر_ر}^{\text{ضا}}\frac{\text{جب م و}}{\text{و}}\,\text{د و} + \text{فا}(ر_{ر+1})\int_{\text{ضا}}^{ر_{ر+1}}\frac{\text{جب م و}}{\text{و}}\,\text{د و}$$

$$= فہا(ر) \int_{م ر}^{م ضا} \frac{جب\, ی}{ی}\, ور + فہا(ر+۱) \int_{م ضا}^{م ر+۱} \frac{جب\, ی}{ی}\, ور$$

لیکن ر، ضا، ر+۱ سب مثبت ہیں اور تکملہ $\int_{م}^{\infty} \frac{جب\, ی}{ی}\, ور$ مستدق ہے، اسلئے

ہم م اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ ہر ایسے م کے لئے جو مد سے بڑا ہو بائیں ہاتھ کے دونوں تکملوں میں سے ہر ایک، ایک دی ہوئی چھوٹی اختیاری مثبت مقدار صد سے کم ہو۔ اسی طریق سے جیسے لا تساوی (۲) حاصل کی گئی تھی ہم دیکھتے ہیں کہ ہر ایسے م کے لئے جو مد سے بڑا ہو

$$\left| \int_{ا}^{ب} فہا(و) \frac{جب\, م\, و}{و}\, ور \right| < ۲(پ+۱)\, ع\, صد$$

پس تکملہ (۴) مستدق ہوتا ہے جیسے بیان ہوا۔ صریحاً یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے اگر $> ب > ا$ ۔

اس تحقیق کا ایک خاص نتیجہ یہ ہے کہ ن $\to \infty$ کے لئے فوریے سلسلہ کے سروں $ا_ن$، $ب_ن$ کی انتہا صفر ہوتی ہے کیونکہ ان سروں کی صورت وہی ہے جو اوپر بحث میں آنے والے تکملوں کی ہے۔ لیکن $ا_ن$، $ب_ن$ کی چھٹائی کا رتبہ بالعموم $\frac{۱}{ن}$ ہوگا جیسا لا تساوی (۲) سے ظاہر ہے، پس اگر سلسلہ مستدق ہو بھی تو یہ استدقاق بالعموم شرطیہ ہوگا۔

۸۷۔ سلسلوں کا جمع کرنا۔ مساوات (۳) دفعہ ۸۶ کا پہلا تکملہ لو، اس میں ۲ن + ۱ کی بجائے م رکھو اور شکل کو اس شکل میں لکھو

$$ف(لا+۲و) \frac{و}{جب\, و} \times \frac{جب\, م\, و}{و} = فا(لا، و) \frac{جب\, م\, و}{و}$$

یعنی $فا(لا، و) = ف(لا+۲و) \frac{و}{جب\, و}$ ، $فا(لا، ۰) = ف(لا+۰)$

اگر د کوئی عدد ایسا ہو کہ $۰ < \text{د} < \frac{۱}{۲}(\pi - \text{لا})$ تو

$$\int_{\text{ب}}^{\frac{\pi-\text{لا}}{۲}} \text{ف}(\text{لا}+۲\text{و})\,\frac{\text{جب}\,\text{م}\,\text{و}}{\text{جب}\,\text{و}}\,\text{د}\text{و} = \int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{فا}(\text{لا}',\text{و})\,\frac{\text{جب}\,\text{م}\,\text{و}}{\text{و}}\,\text{د}\text{و} + \int_{\text{د}}^{\frac{\pi-\text{لا}}{۲}} \text{فا}(\text{لا}',\text{و})\,\frac{\text{جب}\,\text{م}\,\text{و}}{\text{و}}\,\text{د}\text{و} \quad \text{.......}(۱)$$

اگر لا' - π کے مساوی نہ ہو تو (۱) کا موخر الذکر تکملہ اُن شرائط کو پورا کرتا ہے جو دفعہ بالا کے تکملہ (۴) پر عائد کئے گئے ہیں۔ اسلئے

$$\underset{\text{م}\to\infty}{\text{نہا}} \int_{\text{د}}^{\frac{\pi-\text{لا}}{۲}} \text{فا}(\text{لا}',\text{و})\,\frac{\text{جب}\,\text{م}\,\text{و}}{\text{و}}\,\text{د}\text{و} = ۰ \quad \text{.......}(۲)$$

اور تکملہ یکساں طور پر صفر کی طرف متدق ہوتا ہے۔ پس

$$\underset{\text{م}\to\infty}{\text{نہا}} \int_{\text{ب}}^{\frac{\pi-\text{لا}}{۲}} \text{ف}(\text{لا}+۲\text{و})\,\frac{\text{جب}\,\text{م}\,\text{و}}{\text{جب}\,\text{و}}\,\text{د}\text{و} = \underset{\text{م}\to\infty}{\text{نہا}} \int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{فا}(\text{لا}',\text{و})\,\frac{\text{جب}\,\text{م}\,\text{و}}{\text{و}}\,\text{د}\text{و} \quad \text{.......}(۳)$$

اسکے بعد فرض کرو کہ د بہت چھوٹا ہے۔ تب ہم یہ مان سکتے ہیں کہ فا(لا'، و) یکرنگ ہے (ملاحظہ ہو دفعہ ۸۲ کا ختم) جیسے و صفر سے د تک بڑھتا ہے اور اسلئے اوسط قیمت کے مسئلہ کی رو سے حاصل ہوتا ہے

$$\int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{فا}(\text{لا}',\text{و})\,\frac{\text{جب}\,\text{م}\,\text{و}}{\text{و}}\,\text{د}\text{و}$$

$$= \text{فا}(\text{لا}',۰)\int_{\text{ب}}^{\text{د}} \frac{\text{جب}\,\text{م}\,\text{و}}{\text{و}}\,\text{د}\text{و} + [\text{فا}(\text{لا}',\text{د}) - \text{فا}(\text{لا}',۰)]\int_{\text{ضہا}}^{\text{د}} \frac{\text{جب}\,\text{م}\,\text{و}}{\text{و}}\,\text{د}\text{و}$$

یا م و کی بجائے ی اور [فا(لا'، د) - فا(لا'، ۰)] کی بجائے سا(لا'، د) رکھنے سے

$$\int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{فا}(\text{لا}',\text{و})\,\frac{\text{جب}\,\text{م}\,\text{و}}{\text{و}}\,\text{د}\text{و} = \text{ف}(\text{لا}+۰)\int_{\text{ب}}^{\text{م}\,\text{د}} \frac{\text{جب}\,\text{ی}}{\text{ی}}\,\text{د}\text{ی} + \text{سا}(\text{لا}',\text{د})\int_{\text{م}\,\text{ضہا}}^{\text{م}\,\text{د}} \frac{\text{جب}\,\text{ی}}{\text{ی}}\,\text{د}\text{ی} \quad \text{.......}(۴)$$

جہاں فا(لا'، ۰) کی بجائے ف(لا + ۰) لکھا گیا ہے۔

اب فرض کرو کہ لا کسی نقطہ عدم تسلسل کی پڑوس میں نہیں ہے، ایسا ہونے کی صورت دفعہ ۹۷ میں بحث میں لائی جائیگی۔ ہم ا کو اتنا چھوٹا لے سکتے ہیں کہ ہر لا زیر بحث کے لئے اسا (لا ، ا) اتنا چھوٹا ہو جتنا ہم چاہیں۔ جب چھٹائی کے درجہ مطلوبہ کے موافق ا کا انتخاب کرلیا جائے تو ہم م کو اسقدر بڑا لیکن محدود لے سکتے ہیں کہ تکملہ

$$\int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \frac{\text{جب}\ \text{م} ؤ}{ؤ}\ \text{د}ؤ$$

اپنی انتہا $\frac{\pi}{2}$ سے اس قدر کم متفاوت ہو جسقدر ہم چاہیں اور ساتھ ہی تکملہ (۲) صفر سے اتنا کم متفاوت ہو جتنا ہم چاہیں۔ اب چونکہ (۴) میں اسا (لا ، ا) کا ہر یقیناً محدود ہے (π سے بڑا نہیں) اسلئے م کو ہم اتنا بڑا لے سکتے ہیں کہ (۴) کے بائیں جانب کا رکن $\frac{1}{2}$ π ف (لا + ۰) سے اتنا کم متفاوت ہو جتنا ہم چاہیں خواہ لا کی کچھ ہی قیمت ہو (البتہ سوائے اُن قیمتوں کے جو خارج کردی گئی ہیں) ہمیں بالآخر یہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{نہا}_{\text{م}\to\infty} \int_{\text{ب}}^{\frac{\pi-\text{لا}}{2}} \text{ف}(\text{لا}+2\text{و}) \frac{\text{جب}\ \text{م}\ \text{و}}{\text{جب}\ \text{و}}\ \text{د}\text{و} = \frac{\pi}{2}\ \text{ف}(\text{لا}+0) \quad \ldots\ldots(5)$$

ٹھیک اسی طرح کے عمل سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر لا ، π کے مساوی نہ ہو اور نہ ہی یہ نقطہ عدم تسلسل کی پڑوس میں ہو تو

$$\text{نہا}_{\text{م}\to\infty} \int_{\text{ب}}^{\frac{\pi+\text{لا}}{2}} \text{ف}(\text{لا}-2\text{و}) \frac{\text{جب}\ \text{م}\ \text{و}}{\text{جب}\ \text{و}}\ \text{د}\text{و} = \frac{\pi}{2}\ \text{ف}(\text{لا}-0) \quad \ldots\ldots(6)$$

اور اسلئے

$$\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty}\ \text{س}_{2\text{ن}+1} = \frac{1}{2}\{\text{ف}(\text{لا}+0) + \text{ف}(\text{لا}-0)\} \quad \ldots\ldots(7)$$

جہاں انتہا کی طرف استدقاق یکساں ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ مساوات (۳) کی رُو سے لا کی کسی دی ہوئی قیمت

کے لئے $س_{۲ن+۱}$ کی انتہا اس قیمت کے پڑوس میں صرف ف (لا) کے رویہ پر منحصر ہے

$س_{۲ن+۱}$ کی انتہا کا فیصلہ اس صورت میں جبکہ لا = π یا لا = −π بآسانی ہوسکتا ہے۔ اگر لا = π تو (۳) دفعہ ۶۷ سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$س_{۲ن+۱} = \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi} ف(\pi - ۲و)\frac{جب(۲ن+۱)و}{جب و}\,د و$$

$$= \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\left\{ف(\pi-۲و)+ف(-\pi+۲و)\right\}\frac{جب(۲ن+۱)و}{جب و}\,د و$$

سمت (۰، π) کو حصوں (۰، $\frac{\pi}{۲}$)، ($\frac{\pi}{۲}$، π) میں تقسیم کرنے سے اور حدود ($\frac{\pi}{۲}$، π) والے تکملہ میں و کی بجائے π − و رکھنے سے۔

ن = ∞ کے لئے انتہا ٹھیک پہلے کی طرح معلوم ہوتی ہے اور وہ ہے

$$\frac{۱}{۲}\left\{ف(\pi-۰)+ف(-\pi+۰)\right\}$$

اور یہی قیمت حاصل ہوتی ہے جبکہ لا = −π

۷۹۔ عدم تسلسل اب فرض کرو کہ لا ایک نقطہ عدم تسلسل کی پڑوس میں ہے۔ نیز فرض کرو کہ شکل ۲۴ دفعہ ۶۳، ف (لا) کے گراف کو تعبیر کرتی ہے جہاں و ع = ج

ا ع = ع م = ع۱ اور و ا ≧ لا ≧ و ع۔ اگر لا = و ک تو معین ف (لا) اور ف (لا + ۲ و)، ع ص کی مقابل جانبوں میں واقع ہونگے جب تک کہ ۲ و کم نہ ہو ک ع سے، پس تفاعل س (لا، و)

چھوٹا نہیں ہو سکتا جب تک کہ ا کم نہ ہو $\frac{۱}{۲}$ ک ع سے۔ اب اگر لا قیمت
میں بہت قریب ہو ج کے یعنی اگر ک ع بہت چھوٹا ہو تو ا کی قیمت
ایسی ل سکتی ہے جو |سا (لا، ا)| کو چھوٹا بنا دے اور پھر م کی قیمت ایسی
حاصل ہو سکتی ہے جو تکملہ (۳) دفعہ ۸۷ کو چھوٹا بنا دے اور (۴) دفعہ ۸۷ میں
ف (لا+۰) کا سر $\frac{\pi}{۲}$ سے اتنا کم متفاوت ہو جتنا ہم چاہیں۔ لیکن اگر
لا کو ج کے اور بھی زیادہ قریب لیا جائے تو ا کی مطلوبہ قیمت
بتدریج کم ہوتی جاتی ہے اور م کی مطلوبہ قیمت بڑھتی جاتی ہے جس کی وجہ سے
استدقاق نہایت سست ہوتا جاتا ہے۔ لا کی کسی معینہ قیمت کے لئے
استدقاق کا وجود ضرور ہے مگر ایسا عدد م ملنا ممکن نہیں کہ جب مً > م
تو فرق

$$\left| \int_{ا}^{\frac{\pi - لا}{۲}} ف(لا+۲و)\,\frac{جب\ م و}{جب\ و}\, د و - \frac{\pi}{۲}\, ف(لا+۰) \right|$$

دئے ہوئے صد سے کم ہو وقفہ (ج − عا، ج) میں لا کی ہر قیمت
کے لئے۔ دوسرے الفاظ میں استدقاق یکساں نہیں رہتا جبکہ لا ج کے
قریب آتا ہے۔

جب، لا وقفہ (ج − عا، ج) کے درمیان واقع ہو تو تکملہ (۶) دفعہ ۸۷
کا استدقاق یکساں ہوتا ہے۔ برعکس اسکے جب، لا وقفہ (ج، ج + عا)
کے درمیان ہو تو تکملہ (۶) ہے جو غیر یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔
جب، لا = ج تو کوئی خصوصیت نہیں پیدا ہوتی اور

$س_{۲ن+۱}$، $\frac{۱}{۲}$ {ف (ج+۰) + ف (ج−۰)} کیطرف مستدق ہوتا ہے۔
نقطہ عدم تسلسل پر سلسلہ کی قیمت دفعہ ۷۵، امثلہ ۱ تا ۳ میں دکھائی گئی ہے۔

۸۰۔ مبدأ اور دور کی تبدیلی۔ یہاں تک لا کی سعت
$-\pi$ سے π رہی ہے لیکن اسی خوش اسلوبی سے سعت ۰ تا ۲π لیجا سکتی ہے۔

ترسیمی نقطہ نظر سے سعت کی یہ تبدیلی مبدأ کو (−π، ۰) پر لیجانے کے معادل ہے اور تحلیلی نقطہ نظر سے لا کی بجائے ہم لا − π رکھتے ہیں۔ اگر ف (لا − π) کو فا (لا) سے تعبیر کریں تو سروں کی قیمتیں یہ معلوم ہوتی ہیں

$$\text{ا} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \text{فا(لا) ولا} \;\ldots\ldots(1) \qquad \text{ا}_{\text{ن}} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} \text{فا(لا) جم ن لا ولا} \;\ldots(2)$$

$$\text{ب}_{\text{ن}} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} \text{فا(لا) جب ن لا ولا} \;\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

سلسلہ کی قیمت جبکہ ہر دو لا = ۰ اور لا = ۲π یہ ہے

$$\frac{1}{2}\left\{\text{فا}(0) + \text{فا}(2\pi)\right\}$$

نیز دور کوئی عدد معینہ لیا جا سکتا ہے مثلاً ۲ د، ہمیں لا کی بجائے صرف $\frac{\pi\,\text{لا}}{\text{د}}$ رکھ دینا ہے۔ اگر ف $\left(\frac{\pi\,\text{لا}}{\text{د}}\right)$ کی بجائے فا (لا) رکھیں تو سروں کے لئے ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$\text{ا}_{\text{ن}} = \frac{1}{\text{د}}\int_{-\text{د}}^{\text{د}} \text{فا(لا) جم} \frac{\text{ن}\,\pi\,\text{لا}}{\text{د}}\,\text{ولا} \;\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\text{ا}_{\text{ن}} = \frac{1}{\text{د}}\int_{0}^{2\text{د}} \text{فا(لا) جم} \frac{\text{ن}\,\pi\,\text{لا}}{\text{د}}\,\text{ولا} \;\ldots\ldots\ldots\ldots(4\text{ا})$$

اور ا اور بن کی مماثل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ ضابطہ (۴) میں سعت (−د، د) مضمر ہے اور (۴ا) سعت (۰، ۲د) کے لئے زیادہ موزوں ہے۔

اِن ضابطوں کو حفظ یاد کرنے کی ضرورت نہیں۔ عملی صورتوں میں مناسب زاویہ ن لا یا $\frac{\text{ن}\,\pi\,\text{لا}}{\text{د}}$ کی جیب یا جیب التمام سے ضرب دیکر مناسب سعت پر تکمل کرنا کافی ہوگا۔

۱۸۔ جیب کے سلسلے اور جیب التمام کے سلسلے۔ فرض کرو کہ دفعہ ۷۵ کا

ف (لا) طاق تفاعل ہے یعنی ف (-لا) = - ف (لا) اس صورت میں

$\int_{-\pi}^{\pi}$ ف (لا) جم ن لا ولا = $\int_{0}^{\pi}$ ف (لا) جم ن لا ولا + $\int_{0}^{\pi}$ ف (-لا) جم ن لا ولا = ۰

پس $ا_۰$ = ۰ نیز $ا_ن$ = ۰ لیکن $ب_ن$ کے لئے حاصل ہوتا ہے

$ب_ن$ = $\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}$ ف (لا) جب ن لا ولا - $\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}$ ف (-لا) جب ن لا ولا

= $\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}$ ف (لا) جب ن لا ولا ...... (۱)

پس ف (لا) کے لئے جیب کا سلسلہ حاصل ہوتا ہے

ف (لا) = $\sum_{ن=1}^{\infty}$ $ب_ن$ جب ن لا .... (۲)

جہاں $ب_ن$ (۱) سے ملتا ہے۔ سلسلہ صفر ہوتا ہے جبکہ لا = ۰ اور لا = π اس لئے ان قیمتوں کے لئے یہ تفاعل کو تعبیر نہیں کرتا جب تک کہ ف (۰) اور ف (π) صفر نہ ہوں۔

بخلاف اس کے فرض کرو کہ ف (لا) جفت تفاعل ہے یعنی ف (-لا) = ف (لا) اس صورت میں $ب_ن$ = ۰ اور

$ا_۰$ = $\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}$ ف (لا) ولا ....(۳)، $ا_ن$ = $\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}$ ف (لا) جم ن لا ولا

...... (۴)

اس طرح ف (لا) کے لئے جیب التمام سلسلہ حاصل ہوتا ہے

ف (لا) = $ا_۰$ + $\sum_{ن=1}^{\infty}$ $ا_ن$ جم ن لا .... (۵)

جہاں $ا_۰$، $ا_ن$ (۳) اور (۴) سے ملتے ہیں۔

جیب التمام سلسلۂ تفاعل کو دونوں صورتوں میں تعبیر کرتا ہے جبکہ لا = ۰ اور لا = π کیونکہ

$$\frac{1}{2}\{ف(۰+) + ف(۰-)\} = \frac{1}{2}\{ف(۰+) + ف(۰+)\} = ف(۰)$$

$$\frac{1}{2}\{ف(π-۰) + ف(-π+۰)\} = \frac{1}{2}\{ف(π-۰) + ف(π-۰)\} = ف(π)$$

یہ دیکھنا آسان ہے کہ اوپر کے ضابطے (۱) . . . (۵) کیا ہو جاتے ہیں جبکہ دور ۲ا ہو۔

۸۲۔ عام امور کا ذکر۔ جب لا کی سعت پورا دور ۲π یا ۲ا ہو تو ف (لا) کے لئے فوریئر کا سلسلہ صرف ایک ہی ہوگا جہاں اُن، بُن گزشتہ دفعات کے بموجب حاصل ہوتے ہیں۔ صورت حال اور ہو جاتی ہے جبکہ لا کی وسعت پورے دور کا صرف کوئی حصہ ہو۔ فرض کرو کہ ف (لا) دیا گیا ہے سعت (۰، π) کے لئے، تب ایک ایسا تفاعل مثلاً فا (لا) حاصل کرنے کے لئے جو پورے دور کے لئے معلوم ہو ہم کوئی تفاعل فہ (لا) سعت (-π، ۰) کے لئے ایسا انتخاب کر سکتے ہیں کہ فا (لا) = فہ (لا) سعت لا = -π تا لا = ۰ کے لئے لیکن فا (لا) = ف (لا) سعت لا = ۰ سے لا = π تک اب صرف ایک سلسلہ ہے جو فا (لا) کو تعبیر کریگا، یہ سلسلہ فہ (لا) کو تعبیر کریگا سعت (-π، ۰) میں اور ف (لا) کو سعت (۰، π) میں لیکن سر دونوں تفاعلوں فہ (لا) اور ف (لا) پر منحصر ہونگے۔ پس دور کے ایک حصہ پر تفاعل کو تعبیر کرنے کے لئے ہم سلسلوں کی کوئی سی تعداد حاصل کر سکتے ہیں لیکن صرف جیب اور جیب التمام کے سلسلے عملی نقطہ نظر سے ضروری ہیں۔ اِن دونوں صورتوں میں ف (لا)، سعت (۰، π) کے لئے معلوم ہے اور تفاعل فہ (لا)

[$-π \leq$ لا ≤ ۰] کی تعیین بالترتیب مساواتوں

فہ (لا) = - ف (|لا|)، فہ (لا) = ف (|لا|) سے ہوتی ہے۔
فوریئر کا سلسلہ بالعموم یکساں طور پر مستدق ثابت کیا گیا ہے،

مسئلہ ا دفعہ ۷۹ کی تھوڑی سی توسیع سے ہم دکھا سکتے ہیں کہ تفاعل کا تکملہ سلسلہ کو رقم برقم تکمل کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔ لیکن عام طور پر تفاعل کا مشتق ہم سلسلہ کو رقم برقم تفرق کرنے سے حاصل نہیں کرتے۔ سلسلہ کے تفرق کے موضوع پر [Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society Vol 12] کے ایک مضمون کا حوالہ دیا جاتا ہے۔

ایک اور امر کا یہاں ذکر کر دیا جائے۔ اگر ف (لا) موڑ کی قیمت کے نزدیک ہو تو ثبوت دفعہ ۸۰ بلحاظ یکساں استدقاق ناقابل اطلاق معلوم دیگا۔ مگر یہ مشکل باسانی رفع ہو سکتی ہے، فرض کرو کہ ف (ج) مثلاً قیمت اعظم ہے، تو اُن دو متصل اقل قیمتوں کے درمیان جن کے بیچ میں ف (ج) واقع ہوتی ہے ہم ف (لا) کو اس شکل فا (لا) + سا (لا) میں رکھ سکتے ہیں جہاں

فا (لا) = ف (لا)، سا (لا) = ۰ جبکہ لا ≤ ج

فا (لا) = ف (ج)، سا (لا) = ف (لا) - ف (ج) جبکہ لا ≥ ج

صریحاً فا (لا) گھٹنے والا تفاعل نہیں ہے اور سا (لا) بڑھنے والا تفاعل نہیں ہے پس اوسط قیمت کا مسئلہ ہر صورت میں لگ سکتا ہے۔ پس موڑ کی قیمتوں کی وہی نوعیت ہے جو تفاعل کی عام قیمتوں کی (ملاحظہ ہو اوپر کی دفعہ جس کا ابھی حوالہ دیا گیا)۔

۸۳ — مثالیں۔ اب ہم چند مثالیں حل کرینگے۔ نقاط عدم تسلسل کے لئے طالب علم ہمیشہ سلسلہ کی قیمتوں کی خاص جانچ کرے۔

مثال ا۔ ف (لا) کے لئے جیب کا سلسلہ دریافت کرو جبکہ

ف (لا) = لا، لا = ۰ سے لا = $\frac{\pi}{2}$ تک اور ف (لا) = π - لا، لا = $\frac{\pi}{2}$ سے لا = π تک۔

ف (لا) کی ترسیم ایک ٹوٹا خط مستقیم ہے۔ بن حاصل کرنیکے لئے

$$\frac{\pi}{2} ب_ن = \int_0^{\frac{\pi}{2}} لا\ جب\ ن\ لا\ د\ لا + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - لا)\ جب\ ن\ لا\ د\ لا = \frac{2}{ن^2}\ جب\ \frac{ن\pi}{2}$$

$$اسلئے\ ف(لا) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{جب\ لا}{1^2} - \frac{جب\ 3لا}{3^2} + \frac{جب\ 5لا}{5^2} - \frac{جب\ 7لا}{7^2} + \ldots\right)$$

طالب علم سلسلہ کی پہلی چند رقمیں مرتسم کرے مثلاً پہلی چار اور دیکھے کہ تقرب کی نوعیت ایک شکستہ خط ہے۔

ہر لا کے لئے سلسلہ ایک سلسل تفاعل ہے۔

مثال ۲۔ مثال ا کے تفاعل کے لئے جیب التمام سلسلہ حاصل کرو۔

اس صورت میں $ا. = \frac{\pi}{۴}$ ، $ا_ن = \frac{۴ \text{ جم } \frac{ن\pi}{۲} (ا - \text{جم } \frac{ن\pi}{۲})}{ن^۲ \pi}$

اور $ف(لا) = \frac{\pi}{۴} - \frac{۸}{\pi} \left(\frac{\text{جم } ۲ لا}{۲^۲} + \frac{\text{جم } ۶ لا}{۶^۲} + \frac{\text{جم } ۱۰ لا}{۱۰^۲} + \cdots \cdots \right)$

ہر لا کے لئے سلسلہ ایک سلسل تفاعل ہے۔

مثال ۳۔ تفاعل $ف(لا) = ا$ کے لئے (۱) جیب کا سلسلہ (۲) جیب التمام کا سلسلہ دریافت کرو۔

$$(۱) \quad ف(لا) = \frac{۴}{\pi} \left(\frac{\text{جب } لا}{ا} + \frac{\text{جب } ۳ لا}{۳} + \frac{\text{جب } ۵ لا}{۵} + \cdots \cdots \right)$$

$$(۲) \quad ف(لا) = ا$$

طالب علم اسکی توجیہ کرے کہ جیب التمام کا سلسلہ صرف رقم مطلق میں آکے تحویل کیوں ہو جاتا ہے۔ (۱) میں جواز کی سعت $. < لا < \pi$ ہے۔

مثال ۴۔ $ف(لا)$ کے لئے ایک جیب کا سلسلہ دریافت کرو جبکہ $ف(لا) = لا$ ، $لا = .$ سے $لا = ما$ تک اور $ف(لا) = ما$ ، $لا = ما$ سے $لا = \pi - ما$ تک اور $ف(لا) = \pi - لا$ ، $لا = \pi - ما$ سے $لا = \pi$ تک

$$\frac{\pi}{۲} \text{ب}_ن = \int_{.}^{ما} لا \text{ جب } ن لا \, د لا + \int_{ما}^{\pi - ما} ما \text{ جب } ن لا \, د لا$$

$$+ \int_{\pi - ما}^{\pi} (\pi - لا) \text{ جب } ن لا \, د لا$$

$$\text{ب}_ن = ۲ (ا - \text{جم } ن\pi) \text{ جب } ن ما / ن^۲ \pi$$

$$\text{ف}(\text{لا}) = \frac{۴}{\pi}\left(\frac{\text{جب لا جب ما}}{۱} + \frac{\text{جب ۳لا جب ۳ما}}{۳^۲} + \frac{\text{جب ۵لا جب ۵ما}}{۵^۲} + \ldots\right)$$

مثال ۵۔ $\text{ل لا} - \text{لا}^۲$ کے لئے لا = ۰ سے لا = ل تک جیب التمام کا سلسلہ دریافت کرو۔

اس صورت میں سلسلہ کی شکل یہ ہے

$$\text{ل لا} - \text{لا}^۲ = \text{ا}_۰ + \sum \text{ا}_\text{ن} \;\text{جم}\, \frac{\text{ن}\,\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}$$

۰ سے ل تک تکمل کرو، تب $\text{ا}_۰ = \frac{\text{ل}^۲}{۶}$

$\text{جم}\,\frac{\text{ن}\,\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}$ کے ساتھ ضرب دو اور ۰ سے ل تک تکمل کرو، تب

$$\text{ا}_\text{ن} = -۲(۱ + \text{جم ن}\,\pi)\,\text{ل}^۲/\text{ن}^۲\pi^۲$$

اس لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ل لا} - \text{لا}^۲ = \frac{\text{ل}^۲}{۶} - \frac{۴\,\text{ل}^۲}{\pi^۲}\left(\frac{۱}{۲^۲}\,\text{جم}\,\frac{۲\pi\,\text{لا}}{\text{ل}} + \frac{۱}{۴^۲}\,\text{جم}\,\frac{۴\pi\,\text{لا}}{\text{ل}} + \ldots\right)$$

یہ پھیلاؤ جائز ہے $۰ \leqq \text{لا} \leqq \text{ل}$ کے لئے۔ سعت $-\text{ل} \leqq \text{لا} \leqq ۰$ کے لئے سلسلہ $-\text{ل لا} - \text{لا}^۲$ کو تعبیر کرتا ہے۔

رکھو ل = ۲ج اور ہر رکن سے $\text{ج}^۲$ تفریق کرو۔ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$(\text{ج} - \text{لا})^۲ = \frac{\text{ج}^۲}{۳} + \frac{۴\,\text{ج}^۲}{\pi^۲}\left(\text{جم}\,\frac{\pi\,\text{لا}}{\text{ج}} + \frac{۱}{۲^۲}\,\text{جم}\,\frac{۲\pi\,\text{لا}}{\text{ج}} + \frac{۱}{۳^۲}\,\text{جم}\,\frac{۳\pi\,\text{لا}}{\text{ج}} + \ldots\right)$$

جائز ہے $۰ \leqq \text{لا} \leqq ۲\text{ج}$ کے لئے۔

۴۸۔ چند معیاری سلسلے۔ اب ہم چند مشہور پھیلاؤ حاصل کرینگے، انہیں بالعموم بلا واسطہ اعمال سے ثابت کیا جاتا ہے تاہم مضمون زیر بحث کی

ان سے دلچسپ توضیح ہوتی ہے۔

مثال ۱۔ جم پ لا کے لئے ایک جیب التام سلسلہ حاصل کرو جہاں پ نہ تو صفر ہے اور نہ ہی یہ صحیح عدد ہے۔

$$\text{ا}_{0} = \frac{\text{جب پ}\pi}{\text{پ}\pi} ، \quad \text{ا}_{\text{ن}} = (-1)^{\text{ن}-1} \frac{2\,\text{پ جب پ}\pi}{(\text{ن}^2-\text{پ}^2)\pi}$$

$$\text{جم پ لا} = \frac{\text{جب پ}\pi}{\text{پ}\pi} + \frac{2\,\text{پ جب پ}\pi}{\pi} \sum_{\text{ن}=1}^{\infty} (-1)^{\text{ن}-1} \frac{\text{جم ن لا}}{\text{ن}^2-\text{پ}^2} \quad \ldots\ldots(1)$$

یہ پھیلاؤ درست ہے۔ $-\pi \leq \text{لا} \leq \pi$ کے لئے، لیکن چونکہ جم پ لا جفت تفاعل ہے، اس لئے یہ پھیلاؤ وسعت $-\pi \leq \text{لا} \leq \pi$ کے لئے بھی جائز ہے
(۱) میں رکھو لا = ۰، اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\pi}{\text{جب پ}\pi} = \frac{1}{\text{پ}} + \sum_{\text{ن}=1}^{\infty} (-1)^{\text{ن}-1} \frac{2\,\text{پ}}{\text{ن}^2-\text{پ}^2}$$

$$= \sum_{\text{ن}=0}^{\infty} (-1)^{\text{ن}} \left(\frac{1}{\text{ن}+\text{پ}} + \frac{1}{\text{ن}+1-\text{پ}}\right) \quad \ldots\ldots(2)$$

(۲) میں پ π کی بجائے ی رکھو، تب ی صفر نہیں ہے اور نہ ہی یہ π کا ضعف ہے۔ اس طرح

$$\frac{1}{\text{جب ی}} = \frac{1}{\text{ی}} + \sum_{\text{ن}=1}^{\infty} (-1)^{\text{ن}-1} \frac{2\,\text{ی}}{\text{ن}^2\pi^2-\text{ی}^2}$$

$$= \sum_{\text{ن}=0}^{\infty} (-1)^{\text{ن}} \left(\frac{1}{\text{ن}\pi+\text{ی}} + \frac{1}{(\text{ن}+1)\pi-\text{ی}}\right) \quad \ldots\ldots(3)$$

(۳) میں رکھو ی کی بجائے $\frac{\pi}{2} - \text{ی}$، تب اگر ی، $\frac{\pi}{2}$ کا طاق ضعف نہ ہو تو ملیگا

$$\frac{1}{\text{جم ی}} = 4 \sum_{\text{ن}=1}^{\infty} (-1)^{\text{ن}-1} \frac{(2\text{ن}-1)\pi}{(2\text{ن}-1)^2\pi^2-4\text{ی}^2} \quad \ldots\ldots(4)$$

پھر (۱) میں رکھو لا = π اور حاصل ہوگا

$$\pi\,\text{همپ}\,\pi = \frac{1}{\text{پ}} - \sum_{\text{ن}=1}^{\infty}\frac{2\text{پ}}{\text{ن}^2-\text{پ}^2} = \sum_{\text{ن}=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\text{ن}+\text{پ}} - \frac{1}{\text{ن}+1-\text{پ}}\right)\cdots(5)$$

(۵) میں رکھو پ π = ی، اگر ی نہ صفر ہو اور نہ π کا ضعف ہو تو

$$\text{همی} = \frac{1}{\text{ی}} - \sum_{\text{ن}=1}^{\infty}\frac{2\text{ی}}{\text{ن}^2\pi^2-\text{ی}^2} = \sum_{\text{ن}=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\text{ن}\pi+\text{ی}} - \frac{1}{(\text{ن}+1)\pi-\text{ی}}\right\}\cdots(6)$$

(۶) میں ی کے لئے $\frac{\pi}{2}$ − ی رکھو، تب اگر ی، $\frac{\pi}{2}$ کا طاق ضعف نہ ہو تو

$$\text{مس ی} = \sum_{\text{ن}=0}^{\infty}\left\{\frac{2}{(2\text{ن}+1)\pi-2\text{ی}} - \frac{2}{(2\text{ن}+1)\pi+2\text{ی}}\right\}\cdots(7)$$

اب (۶) کو اس شکل میں لکھو

$$\text{همی} - \frac{1}{\text{ی}} = -\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}}\frac{2\text{ی}}{\text{ر}^2\pi^2-\text{ی}^2} - \text{ق}_{\text{ن}}،\quad \text{ق}_{\text{ن}} = \sum_{\text{ر}=\text{ن}+1}\frac{2\text{ی}}{\text{ر}^2\pi^2-\text{ی}^2}$$

ی = ۰ کے لئے $(\text{همی} - \frac{1}{\text{ی}})$ کی انتہا صفر ہے، اس لئے ی = ۰ سے ی = لا < π تک ہم تکمل کر سکتے ہیں، اس لئے

$$\text{لوک}\,\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}}\text{لوک}\left(1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ر}^2\pi^2}\right) - \int_0^{\text{لا}}\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{وی}\cdots(8)$$

لیکن $\text{ر}^2\pi^2 - \text{ی}^2 > (\text{ر}-1)\,\text{ر}\,\pi^2$، پس

$$\text{ق}_{\text{ن}} < \frac{2\text{ی}}{\pi^2}\left\{\frac{1}{\text{ن}(\text{ن}+1)} + \frac{1}{(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)} + \cdots\right\} < \frac{2\text{ی}}{\text{ن}\pi^2}$$

اور $\int_0^{\text{لا}}\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{وی} < \frac{\text{لا}^2}{\text{ن}\pi^2} = \frac{\text{ط}\,\text{لا}^2}{\text{ن}\pi^2}،\ 1 > \text{ط} > 0$

اب ہم (۷) کو اس شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$\text{لوک}\ \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \text{لوک}\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{ر}^2 \pi^2}\right) + \text{لوک قو}^{-\frac{\text{طہ لا}^2}{2\text{ن}\pi^2}}$$

اور لوکارثموں سے عددوں کی طرف گذرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب لا} = \text{لا}\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{2^2\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{ن}^2\pi^2}\right)\text{قو}^{\frac{\text{طہ لا}^2}{2\text{ن}\pi^2}} \cdots (8)$$

جب ن لاتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے تو جزو ضربی $\text{قو}^{\frac{\text{طہ لا}^2}{2\text{ن}\pi^2}}$ ایک کی طرف مستدق ہوتا ہے۔

اس طور پر ہمیں جب لا کے لئے لاتناہی حاصل ضرب حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب لا} = \text{لا}\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{3^2\pi^2}\right) \ldots (9)$$

اسی طرح (۷) سے جم لا کے لئے لاتناہی حاصل ضرب حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم لا} = \left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{5^2\pi^2}\right) \cdots\cdots (10)$$

ضابطے (۹) اور (۱۰)، لا کی ہر قیمت کے لئے جائز ہیں اگرچہ ثبوت سے یہ ظاہر نہیں ہوتا۔

مثال ۲ - $\frac{1}{2}\left(\text{قو}^{\text{ر لا}} + \text{قو}^{-\text{ر لا}}\right)$ یا جمز ر لا کے لئے جیب التمام سلسلہ حاصل کرو۔

$$\text{ا}_\cdot = \frac{\text{جبز ر}\pi}{\text{ر}\pi}, \quad \text{ا}_\text{ن} = \frac{2\,\text{ر جبز ر}\pi}{\pi} \times \frac{\text{جم ن}\pi}{\text{ر}^2 + \text{ن}^2}$$

اس لئے $-\pi \leqq \text{لا} \leqq \pi$

$$\text{جمز ر لا} = \frac{\text{جبز ر}\pi}{\text{ر}\pi} + \frac{2\,\text{ر جبز ر}\pi}{\pi} \sum_{\text{ن}=1}^{\infty} (-1)^\text{ن} \frac{\text{جم ن لا}}{\text{ر}^2 + \text{ن}^2} \ldots\ldots (1)$$

(۱) میں رکھو لا = ۰، تب

$$\frac{\pi}{\text{جبن}\,\text{ا}\pi} = \frac{1}{\text{ا}} + \sum_{\text{ن}=1}^{\infty} (-1)^{\text{ن}} \frac{2\text{ا}}{\text{ا}^2 + \text{ن}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

(۲) میں ا π کے لئے ی رکھو، تب اگر ی صفر نہ ہو تو

$$\frac{1}{\text{جبن}\,\text{ی}} = \frac{1}{\text{ی}} + \sum_{\text{ن}=1}^{\infty} (-1)^{\text{ن}} \frac{2\text{ی}}{\text{ی}^2 + \text{ن}^2\pi^2} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

(۱) میں رکھو $\text{لا} = \pi$

$$\pi\,\text{همز}\,\text{ا}\pi = \frac{1}{\text{ا}} + \sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \frac{2\text{ا}}{\text{ا}^2 + \text{ن}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

(۴) میں ا π کے لئے ی رکھو، تب ی کے صفر نہ ہونے کی صورت میں

$$\text{همز}\,\text{ی} = \frac{1}{\text{ی}} + \sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \frac{2\text{ی}}{\text{ی}^2 + \text{ن}^2\pi^2} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

نیز $\text{سنز}\,\frac{\text{ا}\pi}{2} = \text{همز}\,\text{ا}\pi - \frac{1}{\text{جبن}\,\text{ا}\pi}$، اسلئے (۴) اور (۲) سے

$$\frac{\pi}{2}\,\text{سنز}\,\frac{\text{ا}\pi}{2} = \sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \frac{2\text{ا}}{\text{ا}^2 + (2\text{ن}-1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

یا $\text{ا}\pi = 2\text{ی}$ رکھنے سے

$$\text{سنز}\,\text{ی} = \sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \frac{8\text{ی}}{4\text{ی}^2 + (2\text{ن}-1)^2\pi^2} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

مثال اسی طرح ہم بآسانی لامتناہی حاصل ضرب کے ضابطے حاصل کرسکتے ہیں

$$\text{جبن}\,\text{ی} = \text{ی}\left(1 + \frac{\text{ی}^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{\text{ی}^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{\text{ی}^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

$$\text{جمن}\,\text{ی} = \left(1 + \frac{4\text{ی}^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4\text{ی}^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4\text{ی}^2}{5^2\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

۸۵- فوریر کا دوہرا تکملہ - دفعہ ۸۰ میں فرض کرو کہ فا(لا)

ایک ایسا تفاعل ف (لا + و) ہے جو دفعہ ۲۷۰ کے شرائط کو پورا کرتا ہے، اس صورت میں دفعہ ۸۷۰ کے تکملہ (۱) کی اوپر کی حد $\frac{1}{2}$ (π - لا) کی بجائے ہم کوئی عدد ب لے سکتے ہیں جو ا سے بڑا ہو۔ اس طرح ہمیں ذیل کا نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{نہا}_{\text{م}\to\infty}\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ف (لا + و)} \frac{\text{جب م و}}{\text{و}} \text{ء و} = ۰ \quad \text{اگر ب > ا > ۰}$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\text{ف (لا + ۰)} \quad \text{اگر ب > ا = ۰} \qquad (۱)$$

اسی طرح دفعہ ۸۷۰ کے (۶) کے مماثل ذیل کا نتیجہ ہے

$$\text{نہا}_{\text{م}\to\infty}\int_{\text{اَ}}^{\text{بَ}} \text{ف (لا - ع)} \frac{\text{جب م ع}}{\text{ع}} \text{ء ع} = ۰، \quad \text{اگر بَ > اَ > ۰}$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\text{ف (لا - ۰)} \quad \text{اگر بَ > اَ = ۰} \qquad (۲)$$

(۲) میں فرض کرو کہ ع = - و، - اَ = ب، - بَ = ا یعنی ا اور ب منفی ہیں اور ا جبریہ طور پر ب سے کم ہے، تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{نہا}_{\text{م}\to\infty}\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ف (لا + و)} \frac{\text{جب م و}}{\text{و}} \text{ء و} = ۰ \quad \text{اگر ا < ب < ۰}$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\text{ف (لا - ۰)} \quad \text{اگر ا < ب = ۰} \qquad (۳)$$

(۱) اور (۳) کو ایک ضابطہ میں اکھٹا کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\text{نہا}_{\text{م}\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ف (لا + و)} \frac{\text{جب م و}}{\text{و}} \text{ء و} \;\ldots\ldots\ldots \quad (۴)$$

مساوی ہے $\frac{1}{2}$ {ف (لا + ۰) + ف (لا - ۰)} کے اگر ب > ۰ > ا

مساوی ہے $\frac{1}{2}$ ف (لا + ۰) کے اگر ب > ا = ۰

مساوی ہے $\frac{1}{2}$ ف (لا - ۰) کے اگر ۰ = ب > ا

مساوی ہے صفر کے اگر ب > ا > ۰

یا اگر ۰ > ب > ا

اگر تکملہ (۴) میں ب مثبت ہو اور ا منفی تو انتہا بدلنے کے بغیر ہم ب کی بجائے کوئی اس سے بڑا عدد بَ اور ا کی بجائے کوئی (جبریہ طور پر) اس سے چھوٹا عدد اَ لے سکتے ہیں کیونکہ مذکورہ انتہا صفر ہوتی ہے جبکہ تکملہ کے حدود ب، بَ ہوں یا اَ، ا - اگر یہ مان لیا جائے کہ تکملہ کے اوپر کی حد + ∞ تک اور نیچے کی - ∞ تک وسعت دیکر لیجائی جا سکتی ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{نہا}_{\text{م} \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{ف}(\text{لا}+\text{و}) \frac{\text{جب م و}}{\text{و}} \text{ز و} = \frac{1}{2}\left\{\text{ف}(\text{لا}+\cdot)+\text{ف}(\text{لا}-\cdot)\right\}$$

یا لا + و کی بجائے عما درج کرنے سے

$$\text{نہا}_{\text{م} \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{ف}(\text{عما}) \frac{\text{جب م}(\text{عما}-\text{لا})}{\text{عما}-\text{لا}} \text{ز عما}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\text{ف}(\text{لا}+\cdot)+\text{ف}(\text{لا}-\cdot)\right\} \quad \ldots\ldots (5)$$

لیکن $\frac{\text{جب م}(\text{عما}-\text{لا})}{\text{عما}-\text{لا}} = \int_{\cdot}^{\text{م}} \text{جم بہا}(\text{عما}-\text{لا}) \text{ ز بہا}$

اس لئے (۵) میں مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2}\left\{\text{ف}(\text{لا}+\cdot)+\text{ف}(\text{لا}-\cdot)\right\} = \text{نہا}_{\text{م} \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{ف}(\text{عما}) \text{ز عما} \int_{\cdot}^{\text{م}} \text{جم بہا}(\text{عما}-\text{لا}) \text{ز بہا}$$

$$= \text{نہا}_{\text{م} \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\cdot}^{\text{م}} \text{ز بہا} \int_{-\infty}^{\infty} \text{ف}(\text{عما}) \text{جم بہا}(\text{عما}-\text{لا}) \text{ز عما}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\cdot}^{\infty} \text{ز بہا} \int_{-\infty}^{\infty} \text{ف}(\text{عما}) \text{جم بہا}(\text{عما}-\text{لا}) \text{ز عما} \quad \ldots (6)$$

بشرطیکہ مختلف استحالے جائز ہوں۔ جواز پر بحث کرنے کی یہاں گنجائش نہیں لیکن طالب علم کے لئے یہ ثابت کرنے میں زیادہ دقت نہیں ہوگی کہ ضابطہ (۶) درست رہتا ہے اگر اُن قیود کے علاوہ جو اس سے قبل ف(لا) پر لگائی گئی ہیں تفاعل ایسا ہو کہ تکملہ

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{ف(لا)}}{\text{لا}}\,\text{فرلا}$$

مطلق طور پر مستدق ہو جیسے لا، ∞ یا -∞ کی طرف مائل ہو۔
تکملہ (٦) فوریئے کا دوہرا تکملہ کہلاتا ہے، جب ف(لا) مسلسل ہو تو تکملہ کی قیمت ف(لا) ہوتی ہے۔
ذیل کی خاص صورتیں آسانی سے حاصل ہوتی ہیں۔
اگر ف(-لا) = ف(لا) تو لا > ۰ کی صورت میں

$$\text{ف(لا)} = \frac{۲}{\pi}\int_{0}^{\infty}\text{جب لابہ فربہ}\int_{0}^{\infty}\text{ف(عا) جب عابہ فرعا} \quad ...(٧)$$

لیکن اگر ف(-لا) = ف(لا) تو لا ≧ ۰ کی صورت میں

$$\text{ف(لا)} = \frac{۲}{\pi}\int_{0}^{\infty}\text{جم لابہ فربہ}\int_{0}^{\infty}\text{ف(عا) جم عابہ فرعا} \quad ...(٨)$$

نقطہ عدم تسلسل پر قیمت کے متعلق حسب معمول قرارداد کے موافق۔

مثال۔ مساوات $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} = \text{کہ}\,\frac{\text{جف}^{۲}\text{و}}{\text{جف لا}^{۲}}$ کا ایک ایسا حل معلوم کرو جو جائز ہو ت > ۰، لا > ۰ کے لئے اور ایسا کہ و = ۰ جبکہ لا = ۰ اور و = ف(لا) جبکہ ت = ۰، لا > ۰۔
اس کی آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے کہ $\text{و}_{\text{بہ}} = \text{قو}^{-\text{کہ بہ}^{۲}\text{ت}}\,\text{جب لابہ}$ تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے خواہ بہ کی کچھ ہی قیمت ہو، نیز اس شکل مجـ ($\text{و}_{\text{بہ}}$ × بہ کا تفاعل) کا ہر جملہ مساوات کو پورا کرے گا۔
پس یہ معلوم ہوگا کہ

$$\text{و} = \frac{۲}{\pi}\int_{0}^{\infty}\text{قو}^{-\text{کہ بہ}^{۲}\text{ت}}\,\text{جب لابہ فربہ}\int_{0}^{\infty}\text{ف(عا) جب عابہ فرعا}$$

تمام شرائط کو پورا کرتا ہے۔ یہ مساوات کو پورا کرتا ہے کیونکہ یہ اس شکل

تحد (ف ب ہ × ب ہ کا تفاعل) کلہے، یہ تکملہ صفر ہے، جبکہ لا = ۰ اور تکملہ مساوی ہے ف (لا) کے جبکہ ت = ۰، لا > ۰ اوپر کی مساوات (۷) کی رو سے۔

۸۶۔ آزمائشی تفاعل۔ عملی صورتوں میں یہ سوال اکثر واقع ہوتا ہے کہ کسی آزمائشی یا تجرباتی تفاعل کو فوریر کے سلسلہ سے تعبیر کیا جائے۔ طالب علم کو اگر اس کے حل کا موقع پیش آئے تو ترسیمی حل کا خاکہ اُسے مصنف کی کتاب ترسیمات کا رسالہ (Treatise on Graphs) صفحات ۱۳۹۔۱۴۲ اور تحلیلی حل مصنف کی کتاب تمہید احصا (Introduction to the Calculus) صفحات ۱۳۰ تا ۱۳۹ میں ملے گا۔ تحلیلی طریق کی مفصل بحث کے لئے ملاحظہ ہوں پروفیسر سی رنگ (C. Runge) کے مضامین

(Zeitschrift für Mathematik und Physik)

جلد ۴۸ صفحات ۴۴۳ تا ۴۵۶ اور جلد ۵۲ صفحات ۱۱۷ تا ۱۲۳ میں، نیز (Elcktrotechnische Zeitschrift 1905 (Heft11) میں۔

۸۷۔ حوالے۔ فوریر کے سلسلوں کا علم بہت وسیع ہے، زیادہ مشہور مکتوبات کا مختصر بیان

(Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society Vol 1)

کے ایک مضمون میں ملیگا۔ مگر طالب علم خود فوریر کا وقت خیز رسالہ

(Théorie Analytique de la Chaleur)

(Edited by G. Darboux. paris: Gauthier-villars)

اس کا انگریزی ترجمہ اے، فری مین (کیمبرج، یونیورسٹی پریس) نے کیا ہے۔ اس مضمون پر ایک نہایت عمدہ کتاب ڈبلیو، ای، بائرلے کی ہے (بوسٹن، یو، ایس، اے۔ جن کمپنی)۔

An Elementary Treatise on Fourier Series and Spherical, Cylindrical and Ellipsoidal Harmonics

اِس کتاب میں ریاضی طبعیات کے مسائل کی کئی عددی توضیحات ہیں۔

مشق ۲۰

امثلہ ۱ تا ۱۰ کے تفاعلوں کے لئے فوریر کے سلسلے معلوم کرو۔

۱۔ ف(لا) = −۱، لا = −π سے لا = ۰ تک اور ف(لا) = ۱، لا = ۰ سے لا = π تک۔

۲۔ ف(لا) = −ج، لا = −۱ سے لا = ۰ تک اور ف(لا) = ج، لا = ۰ سے لا = ۱ تک۔

۳۔ ف(لا) = π + لا، لا = −π سے لا = −π/۲ تک؛ ف(لا) = π/۲، لا = −π/۲ سے لا = π/۲ تک

اور ف(لا) = π − لا، لا = π/۲ سے لا = π تک۔

۴۔ سب کچھ وہی جو اوپر مثال ۳ میں لیکن ہر جگہ π کی بجائے ۱۔

۵۔ ف(لا) = ۱ − لا، لا = −۱ سے لا = ۰ تک اور ف(لا) = ۱ + لا، لا = ۰ سے لا = ۱ تک۔

۶۔ ف(لا) = ج لا، لا = ۰ سے لا = ۱ تک اور ف(لا) = ۰، لا = ۱ سے لا = ۲ تک۔

۷۔ جب لا کے لئے جیب التمام سلسلہ۔

۸۔ ف(لا) کے لئے جیب التمام سلسلہ جبکہ ف(لا) = ۱/۴ − لا^{2}، لا = ۰ سے لا = ۱/۲ تک اور ف(لا) = ۰، لا = ۱/۲ سے لا = ۱ تک۔

۹۔ (π − لا) جب لا کے لئے جیب التمام سلسلہ

۱۰۔ ف(لا) کے لئے جیب سلسلہ جبکہ ف(لا) = ب لا / ۱، لا = ۰ سے لا = ۱ تک اور ف(لا) = ب(ج − لا)/(ج − ۱)، لا = ۱ سے لا = ج تک۔

۱۱۔ اگر ف(لا) مسلسل ہو لا = −π سے لا = π تک اور اگر ف(−π) = ف(π) تو ثابت کرو کہ ف(لا) کا مشتق ف′(لا) کے

فورئے کے سلسلہ کو تفرق کرنے سے حاصل ہوسکتا ہے

۱۲- $\text{و}^{\text{لا}}$ کے (۱) جیب التمام سلسلہ (۲) جیب سلسلہ حاصل کرو۔ اس کا معائنہ کرو کہ کیا ہر ایک سلسلہ دوسرے سلسلہ سے تفرق یا تکمل سے حاصل ہوسکتا ہے یا نہیں۔

۱۳- اگر ف (لا)، لا کا جفت تفاعل ہو تو ثابت کرو کہ ف (لا) پر بعض قیود کے ماتحت

$$\text{ف}(\text{لا}) + \text{ف}(\text{لا}+2\,\text{ل}) + \text{ف}(\text{لا}+4\,\text{ل}) + \ldots\ldots$$

$$+\,\text{ف}(\text{لا}-2\,\text{ل}) + \text{ف}(\text{لا}-4\,\text{ل}) + \ldots\ldots$$

یعنی $\sum_{\text{ر}=-\infty}^{\text{ر}=\infty} \text{ف}(\text{لا}+2\,\text{ر}\,\text{ل})$

ایک سلسلہ $\text{ا}_{\cdot} + \sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \text{ا}_{\text{ن}}\, \text{جم}\,\frac{\text{ن}\,\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}$ سے تعبیر ہوسکتا ہے جہاں

$$\text{ا}_{\cdot} = \frac{1}{\text{ل}}\int_{\cdot}^{\infty}\text{ف}(\text{ع})\,\text{دع}، \quad \text{ا}_{\text{ن}} = \frac{2}{\text{ل}}\int_{\cdot}^{\infty}\text{ف}(\text{ع})\,\text{جم}\,\frac{\text{ن}\,\pi\,\text{ع}}{\text{ل}}\,\text{دع}$$

[ملاحظہ ہوں جوابات]

۱۴- مثال ۱۳ کے مسئلہ کے ذریعہ ثابت کرو کہ

$$(1)\quad \sum_{\text{ن}=-\infty}^{\text{ن}=\infty} \text{و}^{-\frac{(\text{لا}+2\text{ن}\text{ل})^2}{\text{ج}}} = \frac{\sqrt{\pi\,\text{ج}}}{2\,\text{ل}}\left\{1+2\sum_{\text{ن}=1}^{\infty}\text{و}^{-\frac{\text{ن}^2\pi^2\text{ج}}{\text{ل}^2}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ن}\,\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}\right\}$$

$$(2)\quad \sum_{\text{ن}=-\infty}^{\text{ن}=\infty} (-1)^{\text{ن}}\,\text{و}^{-\frac{(\text{لا}+2\text{ن}\text{ل})^2}{\text{ج}}} = \frac{\sqrt{\pi\,\text{ج}}}{\text{ل}}\sum_{\text{ن}=\cdot}^{\infty}\text{و}^{-\frac{(2\text{ن}+1)^2\pi^2}{4\,\text{ل}^2}\times\frac{\text{ج}}{4}}\,\text{جم}\,\frac{(2\text{ن}+1)\,\pi\,\text{لا}}{2\,\text{ل}}$$

۱۵- اگر ف (لا) دوری تفاعل ہو جس کا دور 2π ہو تو ثابت کرو کہ

$$\int_{ب}^{\infty} \text{فا}(لا)\, \text{ف}(لا)\, \text{فر}لا = \int_{ب}^{۲\pi} \text{ف}(لا)\left\{\text{فا}(لا) + \text{فا}(لا+۲\pi) + \text{فا}(لا+۴\pi) + \dots\right\} \text{فر}لا$$

[شلوملش]

۱۶۔ اگر مثال ۱۵ میں $\text{ف}(لا) = \frac{۱}{۲}(\pi - لا)$ تو ثابت کرو کہ

$$\int_{ب}^{\infty} \text{فا}(لا)\left\{\sum_{ن=۱}^{\infty} \frac{\text{جب}\, ن لا}{ن}\right\} \text{فر}لا = \frac{۱}{۲}\int_{ب}^{۲\pi}(\pi - لا)\left\{\sum_{ن=ب}^{\infty} \text{فا}(لا+۲ن\pi)\right\} \text{فر}لا$$

$\text{فا}(لا) = \text{قو}^{-لہ لا}$ رکھنے سے حاصل کرو کہ

$$\pi\, لہ\, \text{ہمز}\, لہ\, \pi = \pi\, \frac{\text{قو}^{لہ\pi} + \text{قو}^{-لہ\pi}}{\text{قو}^{لہ\pi} - \text{قو}^{-لہ\pi}} = \frac{۱}{لہ} + \sum_{ن=۱}^{\infty} \frac{۲لہ}{لہ^{۲} + ن^{۲}}$$

$\text{فا}(لا)$ کے لیے قیمتیں $\text{قو}^{-لہ لا}\, \text{جم}\, مہ لا$، $\text{قو}^{-لہ لا}\, \text{جب}\, مہ لا$ رکھنے سے دلچسپ سلسلے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۷۔ مثال ۱۴ (۱) سے حاصل کرو کہ

$$۱ + ۲\sum_{ن=۱}^{\infty} \text{قو}^{-ن^{۲}ا^{۲}} = \frac{\sqrt{\pi}}{ا}\left\{۱ + ۲\sum_{ن=۱}^{\infty} \text{قو}^{-\frac{ن^{۲}\pi^{۲}}{ا^{۲}}}\right\}$$

ثابت کرو کہ $\frac{۱}{۲} + \frac{۱۰۰۰}{۱۰۰۱} + \left(\frac{۱۰۰۰}{۱۰۰۱}\right)^{۴} + \left(\frac{۱۰۰۰}{۱۰۰۱}\right)^{۹} + \dots\dots$

مساوی ہے ۲۸٫۰۲۱۹۶..... کے [شلوملش]

۱۸۔ دفعہ ۸۵ کی مساواتوں (۷)، (۸) میں رکھو $\text{ف}(لا) = \text{قو}^{-م لا}\ (م > ۰)$

اور یہ قیمتیں حاصل کرو

$$\int_{ب}^{\infty} \frac{بہ\, \text{جب}\, لا بہ\, \text{فر}بہ}{م^{۲} + بہ^{۲}} = \frac{\pi}{۲}\, \text{قو}^{-م لا}، \quad (لا > ۰)$$

$$\int_{\cdot}^{\infty} \frac{\text{جم لا بہ دبہ}}{\text{م}^2 + \text{بہ}^2} = \frac{\pi}{\text{۲م}}\ \text{تو}^{-\text{م لا}}\ ,\quad \text{لا} \geq \cdot$$

۱۹- دفعہ ۸۵ کے تکملوں (۷)، (۸) کے ذریعہ ثابت کرو کہ

$$\int_{\cdot}^{\infty} \frac{\text{جب لا}}{\sqrt{\text{لا}}}\ \text{دلا} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_{\cdot}^{\infty} \frac{\text{جم لا}}{\sqrt{\text{لا}}}\ \text{دلا}$$

فرض کرو $\left[\ \text{ف}(\text{عہ}) = \frac{1}{\sqrt{\text{عہ}}}\ \right]$

۲۰- اگر $\int_{\cdot}^{\infty} \text{ف}(\text{عہ})\ \text{جم لا عہ دعہ} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \text{فہ}(\text{لا})$

تب $\int_{\cdot}^{\infty} \text{فہ}(\text{عہ})\ \text{جم لا عہ دعہ} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \text{ف}(\text{لا})$

اس کے مماثل اور رشتہ ہوگا جبکہ تکمل میں جم لا عہ کی بجائے جب لا عہ ہو۔

۲۱- اگر ن > ۱ اور لا ≥ ۰۔ یا اگر ن = ۱ اور لا > ۰۔
تو ثابت کرو کہ

$$(1)\quad \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب ن طہ جب}(\text{لا سں طہ})\ \text{جم}^{\text{ن}-2}\ \text{طہ دطہ} = \frac{\pi}{\text{۲ جا(ن)}}\ \text{تو}^{-\text{لا}}\ \text{لا}^{\text{ن}-1}$$

$$(2)\quad \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم ن طہ جم}(\text{لا سں طہ})\ \text{جم}^{\text{ن}-2}\ \text{طہ دطہ} = \frac{\pi}{\text{۲ جا(ن)}}\ \text{تو}^{-\text{لا}}\ \text{لا}^{\text{ن}-1}$$

دفعہ ۲۷ مثال ۷ اور دفعہ ۸۵ نتائج (۷)، (۸) استعمال کرو۔

۲۲- مثال ۲۱ کے نتیجے استعمال کرکے ثابت کرو کہ اگر م > ۱ تو

$$(1)\quad \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب م طہ جب ن طہ جم}^{\text{م}+\text{ن}-2}\ \text{طہ دطہ} = \frac{\pi}{2^{\text{م}+\text{ن}}}\ \frac{\text{جا}(\text{م}+\text{ن}-1)}{\text{جا(م) جا(ن)}}$$

$$(2)\quad \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم م طہ جم ن طہ جم}^{\text{م}+\text{ن}-2}\ \text{طہ دطہ} = \frac{\pi}{2^{\text{م}+\text{ن}}}\ \frac{\text{جا}(\text{م}+\text{ن}-1)}{\text{جا(م) جا(ن)}}$$

[مثال ۲۱ میں مساواتوں کے دونوں رکنوں کو $\text{قو}^{\text{لا}}\ \text{لا}^{\text{م}-۱}$ کے ساتھ ضرب دو اور بلحاظ لا کے ۰ سے ∞ تک تکمل کرو۔]

۲۳- مثال ۲۲ سے حاصل کرو

$$(۱)\quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}(\text{م}-\text{ن})\text{طہ}\ \text{جم}^{\text{م}+\text{ن}-۲}\text{طہ}\ \text{د طہ} = \frac{\pi}{۲^{\text{م}+\text{ن}-۱}}\ \frac{\text{جا}(\text{م}+\text{ن}-۱)}{\text{جا}(\text{م})\ \text{جا}(\text{ن})}$$

$$(۲)\quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم پ طہ}\ \text{جم}^{\text{پ}}\text{طہ}\ \text{د طہ} = \frac{\pi}{۲^{\text{پ}+۱}}$$

$$(۳)\quad \text{جا}(\text{پ})\ \text{جا}(۱-\text{پ}) = \frac{\pi}{\text{جیب پ}\ \pi}$$

[مساوات (۱) اور مثال (۲۲) کی مساواتیں (۱) اور (۲) برقرار رہتی ہیں جب تک کہ م، ن، م + ن - ۱ سب مثبت ہوں، مساوات (۲) قائم رہتی ہے اگر پ + ۱ مثبت ہو]

۲۴- اگر م > ۱ اور ۱ > ن > ۰ تو ثابت کرو کہ

$$(۱)\quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم م طہ}\ \text{جم}^{\text{م}-\text{ن}-۱}\text{طہ}\ \text{جب}^{\text{ن}-۱}\text{طہ}\ \text{د طہ} = \frac{\text{جا}(\text{ن})\ \text{جا}(\text{م}-\text{ن})}{\text{جا}(\text{م})}\ \text{جم}\ \frac{\text{ن}\pi}{۲}$$

$$(۲)\quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب م طہ}\ \text{جم}^{\text{م}-\text{ن}-۱}\text{طہ}\ \text{جب}^{\text{ن}-۱}\text{طہ}\ \text{د طہ} = \frac{\text{جا}(\text{ن})\ \text{جا}(\text{م}-\text{ن})}{\text{جا}(\text{م})}\ \text{جب}\ \frac{\text{ن}\pi}{۲}$$

اور ن ← ۱ کے لئے انتہا لینے سے ثابت کرو کہ (م > ۱)

$$(۳)\quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم م طہ}\ \text{جم}^{\text{م}-۲}\text{طہ}\ \text{د طہ} = ۰$$

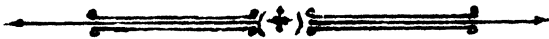
$$(۴)\quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب م طہ}\ \text{جم}^{\text{م}-۲}\text{طہ}\ \text{د طہ} = \frac{۱}{\text{م}-۱}$$

۲۵۔ ف (لا) پر انہی قیود کے ہوتے ہوئے جو ف (لا) پر عائد کی گئی ہیں ثابت کرو کہ اگر $-\pi <$ لا $< \pi$

$$\text{نہا}_{ر \to ۱} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(۱-ر^۲)\, ف(و)\, دو}{۱-۲ر\, جم(و-لا)+ر^۲} = \pi \left\{ ف(لا+۰) + ف(لا-۰) \right\}$$

$$\text{اور نہا}_{صہ \to ۰} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{صہ}{صہ^۲+(و-لا)^۲}\, ف(و)\, دو = \frac{\pi}{۲} \left\{ ف(لا+۰) + ف(لا-۰) \right\}$$

جہاں صہ مثبت قیمتوں میں سے ہو کر صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔

[ملاحظہ ہو مشق ۱۲ (۱۳)]

ضمیمہ

تفرقوں پر نوٹ

دفعہ ۹۰ حصۂ اول میں دو یا زیادہ متبوع متغیروں کے تفاعل کے تفرقہ فرع کی یہ تعریف کیگئی ہے کہ یہ مف ع کا صدری حصہ ہے۔ تین غیر تابع متغیروں لا، ما، ی کے لئے مساوات ہے

$$\text{فرع} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\,\text{فرلا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\,\text{فرما} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}\,\text{فری} \quad \ldots\ldots (۱)$$

یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اس صورت میں بھی فرع مساوات (۱) سے تعبیر ہوگا جبکہ متغیر لا، ما، ی غیر تابع ہونے کی بجائے دو یا زیادہ غیر تابع متغیروں کے تفاعل ہوں، تمام تفاعیل اور ان کے پہلے جزوی مشتقوں کو مسلسل فرض کیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ لا، ما، ی دو غیر تابع متغیروں س، ت کے تفاعل ہیں، اس لئے ع غیر تابع متغیروں س، ت کا تفاعل ہے اور ع کا تفرقہ ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فرع} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف س}}\,\text{فرس} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ت}}\,\text{فرت} \quad \ldots\ldots (۲)$$

اب لا، ما، ی غیر تابع متغیروں س، ت کے تفاعل ہیں، اس لئے ان کے تفرقے ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{فرلا} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف س}}\,\text{فرس} + \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ت}}\,\text{فرت}$$

$$\text{فرما} = \frac{\text{جف ما}}{\text{جف س}}\,\text{فرس} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ت}}\,\text{فرت} \quad \ldots\ldots (۳)$$

$$\text{فری} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف س}}\,\text{فرس} + \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ت}}\,\text{فرت}$$

لیکن دفعہ ۹۰ حصۂ اول کی مساواتوں (ب) سے

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف س}}=\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف س}}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف س}}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف س}}$$

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ت}}=\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ت}}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ت}}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ت}}$$

$\frac{\text{فرع}}{\text{فرس}}$ کی بجائے ترتیم $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف س}}$ کے استعمال کے متعلق ملاحظہ ہو صفحہ ۳۵۹ حصۂ اول کے وسط میں اس امر کا ذکر۔

پہلی مساوات کو فرس کے ساتھ، دوسری کو فرت کے ساتھ ضرب دینے اور جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف س}}\,\text{فرس}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ت}}\,\text{فرت}=\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف س}}\,\text{فرس}+\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ت}}\,\text{فرت}\right)$$

$$+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف س}}\,\text{فرس}+\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ت}}\,\text{فرت}\right)+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}\left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف س}}\,\text{فرس}+\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ت}}\,\text{فرت}\right)$$

$$=\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\,\text{فرلا}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\,\text{فرما}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}\,\text{فری}\quad\ldots\ldots\ldots(۴)$$

مساواتوں (۳) کو استعمال کرنے سے۔

مساواتوں (۲) اور (۴) کا مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{فرع}=\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\,\text{فرلا}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\,\text{فرما}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}\,\text{فری}$$

پس معلوم ہوا کہ فرع کے لئے جملہ، فرلا، فرما، فری کی رقوم میں اسی شکل کا ہے جیسا کہ لا، ما، ی کے غیر تابع ہونے کی صورت میں۔ ظاہر ہے کہ ثبوت قائم رہتا ہے خواہ کسی ایک جٹ لا، ما، ی یا س، ت کے متغیروں کی تعداد کچھ ہی ہو۔

دفعہ ۹۸ حصۂ اول میں ایک غیر تابع متغیر لا کے تفاعل ما یا ف (لا) کی تعریف فَ (لا) فرلا کی گئی ہے، اس صورت میں $\text{فر}^{۲}\text{لا}$ صفر ہے یا

فرلا مستقل ہے۔ لیکن اگر ایک اور متغیر مثلاً ت متغیر متبوع ہو یعنی ما، لا کا تفاعل ہو جبکہ لا، ت کا تفاعل ہو تو و۲ لا صفر نہیں ہوگا بلکہ

$$\text{فر}^2\text{لا} = \ddot{\text{لا}}\,\text{فرت}^2 \,,\quad \text{فر}^2\text{ما} = \ddot{\text{ما}}\,\text{فرت}^2$$

جہاں نقطوں سے تفرق بلحاظ ت کے تعبیر ہوتا ہے۔

لیکن $\ddot{\text{ما}} = \text{ف}''(\text{لا})(\dot{\text{لا}})^2 + \text{ف}'(\text{لا})\,\ddot{\text{لا}}$

پس $\ddot{\text{ما}}\,\text{فرت}^2 = \text{ف}''(\text{لا})(\dot{\text{لا}}\,\text{فرت})^2 + \text{ف}'(\text{لا})\,\ddot{\text{لا}}\,\text{فرت}^2$

یا $\text{فر}^2\text{ما} = \text{ف}''(\text{لا})\,\text{فرلا}^2 + \text{ف}'(\text{لا})\,\text{فر}^2\text{لا}$ .... (۵)

پس فر۲ ما کے لئے جو جملہ ہے اس کی شکل اب وہی نہیں ہے جو کہ لا کے متغیر متبوع ہونے کی صورت میں تھی۔

فر ما کی قیمت ف (لا) فرلا کا تفرقہ لینے سے (۵) حاصل ہو سکتی ہے۔ پس

$$\text{فر}^2\text{ما} = \text{فر}(\text{فرما}) = \text{فرلا} \times \text{فر}\,\text{ف}'(\text{لا}) + \text{ف}'(\text{لا}) \times \text{فر}(\text{فرلا})$$

$$= \text{فرلا} \times \text{ف}''(\text{لا})\,\text{فرلا} + \text{ف}'(\text{لا})\,\text{فر}^2\text{لا}$$

$$= \text{ف}''(\text{لا})\,\text{فرلا}^2 + \text{ف}'(\text{لا})\,\text{فر}^2\text{لا}$$

اسی طرح حاصل ہوتا ہے

$$\text{فر}^3\text{ما} = \text{فر}(\text{فر}^2\text{ما}) = \text{ف}'''(\text{لا})\,\text{فرلا}^3 + 3\,\text{ف}''(\text{لا})\,\text{فرلا}\,\text{فر}^2\text{لا} + \text{ف}'(\text{لا})\,\text{فر}^3\text{لا}$$

دوسرے اور تیسرے تفرقوں کے لئے یہ جملے تحلیلی ہندسہ میں اکثر مطلوب ہوتے ہیں۔
دو یا زیادہ غیر تابع متغیروں کے تفاعل کے اعلیٰ تفرقے ذرا پیچیدہ ہیں۔ اگر

$$\text{فرع} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\,\text{فرلا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\,\text{فرما}$$

تو $\text{فر}^2\text{ع} = \text{فر}(\text{فرع}) = \text{فرلا}\,\text{فر}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\right) + \text{فرما}\,\text{فر}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\right)$

$$= \text{فرلا}\left(\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}\,\text{فرلا} + \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}\,\text{فرما}\right) + \text{فرما}\left(\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}\,\text{فرلا} + \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2}\,\text{فرما}\right)$$

$$= \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}\,\text{فرلا}^2 + 2\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}\,\text{فرلا فرما} + \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2}\,\text{فرما}^2 \quad ......(۶)$$

اگر مساوات (۱۱) دفعہ ۸۴ میں ھ، ک، ل کی بجائے بالترتیب ور لا، ور ما، ور ی رکھا جائے اور ف (لا + ھ، ما + ک، ی + ل) ـ ف (لا، ما، ی) کی بجائے مف ف تو وہ مساوات یوں لکھی جا سکے گی

$$\text{مف ف} = \text{ور ف} + \frac{1}{2}\,\text{و}^{2}\text{ف} + \frac{1}{\underline{|3}}\,\text{و}^{3}\text{ف} + \ldots\ldots$$

اگر لا، ما، ی غیر تابع متغیر نہ ہوں تو ور لا، ور ما، ور ی مستقل نہیں ہیں اور و^{2}ع کے لئے جو جملہ ہو گا اُس کی شکل مندرجہ بالا سے مختلف ہو گی۔ (٦) کے بائیں جانب جو رقمیں ہیں اُن میں ذیل کے جملہ کا اضافہ کرنا ہو گا

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\,\text{و}^{2}\text{لا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\,\text{و}^{2}\text{ما}$$

(+)

جوابات

(احصا حصۂ دوم)

باب اول

دفعہ ۲، صفحہ ۷

۱- $\frac{۲}{۳}$ لا$^{\frac{۳}{۲}}$، ۲$\sqrt{لا}$، $\frac{۲}{۹}$(۳لا-۴)$^{\frac{۳}{۲}}$، $\frac{۲}{۳}\sqrt{۳لا-۴}$، جب$^{-۱}$ $\frac{لا}{\sqrt{۳}}$

۲- ۲، ۰، ۱، لوک $\frac{ب}{ا^{۲}}$، - لوک ۳

مشق ۱ صفحہ ۱۱

۱- $\frac{۳}{۴}$ لا^{۴} + $\frac{۵}{۳}$ لا^{۳} + $\frac{۱۷}{۲}$ لا^{۲} + ۵۱لا + ۱۵۰ لوک (لا - ۳)

۲- لا + لوک (۲لا - ۱)　　۳- لوک (لا^{۲} - ۳لا + ۲)

۴- لوک $\frac{(لا-۲)(لا-۳)}{(لا-۱)^{۲}}$　　۵- $\frac{۱}{۲\sqrt{۲۱}}$ لوک $\frac{\sqrt{۷} + لا\sqrt{۳}}{\sqrt{۷} - لا\sqrt{۳}}$

۶- $\frac{۱}{\sqrt{۲۱}}$ مس$^{-۱}$ (لا$\sqrt{\frac{۳}{۷}}$)　　۷- $\frac{۱}{۲}$ جب$^{-۱}$ ($\frac{لا^{۲}}{\sqrt{۳}}$)

۸- $\frac{۱}{۲}$ لوک (۲لا + $\sqrt{۴لا^{۲} + ۳}$)　　۹- $\frac{۱}{۲}$ لا + $\frac{۱}{۴}$ جب ۲لا

۱۰- $\frac{۱}{۱۲}$ جب ۳لا + $\frac{۳}{۴}$ جب لا　　۱۱- $\frac{۱}{۲}$ لا + $\frac{۱}{۴ا}$ جب ۲(الا + ب)

۱۲- $\frac{۳}{۸}$ لا - $\frac{۱}{۴}$ جب ۲لا + $\frac{۱}{۳۲}$ جب ۴لا　　۱۳- $\frac{۱}{۲}$ جب لا - $\frac{۱}{۱۴}$ جب ۷لا

۱۴- $\frac{۱}{۲}$ جم (لا+۱) - $\frac{۱}{۱۴}$ جم (۷لا+۵)

۱۵- $\frac{۱}{۴}$ لا + $\frac{۱}{۸}$ جب ۲لا + $\frac{۱}{۱۶}$ جب ۴لا + $\frac{۱}{۲۴}$ جب ۶لا

۱۶- $\frac{ط}{۴}$ ۱۷- $\frac{ط}{۴}$ ۱۸- $\frac{ط}{۸}$ ۱۹- $\frac{۱}{۴}$ لوک ۳

۲۰- $\frac{۱}{۴}$ لوک ($\frac{۳}{۵}$) ۲۱- $\frac{ط}{۶}$ ۲۲- $\frac{ط}{۲}$ ۲۸- (۳) $\frac{۴ط اب ج}{۳}$

مشق ۲ صفحہ ۲۵

۱- $\frac{۲}{\sqrt{۲۳}}$ مس$^{-۱}$ $\left(\frac{۴لا+۳}{\sqrt{۲۳}}\right)$ ۲- جب$^{-۱}$ $\left(\frac{۲لا-ا}{ا}\right)$

۳- لوک $\left[لا - \frac{۱}{۲}ا + \sqrt{لا^{۲} - الا}\right]$ ۴- جب$^{-۱}$ $\left(\frac{۲لا-ا-ب}{ب-ا}\right)$

۵- $\frac{۱}{۲}$ لوک $(ا^{۲}+لا^{۲})$ ۶- $\sqrt{ا^{۲}+لا^{۲}}$

۷- $\frac{۱}{۶}$ لوک $\left(\frac{لا^{۳}-۱}{لا^{۳}+۱}\right)$ ۸- $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ مس$^{-۱}$ $\left(\frac{۲لا^{۲}+۱}{\sqrt{۳}}\right)$

۹- $\sqrt{لا^{۲}+۲لا-۳}$ ۱۰- لوک جب لا ۱۱- لوک (۱+جب لا)

۱۲- لوک (لا+جب لا) ۱۳- $\frac{۱}{۳}$ مس^{۳} لا - مس لا + لا

۱۴- $-\frac{۱}{۴}$ مم^{۴} لا + $\frac{۱}{۲}$ مم^{۲} لا + لوک جب لا

۱۵- $\frac{۱}{اب}$ مس$^{-۱}$ $\left(\frac{ب}{ا}\right.$ مس لا $\left.\right)$

۱۶- -جم لا + جم^{۳} لا - $\frac{۳}{۵}$ جم^{۵} لا + $\frac{۱}{۷}$ جم^{۷} لا

۱۷- $-\frac{۱}{۵}$ جم^{۵} لا + $\frac{۲}{۷}$ جم^{۷} لا − $\frac{۱}{۹}$ جم^{۹} لا ۱۸- مس لا − لا

۱۹- $\frac{۱}{۴}$ قط^{۴} لا ۲۰- ۲ $\sqrt{۱-\text{لا}}$ $\{\frac{۱}{۵}(۱-\text{لا})^{۲} - \frac{۱}{۳}(۱-\text{لا}) ...\}$

۲۱- $-\frac{۲}{۳}$(لا + ۲) $\sqrt{۱-\text{لا}}$ ۲۲- لوک (لا + $\sqrt{\text{لا}-۱}$) − $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ مس$^{-۱}$ $\left(\frac{۱+\sqrt{۱-\text{لا}^{۲}}}{\sqrt{۳}}\right)$

۲۳- (۱) $\frac{۸}{۱۵}$ (۲) $\frac{۸}{۳۱۵}$ (۳) $\frac{\pi}{\text{اب}}$ (۴) $\frac{۱}{۴}$ لوک ۳

(۵) $\frac{۱}{۲}$ لوک ۲ (۶) $\frac{\pi}{۳\sqrt{۳}}$ (۷) $\frac{۲\pi}{۳\sqrt{۳}}$ (۸) $\frac{\pi}{۲}$

۲۴- $\frac{۱}{۲}$ لوک (لا^{۲} + لا + ۱) + $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ مس$^{-۱}$ $\left(\frac{۲\text{لا}+۱}{\sqrt{۳}}\right)$

۲۵- لا − ۲ مس$^{-۱}$ لا ۲۶- $\frac{۱}{۳}$(لا − ۱)^{۳} + ۲ لوک (لا^{۲} + ۲لا + ۳)

۲۷- $\frac{۳}{۸}$ لوک (لا^{۲} − ۲) + $\frac{۱}{۸}$ لوک (لا^{۲} + ۲)

۲۸- لا + ۴ لوک (لا − ۱) − $\frac{۴}{\text{لا}-۱}$ ۲۹- جب$^{-۱}$ لا − $\sqrt{۱-\text{لا}^{۲}}$

۳۰- $\sqrt{\text{لا}^{۲}-۱}$ + لوک (لا + $\sqrt{\text{لا}^{۲}-۱}$)

۳۱- $\sqrt{\text{لا}^{۲}+\text{ال}}$ + $\frac{\text{ا}}{۲}$ لوک (لا + $\frac{\text{ا}}{۲}$ + $\sqrt{\text{لا}^{۲}+\text{ال}}$)

۳۲- $\sqrt{\text{ال}-\text{لا}^{۲}}$ + $\frac{\text{ا}}{۲}$ جب$^{-۱}$ $\left(\frac{۲\text{لا}-\text{ا}}{\text{ا}}\right)$

۳۳- جب$^{-۱}$ $\left(\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}\sqrt{۲}}\right)$ ۳۴- $\frac{\sqrt{\text{لا}^{۲}-۱}}{\text{لا}+۱}$ ۳۵- $-\frac{\sqrt{\text{لا}^{۲}-۱}}{\text{لا}-۱}$

۳۶- $-\sqrt{\frac{۱-\text{لا}}{۱+\text{لا}}}$ ۳۷- $-\sqrt{\frac{۱+\text{لا}}{۱-\text{لا}}}$ ۳۸- $\frac{۱}{\text{ن}}$ لوک $\left(\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{۱+\text{لا}^{\text{ن}}}\right)$

۳۹- $\frac{لا+۱}{۲\sqrt{لا^{۲}+۲لا+۳}}$ ۔ ۴۰- $\frac{۱}{۲}$ لا + $\frac{۱}{۲}$ لوک (جب لا + جم لا)

۴۱- $\frac{۳}{۵}$ لا - $\frac{۱}{۵}$ لوک (جب لا + ۲ جم لا)

۴۲- (۱) $\frac{\pi}{۴}$ (۲) $\frac{\pi}{۲}$ (۳) $\frac{\pi}{۴}$

(۴) $\frac{\pi}{\sqrt{۱-ر^{۲}}}$ اگر $ر^{۲} < ۱$ اور $\frac{\pi}{\sqrt{ر^{۲}-۱}}$ اگر $ر^{۲} > ۱$

(۵) $\frac{عہ}{جب\ عہ}$ (۶) $\frac{\pi}{۲\sqrt{۱-گ^{۲}}}$ (۷) $\frac{۱}{۴}$ لوک ۳

۴۳- (۱) $\frac{\pi}{۲}$ (۲) $-\frac{\pi}{۲}$ ۔ ۴۵- $\frac{۸ر^{۲}}{۵}$

۴۶- ہر ایک = $\frac{۲ر^{۲}}{۳}$ ۔ ۴۷- $\frac{۱}{۲}(۲ر^{۲}+ب^{۲})\pi$

مشق ۳، صفحہ ۳۸

۱- $-(لا+۱)\,تو^{-لا}$ ۔ ۲- $-(لا^{۳}+۳لا^{۲}+۶لا+۶)\,تو^{-لا}$

۳- جب لا - لا جم لا ۔ ۴- لا جب لا + جم لا

۵- $-\frac{۱}{۴}$ لا جم ۲لا + $\frac{۱}{۸}$ جب ۲لا ۔ ۶- $-لا^{۲}$ جم لا + ۲ لا جب لا + ۲ جم لا

۷- $\frac{لا^{ن+۱}}{ن+۱}$ لوک لا - $\frac{لا^{ن+۱}}{(ن+۱)^{۲}}$ ۔ ۸- $\frac{۱}{۲}(لوک\ لا)^{۲}$

۹- $-\frac{۱}{۲}تو^{-لا}+\frac{۱}{۱۰}تو^{-لا}$ (جم ۲لا - ۲ جب ۲لا)

۱۰- $\frac{تو^{لا}}{۱+لا}$ ۔ ۱۱- $-\frac{۱}{۲}تو^{-لا^{۲}}$ ۔ ۱۲- $لا\ جب^{-۱}لا+\sqrt{۱-لا^{۲}}$

۱۳- $لا\ مس^{-۱}لا-\frac{۱}{۲}$ لوک $(۱+لا^{۲})$

۱۴- $\frac{۱}{۲}لا^{۲}جب^{-۱}لا-\frac{۱}{۴}جب^{-۱}لا+\frac{۱}{۴}لا\sqrt{۱-لا^{۲}}$

۱۵- ½ (۱ + لا^۲) مس^-۱ لا - ½ لا

۱۶- ½ (لا - ۱) √(۳ + ۲لا - لا^۲) + ۲ جب^-۱ (لا - ۱)/۲

۱۷- ½ (لا + ۱) √(لا^۲ + ۲لا + ۳) + لوک (لا + ۱ + √(لا^۲ + ۲لا + ۳))

۱۸- ½ (لا - ا) √(۲ الا - لا^۲) + ½ ا^۲ جب^-۱ (لا - ا)/ا

۱۹- ½ (لا + ا) √(۲ الا + لا^۲) - ½ ا^۲ لوک (لا + ا + √(۲ الا + لا^۲))

۲۰- ½ جب^-۱ لا - ½ لا √(۱ - لا^۲)   ۲۱- لا جب لا / (۱ + جم لا)

۲۲- (و^۳لا / ۲۵) (۴ جب ۴لا - ۳ جم ۴لا)

۲۳- ½ (جمز لا جب لا + جبز لا جم لا)

۲۴- ½ (جمز لا جب لا - جبز لا جم لا)

۲۵- ۳۵π/۲۵۶ ، ۵π/۱۶ ، ۳π/۲۵۶ ، ۴/۳۵ ، ۷π/۲۵۶ ، ۱۳/۱۵ - π/۴

۲۶- πا^۴/۱۶ ، πا^۳/۲ ، ۵πا^۲/۸   ۲۷- (π - ۲)ا^۲/۴

۲۸- ⌊م ⌊ن / ⌊م + ن + ۱   ۳۳- ⌊م ⌊ن / ⌊م + ن

۳۴- πا^۶/۳۲ ، (۲۱π/۳۲ - ۲۸/۱۵) ا^۶   ۳۶- ۳۲π/۱۵

۳۷- π ا^۲   ۳۹- ۴ ا (۱ - جم طہ/۲)

۴۰- ½ ا طہ √(۱ + طہ^۲) + ½ ا لوک (طہ + √(۱ + طہ^۲))

۴۱۔ (ر - ا) قطع عہ

مشق ۴ صفحہ ۵۱

۱۔ لوک (لا + ۲) - $\frac{۱}{۲}$ لوک (۲لا + ۱) - $\frac{۱}{۳}$ لوک (۳لا + ۲)

۲۔ ۱۵لا^{۲} - ۵ لوک (لا^{۲} - ۱) + ۸۰ لوک (لا^{۲} - ۴)

۳۔ $\sum \frac{ا^{۲}}{(ا - ب)(ا - ج)}$ لوک (لا - ا) ۴۔ - $\frac{۱}{۲}$ $\frac{۱}{لا + ۱}$ + $\frac{۱}{۴}$ لوک $\frac{لا - ۱}{لا + ۱}$

۵۔ $\frac{۱}{۲ لا^{۲}}$ + $\frac{۱}{لا}$ + لوک $\frac{لا - ۱}{لا}$

۶۔ $\frac{۱}{۱۶}$ $\frac{۱}{(لا + ۱)^{۲}}$ - $\frac{۱}{۱۶}$ $\frac{۱}{(لا - ۱)^{۲}}$ + $\frac{۳}{۱۶}$ ($\frac{۱}{لا + ۱}$ + $\frac{۱}{لا - ۱}$ + لوک $\frac{لا - ۱}{لا + ۱}$)

۷۔ - $\frac{۱}{۴}$ $\frac{۱}{(لا^{۲} - ۱)^{۲}}$ ۸۔ $\frac{۲}{۳}$ لوک (لا + ۱) + $\frac{۱}{۶}$ لوک (لا^{۲} - لا + ۱) + $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ مس$^{-۱}$ $\frac{۲لا - ۱}{\sqrt{۳}}$

۹۔ $\frac{۱}{۳}$ لا^{۳} - $\frac{۱}{۳}$ مس$^{-۱}$ لا^{۳}

۱۰۔ لا + لوک (لا^{۲} - لا + ۱) + $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ مس$^{-۱}$ $\frac{۲لا - ۱}{\sqrt{۳}}$

۱۱۔ $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ مس$^{-۱}$ $\frac{لا}{\sqrt{۲}}$ + $\frac{۱}{۶}$ لوک $\frac{لا - ۱}{لا + ۱}$

۱۲۔ $\frac{۱}{ا^{۲} - ب^{۲}}$ ($\frac{۱}{ب}$ مس$^{-۱}$ $\frac{لا}{ب}$ - $\frac{۱}{ا}$ مس$^{-۱}$ $\frac{لا}{ا}$)

۱۳۔ $\frac{۱}{۲(ا^{۲} - ب^{۲})}$ لوک $\frac{لا^{۲} + ب^{۲}}{لا^{۲} + ا^{۲}}$ ۱۴۔ $\frac{۱}{ا^{۲} - ب^{۲}}$ (ا مس$^{-۱}$ $\frac{لا}{ا}$ - ب مس$^{-۱}$ $\frac{لا}{ب}$)

۱۵۔ $\frac{۱}{۴}$ لوک (لا - ۱) - $\frac{۱}{۸}$ لوک (لا^{۲} + ۱) - $\frac{۱}{۲}$ مس$^{-۱}$ لا + $\frac{۱}{۴}$ $\frac{۱ - لا}{لا^{۲} + ۱}$

۱۶۔ $\frac{۱}{۴\sqrt{۲}}$ لوک $\frac{لا^{۲} + \sqrt{۲}لا + ۱}{لا^{۲} - \sqrt{۲}لا + ۱}$ + $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$ مس$^{-۱}$ (لا$\sqrt{۲}$ + ۱) + $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$ مس$^{-۱}$ (لا$\sqrt{۲}$ - ۱)

۱۷- $\frac{۵}{۱۶}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{لا}+۱}{۲}+\frac{۱}{\text{لا}^{۲}+۲\text{لا}+۵}-\frac{۳}{۸}\,\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}^{۲}+۲\text{لا}+۵}$

۱۸- $-\frac{۱}{۳\text{ب}\,\text{لا}^{۳}}+\frac{\text{ا}}{۲\text{ب}^{۲}\,\text{لا}^{۲}}-\frac{\text{ا}^{۲}}{\text{ب}^{۳}\,\text{لا}}+\frac{\text{ا}^{۳}}{\text{ب}^{۴}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{ا}\,\text{لا}+\text{ب}}{\text{لا}}$

۱۹- $\frac{۱}{۱۲}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{۳\,\text{جب}\,\text{لا}}{۴}$ ۲۰- $\frac{۱}{۱۲}\,\text{لوک}\,\frac{۲+\text{جم}\,\text{لا}}{۲-\text{جم}\,\text{لا}}+\frac{۱}{۶}\,\text{لوک}\,\frac{۱-\text{جم}\,\text{لا}}{۱+\text{جم}\,\text{لا}}$

۲۱- $-\frac{۱}{۸}\,\frac{\text{لا}+۴}{(\text{لا}^{۲}+۴\text{لا}+۶)^{۲}}-\frac{۳}{۳۲}\,\frac{\text{لا}+۲}{\text{لا}^{۲}+۴\text{لا}+۶}-\frac{۳\sqrt{۲}}{۶۴}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{لا}+۲}{\sqrt{۲}}$

۲۲- $\frac{۱}{۲\text{ا}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}^{۲}-\text{ا}\,\text{لا}+\text{ا}^{۲}}{\text{لا}^{۲}+\text{ا}\,\text{لا}+\text{ا}^{۲}}$

۲۳- $\frac{۱}{۲۵}\,\text{لوک}\,(\text{لا}+۱)+\frac{۱}{۱۵۰}\,\text{لوک}\,(\text{لا}^{۲}+۴)-\frac{۲}{۷۵}\,\text{لوک}\,(۴\text{لا}^{۲}+۱)$

$+\frac{۸}{۷۵}\,\text{مس}^{-۱}\,۲\text{لا}-\frac{۱}{۱۵۰}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{۱}{۲}\,\text{لا}$

۲۴- $-\frac{۱}{\text{لا}}-\frac{۱}{۲}\,\frac{\text{لا}}{۱+\text{لا}^{۲}}-\frac{۳}{۲}\,\text{مس}^{-۱}\,\text{لا}$

۲۵- $\frac{۱}{(\text{ا}-\text{ب})^{\text{م}+\text{ن}-۱}}\int\left(\frac{۱}{\text{ع}}-۱\right)^{\text{م}+\text{ن}-۲}\,\text{ء}\text{ع}$

۲۶- $۲\sqrt{\text{لا}}-۲\,\text{مس}^{-۱}\sqrt{\text{لا}}$ ۲۷- $۲\text{لا}^{\frac{۱}{۲}}-۳\text{لا}^{\frac{۱}{۳}}+۶\text{لا}^{\frac{۱}{۶}}-۶\,\text{لوک}\,(۱+\text{لا}^{\frac{۱}{۶}})$

۲۸- $۲\sqrt{\text{لا}-۱}\left\{\text{لا}+\frac{۳}{۵}(\text{لا}-۱)^{۲}+\frac{۱}{۷}(\text{لا}-۱)^{۳}\right\}$

۲۹- $\frac{۲}{\text{ب}^{۲}}\,\frac{۲\text{ا}+\text{ب}\,\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}+\text{ب}\,\text{لا}}}$ ۳۰- $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{لا}\sqrt{۲}}{\sqrt{۱-\text{لا}^{۲}}}$

۳۱- $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{لا}\sqrt{۲}}{\sqrt{۱+\text{لا}^{۲}}}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\,\text{لوک}\,\frac{\sqrt{\text{لا}^{۲}+۱}+\text{لا}\sqrt{۲}}{\sqrt{\text{لا}^{۲}+۱}-\text{لا}\sqrt{۲}}$

۳۲- $\frac{\text{لا}^2}{2\text{ا}} - \frac{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}}}{2\text{ا}} + \frac{1}{2}\,\text{لوک}\left(\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}}\right)$

۳۳- $\frac{1}{\text{ب}^2}\sqrt{\text{ا}+\text{ب}\,\text{لا}^2}\left\{\frac{1}{5}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{لا}^2)^2 - \frac{1}{3}\text{ا}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{لا}^2)\right\}$

۳۴- $\frac{4}{25}\left(1+\text{لا}^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{15}\left(1+\text{لا}^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}$

۳۵- $\frac{(2\text{لا}^2-1)\sqrt{1+\text{لا}^2}}{3\text{لا}^3}$ ۳۶- $\frac{-(\text{ا}-\text{لا})^{\frac{3}{2}}}{(\text{ا}+\text{لا})^{\frac{1}{2}}}$

۳۷- $\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{لوک}\,\frac{1+\text{مس}\,\text{لا}-\sqrt{2\,\text{مس}\,\text{لا}}}{1+\text{مس}\,\text{لا}+\sqrt{2\,\text{مس}\,\text{لا}}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{مس}^{-1}\left(\sqrt{2\,\text{مس}\,\text{لا}}-1\right)$

$+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{مس}^{-1}\left(\sqrt{2\,\text{مس}\,\text{لا}}+1\right)$

باب دوم

مشق ۵، صفحہ ۶۶

۱- $\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}$ ۲- $\frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}$ ۳- π

۴- $\frac{3\pi}{16\text{ا}^5}$ ۵- $\frac{5\pi\text{ا}^3}{16}$ ۶- $\pi\text{ا}$

۷- π ۸- $\frac{\pi(\text{ب}-\text{ا})^2}{8}$ ۹- $\frac{\pi}{\sqrt{\text{ا}^2-\text{ب}^2}}$

۱۰- $\frac{\pi}{2\text{ا}\text{ب}}$ ۱۱- $\frac{\pi(\text{ا}^2+\text{ب}^2)}{4\text{ا}^3\text{ب}^3}$

۱۲۔ (ز-س‌تا ز)/ز۳ ۱۳۔ $\frac{1}{2z^2}\sqrt{1+z^2}-\frac{1}{2z^2}$ لوک (ز + $\sqrt{1+z^2}$)

۱۴۔ صفر ۱۵۔ ۱ ۱۶۔ $-\frac{1}{9}$

۱۸۔ ن ۱۹۔ $\frac{\pi^2}{4}$ ۲۰۔ $\frac{2\pi}{\sqrt{1-z^2}}$ س‌تا $\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$

مشق ۶ صفحہ ۷۶

۱۔ ۲ π ا ھ۲، $\frac{8\pi}{3}$ $\sqrt{a}$ [(ا + ھ)$^{\frac{3}{2}}$ - ا$^{\frac{3}{2}}$]

۲۔ π ھ^2 ا ب ج ۳۔ $\frac{4}{3}$ ا ب، $\frac{4}{15}$ π ا ب^2

۴۔ $\frac{\pi (b-a)^2 (b+a)}{8c}$ ۵۔ $\frac{\pi (a^2+b^2)}{2}$

۷۔ $\frac{ab}{30}$ ۹۔ $\frac{a^2(\pi-4)}{2}$، $\frac{a^2(\pi+4)}{2}$

۱۰۔ ۳ π ا^2، ۲ π^2 ا^3 ۱۱۔ π ا^2، $\frac{\pi^2 a^3}{2}$

۱۲۔ $\frac{a^2(2-\pi)}{2}$ ۱۳۔ $\frac{\pi a^3(3\pi-10)}{6}$ ۱۴۔ ۲

۱۸۔ ۳ π ا^2، ۸ ا (۱ - $\frac{\text{جم عا}}{2}$)، ۵ π^2 ا^3، π^2 ا^3

۱۹۔ $\frac{abc}{6}$ ۲۰۔ $\frac{\pi a c^2}{2}$

۲۲۔ $\frac{l^2}{4}$ (س $\frac{عا}{2}$ + $\frac{1}{3}$ س^3 $\frac{عا}{2}$)،

$$\frac{\text{ل ز}^{2}}{2(1-\text{ز}^{2})}\left\{-\frac{\text{جب عا}}{1+\text{ز جم عا}}+\frac{2}{\text{ز}\sqrt{1-\text{ز}^{2}}}\,\text{سس}^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\text{ز}}{1+\text{ز}}}\,\text{سس}\frac{\text{عا}}{2}\right)\right\}$$

۲۳- $\frac{\pi\,\text{ا}^{2}}{12}$ ۲۴- $\frac{\pi\,\text{ا}^{2}}{4}$ ، $\frac{\pi\,\text{ا}^{2}}{2}$

۲۵- $(3-2\,\text{لوک}\,2)\frac{\text{ا}^{2}}{2}$ ۲۶- $\frac{(\pi-2)\text{ا}^{2}}{2}$

مشق ۷ صفحہ ۹۰

۳- $\frac{12\,\text{ا}^{2}}{3}$ ۶- 11π ۹- $\frac{\pi}{2\,\text{م ن}}\left(\frac{\text{ا}^{2}}{\text{م}^{2}}+\frac{\text{ب}^{2}}{\text{ن}^{2}}\right)$

باب سوم

مشق ۹ صفحہ ۱۳۰

۱- (۱) $(\text{ا}_1^2+\text{ا}_2^2+\text{ا}_3^2+\ldots+\text{ا}_{\text{ن}}^2)/2$

(۲) $(\text{ب}_1^2+\text{ب}_2^2+\text{ب}_3^2+\ldots+\text{ب}_{\text{ن}}^2)/2$

۲- $(\text{ا}_1\,\text{ا}_1+\text{ب}_1\,\text{ح}_1+\text{ا}_2\,\text{ا}_2+\text{ب}_2\,\text{ح}_2)/2$

۷- (۱) $\frac{3\,\text{ھ}}{5}$ ، $\frac{3\,\text{ک}}{8}$ (۲) $\frac{2\,\text{ھ}}{5}$ ، $\frac{\text{ک}}{2}$

(۳) $\frac{2}{3}\,\text{ا جب}^{3}\text{عا}/(\text{عا}-\text{جب عا جم عا})$ ۔

(۴) $\text{لا}=\frac{3}{8}\text{ا}(1+\text{جم عا})$ (۵) $\frac{5\,\text{ا}}{6}$ ۔

۱۰- (۱) $\frac{5\,\text{م ا}^{2}}{4}$ (۲) $\frac{7\,\text{م ا}^{2}}{5}$ (۳) $\frac{\text{م ف}^{2}}{6}$

(۴) $\frac{۳ م ر^۲}{۱۰}$ ، $\frac{۳ م (ر^۲ + ۴ ف^۲)}{۲۰}$

باب ہفتم

مشق ۱۴، صفحہ ۲۴۴

۶- (ا-ا ع)(ا-ب ع)-ھ^۲ع^۲=۰، ع، ع مخروطی ا لا^۲+۲ھ لا ول+ب ول^۲=۱ کے نیم محوروں کے مربعے ہیں۔

۷- $\frac{ل^۲ ا^۲}{ا^۲ - ع} + \frac{م^۲ ب^۲}{ب^۲ - ع} + \frac{ن^۲ ج^۲}{ج^۲ - ع} = ۰$، ع، ع اس مخروطی کے نیم محوروں کے مربعے ہیں جہاں سطح مستوی ناقص نما کو قطع کرتی ہے۔

مشق ۱۵، صفحہ ۲۵۴

۱- $\frac{۱}{۲}$ ن (ن+۱) ۲- $\frac{۱}{۲ ا}$ ۳- ا

۴- (ا + ا + ... + ا)/ن ۵- ∞ اور ۱

۶- ۱- اور ۱- ۷- ۲ اور ۲ ۸- ۱ اور ۱-

۹- $\frac{ا}{ب}$ اور $\frac{۲ ا}{ب}$ ۱۰- $\frac{۱}{۲}$

۱۱- $\frac{\text{لوک ا - لوک ب}}{\text{لوک ج - لوک گ}}$ ۱۲- ۱ اور ۱

۱۳- ا ا ..... ا ۱۴- $\frac{۱}{۳}$ اور ۱

۱۵- و^(ا/۲ب^۲) اور صفر ۱۶- * ($\frac{ا}{ب}$)

باب ہشتم

مشق ۱۷، صفحہ ۲۸۴

۱- ما - لا = م (۱ + لا ما) جہاں م مستقل ہے۔

۲- جب^-۱ ما - جب^-۱ لا = م   ۳- م ما = (۱ - م ما)(لا + م)

۴- لا ما^۲ = م (۲ ما + لا)   ۵- ما = م لا^۲ - ۱/۴م

۶- (۲ لا - ۳ ما + ۱)^۲ (لا + ۲ ما - ۲) = م

۷- لا = م + ∫ (عا + ج)/ر ء عا جہاں ر = (۱ + م ب) عا + ۱ ج + ب گ

۸- ب ما^۲ + ۲ ا لا ما - ف لا^۲ - ۲ گ لا + ۲ ج ما = م

۹- ما = (لا + م) قو^لا   ۱۰- ما = ۱/۲ لا + م/لا

۱۱- ما = (جب^-۱ لا + م)/√(۱ - لا^۲)   ۱۲- (۱ + لا^۲) ما = ۱/۳ لا^۳ + م

۱۳- ما = م قو^(-۱لا) + {۱ جم (ب لا + ج) + ب جب (ب لا + ج)}/(۱^۲ + ب^۲)

۱۴- ۱/ما = ۵/۲ لا^۳ + م لا^۵   ۱۵- لا/ما = م + لوک لا

۱۶- لا^۴ + ۲ لا^۲ ما^۲ - ما^۴ - ۲ ا^۲ لا^۲ - ۲ ب^۲ ما^۲ = م

۱۷- (ما - م لا)^۲ = ا^۲ م^۲ + ب^۲ ، لا^۲/ا^۲ + ما^۲/ب^۲ = ۱

۱۸- ما = م لا + م^۲ ، ۲۷ ما^۲ + ۴ لا^۳ = ۰   ۱۹- ما^۲ = م لا^۲ + م^۲

۲۰- ما = ا و^(د لا) + ب و^(ب لا)　　۲۱- ما = ا + ب لا + ج و^(۲ لا) و^(۳ لا)

۲۲- ما = و^(۳ لا) (ا جم لا + ب جب لا) + (۲ جم ۲ لا + جب ۲ لا) / ۳۰

۲۳- ما = ا و^(لا) + ب و^(۲ لا) - لا و^(لا)

۲۴- ما = ا جم ن لا + ب جب ن لا + لا (ا جب ن لا - ب جم ن لا) / ۲ ن

۲۵- ما = ا و^(ن لا) + ب و^(-ن لا) + لا (ا و^(ن لا) - ب و^(-ن لا)) / ۲ ن

۲۶- ما = و^(۳ لا) (ا جم ۲ لا + ب جب ۲ لا) + (۱۶۹ لا^۲ + ۱۵۶ لا + ۴۶) / ۲۱۹۷

۲۷- ما = (ا + ب لا) جم لا + (ع + ف لا) جب لا

۲۸- لا = و^(۶ ت) (ا جم ت + ب جب ت)

ما = و^(۶ ت) { (ا - ب) جم ت + (ا + ب) جب ت }

۲۹- لا = ا جم ت + ب جب ت ، ما = ½ (ب - ۳ ا) جم ت - ½ (ا + ۳ ب) جب ت

۳۰- لا = ا و^(ت) + ب و^(-۵ ت) - ۲/۵ ت - ۱۳/۲۵ + ۳/۷ و^(۲ ت)

ما = ا و^(ت) + ب و^(-۵ ت) - ۳/۵ ت - ۱۲/۲۵ + ۴/۷ و^(۲ ت)

۳۱- لا = (ا + ب ت) و^(ت) + (ع + ف ت) و^(-ت)

ما = ½ (ب - ا - ب ت) و^(ت) - ½ (ع + ف + ف ت) و^(-ت)

۳۲- لا = و ت جم عہ ، ما = و ت جب عہ - ½ ج ت^۲

۳۳- لا = ا جم ن ت ، ما = ب جب ن ت جہاں ن = √(ہ مہ)

۳۴- د لا / د ت = - √(۲ مہ) √(۱/لا - ۱/ر) ، ت = √(ر^۳ / ۲ مہ) (ط + جب ط جم ط) جہاں لا = ر جم^۲ ط

۳۵ - (۱) ب ما = ۱/۲۴ و (لا^۴ - ۲ ل لا^۳ + ل^۳ لا)

(۲) ب ما = ۱/۲۴ و لا^۲ (ل - لا)^۲

(۳) ب ما = ۱/۲۴ و لا^۲ (لا^۲ - ۴ ل لا + ۶ ل^۲)

۳۸ - ما = (ا جم ن لا + ب جب ن لا) / لا ، ما = ب (جب ن لا) / لا

۳۹ - (۱) ما = ا + ب/لا + لا^۲　(۲) ما = ا لا^۲ + ب لا^۲ + ج لا - لا^۲ لوک لا

(۳) ما = ا لا^۲ + ب/لا - ۱/۲ لا

۴۰ - ما = ا جم (ن لوک لا) + ب جب (ن لوک لا)

۴۱ - ما = ا ر + ب/ر^۲　　۴۲ - و = ا لوک ر + ب

۴۳ - (عف ما)^۲ + ۱ = ۴ ا^۲ / (م - ما^۲)^۲

۴۵ - ما = ۱/۸ لا^۳ + ا لا + ب/لا

باب نہم

مشق ۱۸ صفحہ ۳۰۹

۳ - (۱) لا > ۱ ، ما = π/۲ ؛ ۰ > لا > ۱ ، ما = π لا/۲ ؛ -۱ > لا > ۰ ، ما = π لا/۲

لا > -۱ ، ما = - π/۲

(۲) لا > ۲ ، ما = π/۲ ؛ ۰ > لا > ۲ ، ما = π (۴ لا - لا^۲) / ۸

-۲ > لا > ۰ ، ما = π (۴ لا + لا^۲) / ۸ ؛ لا > -۲ ، ما = - π/۲

۲۰- $\text{لا} > \text{۲ر}$، $\text{ما} = \frac{\text{۳}\pi}{\text{۲}}$ ؛ $\text{۰} < \text{لا} < \text{۲ر}$، $\text{ما} = \frac{\pi}{\text{۲}}$ ؛

$-\text{۲ر} < \text{لا} < \text{۰}$، $\text{ما} = -\frac{\pi}{\text{۲}}$ ؛ $\text{لا} < -\text{۲ر}$، $\text{ما} = -\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲}}$

باب دہم

مشق ۲۰ صفحہ ۳۸۱

۱- $$\frac{\text{۴}}{\pi}\left(\frac{\text{جب لا}}{\text{۱}} + \frac{\text{جب ۳لا}}{\text{۳}} + \frac{\text{جب ۵لا}}{\text{۵}} + \cdots\right)$$

۲- $$\frac{\text{۴ج}}{\pi}\left(\text{جب}\frac{\pi\text{لا}}{\text{ر}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\,\text{جب}\frac{\text{۳}\pi\text{لا}}{\text{ر}} + \frac{\text{۱}}{\text{۵}}\,\text{جب}\frac{\text{۵}\pi\text{لا}}{\text{ر}} + \cdots\right)$$

۳- $$\frac{\text{۳}\pi}{\text{۸}} + \frac{\text{۲}}{\pi}\left(\frac{\text{جم لا}}{\text{۱}^{\text{۲}}} - \frac{\text{جم ۲لا}}{\text{۲}^{\text{۲}}} + \frac{\text{جم ۳لا}}{\text{۳}^{\text{۲}}} - \cdots\right)$$
$$-\frac{\text{۲}}{\pi}\left(\frac{\text{جم ۲لا}}{\text{۲}^{\text{۲}}} - \frac{\text{جم ۴لا}}{\text{۴}^{\text{۲}}} + \frac{\text{جم ۶لا}}{\text{۶}^{\text{۲}}} - \cdots\right)$$

۴- $$\frac{\text{۳ر}}{\text{۸}} + \frac{\text{۲ر}}{\pi^{\text{۲}}}\left(\frac{\text{۱}}{\text{۱}^{\text{۲}}}\,\text{جم}\frac{\pi\text{لا}}{\text{ر}} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\text{۲}}}\,\text{جم}\frac{\text{۲}\pi\text{لا}}{\text{ر}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}^{\text{۲}}}\,\text{جم}\frac{\text{۳}\pi\text{لا}}{\text{ر}} - \cdots\right)$$
$$-\frac{\text{۲ر}}{\pi^{\text{۲}}}\left(\frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\text{۲}}}\,\text{جم}\frac{\text{۲}\pi\text{لا}}{\text{ر}} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}^{\text{۲}}}\,\text{جم}\frac{\text{۴}\pi\text{لا}}{\text{ر}} + \frac{\text{۱}}{\text{۶}^{\text{۲}}}\,\text{جم}\frac{\text{۶}\pi\text{لا}}{\text{ر}} - \cdots\right)$$

۵- $$\frac{\text{۳ر}}{\text{۲}} - \frac{\text{۴ر}}{\pi^{\text{۲}}}\left(\text{جم}\frac{\pi\text{لا}}{\text{ر}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}^{\text{۲}}}\,\text{جم}\frac{\text{۳}\pi\text{لا}}{\text{ر}} + \frac{\text{۱}}{\text{۵}^{\text{۲}}}\,\text{جم}\frac{\text{۵}\pi\text{لا}}{\text{ر}} + \cdots\right)$$

۶- $$\frac{\text{رج}}{\text{۴}} - \frac{\text{۲رج}}{\pi^{\text{۲}}}\left(\text{جم}\frac{\pi\text{لا}}{\text{ر}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}^{\text{۲}}}\,\text{جم}\frac{\text{۳}\pi\text{لا}}{\text{ر}} + \frac{\text{۱}}{\text{۵}^{\text{۲}}}\,\text{جم}\frac{\text{۵}\pi\text{لا}}{\text{ر}} + \cdots\right)$$
$$+\frac{\text{رج}}{\pi}\left(\text{جب}\frac{\pi\text{لا}}{\text{ر}} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{جب}\frac{\text{۲}\pi\text{لا}}{\text{ر}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\,\text{جب}\frac{\text{۳}\pi\text{لا}}{\text{ر}} - \cdots\right)$$

۷— $\frac{۲}{\pi} - \frac{۴}{\pi}\left(\frac{\text{جم ۲لا}}{۱\times۳} + \frac{\text{جم ۴لا}}{۳\times۵} + \frac{\text{جم ۶لا}}{۵\times۷} + \cdots\cdots\right)$

۸— $\frac{\text{ل}^۲}{۱۲} + \frac{۲\text{ل}^۲}{\pi^۲}\left(\frac{۱}{۲^۲}\text{جم}\frac{۲\pi\text{لا}}{\text{ل}} - \frac{۱}{۴^۲}\text{جم}\frac{۴\pi\text{لا}}{\text{ل}} + \frac{۱}{۶^۲}\text{جم}\frac{۶\pi\text{لا}}{\text{ل}} - \cdots\right)$

$+ \frac{۴\text{ل}^۲}{\pi^۳}\left(\text{جم}\frac{\pi\text{لا}}{\text{ل}} - \frac{۱}{۳^۳}\text{جم}\frac{۳\pi\text{لا}}{\text{ل}} + \frac{۱}{۵^۳}\text{جم}\frac{۵\pi\text{لا}}{\text{ل}} - \cdots\cdots\right)$

۹— $۱ + \frac{۱}{۲}\text{جم لا} - ۲\left(\frac{\text{جم ۲لا}}{۱\times۳} + \frac{\text{جم ۳لا}}{۲\times۴} + \frac{\text{جم ۴لا}}{۳\times۵} + \cdots\cdots\right)$

۱۰— $\frac{۲\text{ب ج}^۲}{\pi^۲\text{ل}(\text{ج}-\text{ل})}\left\{\text{جب}\frac{\pi\text{ل}}{\text{ج}}\,\text{جب}\frac{\pi\text{لا}}{\text{ج}} + \frac{۱}{۲^۲}\text{جب}\frac{۲\pi\text{ل}}{\text{ج}}\,\text{جب}\frac{۲\pi\text{لا}}{\text{ج}} + \cdots\right)$

۱۲— (۱) $\frac{\text{و}^{\pi\text{ل}}-۱}{\pi\text{ل}} + \frac{۲\text{ل}}{\pi}\sum_{\text{ن}=۱}^{\infty}\frac{\text{و}^{\pi\text{ل}}\,\text{جم ن}\pi-۱}{\text{ل}^۲+\text{ن}^۲}\,\text{جم ن لا}$

(۲) $\frac{۲}{\pi}\sum_{\text{ن}=۱}^{\infty}\frac{\text{ن}}{\text{ل}^۲+\text{ن}^۲}\left(۱-\text{و}^{\pi\text{ل}}\,\text{جم ن}\pi\right)\text{جب ن لا}$

۱۳— اگر سلسلہ یکساں طور پر مستدق ہو جبکہ لا وقفہ (۰، ل) کے اندر ہو تو یہ بآسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ ہر لا کے لئے یہ یکساں طور پر مستدق ہے اور ایک جفت دوری تفاعل مثلاً فہ (لا) کو تعبیر کرتا ہے جس کا دور ۲ ل ہے۔ فہ (لا) کو وقفہ (۰، ل) کے درمیان جیب التمام سلسلہ میں پھیلاؤ۔ سر معلوم کرنے کے لئے ہم رقم بر رقم تکمیل کر سکتے ہیں۔ جیب التمام سلسلہ فہ (لا) کو ہر لا کے لئے تعبیر کرتا ہے۔

تمت

Abscissa	فصلہ
Absolute convergence	مطلق استدقاق
Adiabatic	حرناگذار
Amplitude	حیطہ، سعت
Anchor ring	لنگر چھلا
Approximation	تقرب
Arbitrary constant	اختیاری مستقل
Argument	وجہ (دلیل)
Asymptote	متقارب
Battery	مورچہ
Bending of beams	شہتیروں کا جھکاؤ
Bessel's function	بیسل کا تفاعل
Calculus	احصا
Calculus of variations	احصاء تغیرات

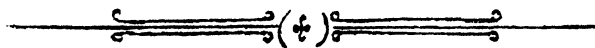
Canonical form	صورت آئینی
Cardioid	خط صنوبری
Catenary	زنجیرہ
Circuit	حلقہ، دورہ
Clairaut's form	کلیروی صورت
Closed curves	بند منحنی
Commutative Law	قانون تبدیلی (مبادلہ)
Complementary function	متمم تفاعل
Complete integral (differential)	پورا تکملہ (تفرقہ)
Complete primitive	کامل ابتدائی
Concavity	تقعر، گہراؤ
Conditionally convergent	شرطاً مستدق
Conocuneus	مخروط فانہ
Conservative system of forces	قوتوں کا نظام بقائی
Continuity	تسلسل
Convergent	مستدق
Convexity	تحدب، ابھار
Coordinate	محدد
Current coordinates	رواں محدد
Curvature	انحنا
Curve tracing	منحنیات کی ترسیم
Cusp	قرن
Cycloid	خط تدویر
Deflection	انصراف
Definite integral	محدود تکملہ

Degree	درجہ
Derivative	مشتق
Differential	تفرقہ، تفرقی
Differential Calculus (equations)	تفرقی احصا (مساواتیں)
Differentiate	تفرق کرنا
Differentiation	تفرق
Dirichlet's Integral	ڈرشلے کا تکملہ
Discontinuity	عدم تسلسل
Discontinuous	غیر مسلسل
Discriminant	ممیز
Distributive law	قانون تقسیمی
Double Integral	دوہرا تکملہ
Eccentric anomaly	خروج المرکز بے قاعدگی
Eccentricity	خروج المرکز
Electromotive force	قوت محرکۂ برق
Electron	برقیہ
Eliminant	حاصل اسقاط
Ellipse	قطع ناقص
Ellipsoid	ناقص نما
Empirical function	امتحانی تفاعل
Entropy	ناکارگی
Envelope	لفاف
Epicycloid	بر تدویر
Equiangular spiral	مساوی الزوایہ لولبی
Equilateral Hyperbola	قائم قطع زائد (قائم زائد)

Exact Equation	ٹھیک، حاضر یا تیار مساوات
Evolute	پرجیبہ
Explicit (function)	تصریحی (تفاعل)
Flexural rigidity	خمیدگی کی اُستواری
Fourier's series	فوریر یا فورئے کا سلسلہ
Fluxion	روانی
Flux (fluent)	بہاؤ (بہنے والا)
Folium of Decartes	کارٹیزی پتا
Gamma function	گاما تفاعل
Generalised integral	تعمیمی تکملہ
Gradient	ڈُھال
Gyroscope	گردش نما
Gyrostatic Pendulum	گردشی رقاص
Harmonic curve	موسیقی منحنی
Hyperbola	قطع زائد
Hyperbolic substitution	زائدی ابدال
Hypocycloid	در تدویر
Impendance	مقاومت
Indefinite integral	نامحدود تکملہ
Indeterminate forms	غیر معین صورتیں
Inductance	امالیت
Inertia	جمود
Infinite limits	لامتناہی حدود
Infinite series	لامتناہی سلسلے
Infinite simal	صغاری (صغاریات)

Inflexion	انعطاف
Integral	تکملہ، تکملی
Integral Calculus	تکملی احصا
Integrand	تکمل
Integrate	تکمل کرنا
Integration	تکمل
Integrating factor	تکمل جزو ضربی
Integration by parts	تکمل بالحصص
Integraph	تکملی مرسام
Intrinsic equation	ذاتی مساوات
Involute	درپیچہ
Irrational function	غیر منطق تفاعل
Irreversible (process)	غیر انقلاب پذیر (عمل)
Lemniscate	آشیرن کی شکل کا منحنی
Linear Equations	خطی مساواتیں
Lituus	عصا کی شکل کا منحنی
Loop	حلقہ
Lower Limit	نچلی حد
Maclaurin's theorem	مکلارن کا مسئلہ
Mean value Theorem	اوسط قیمت کا مسئلہ
Moment of Inertia	جمود کا معیار
Monotonic	یکرنگ
Non Convergent	غیر مستدق
Node	عقدہ
Octant	ثمن

Operator	عامل
Order	رتبہ
Ordinary (differential equations)	معمولی (تفرقی مساواتیں)
Ordinate	معین
Parabola	قطع مکافی
Paraboloid	مکافی نما
Parallel curves	متوازی منحنی
Parameter	متبدل
Partial (differentiation, differential equations)	جزوی (تفرق، تفرقی مساواتیں)
Partial fractions	جزوی کسور
Partieular integral	خاص تکملہ
Pedaicurve	پائین منحنی
Planimeter	سطح پیما
Potential	قوہ
Power Series	قوتی سلسلے
Primitive	ابتدائی
Prolate spheroid	لمبوترا کرہ نما
Quadratic function	دو درجی تفاعل
Range of integration	تکمل کی وسعت یا سعت
Rate	شرح
Rectification	تخطیط
Raduction formulæ	تحویلی ضابطے
Remainder	باقی
Repulsion	دفع

Rigid dynamics	استواری حرکیات
Self inductance	ذاتی امالیت
Semicubical Parabola	نیم کعبی مکافی
Simultaneous equations	ہمزاد مساواتیں
Singular solution	نادر حل
Space rate	مکانی شرح
Spiral	لولب، لولبی
Standard forms	معیاری صورتیں
Stationary value	قائم قیمت
Steps of a (moving point)	قدم (متحرک نقطہ کے)
Successive (diffentiation	متواتر (تفرق
reduction	تحویل)
Taylor's Theorem	ٹیلر کا مسئلہ
Time rate	زمانی شرح
Total derivative	پورا مشتق
Transcendental	ماورائی
Triple Integral	تہرا تکملہ
Turning (point, value)	موڑ پر (کا نقطہ، کی قیمت)
Upper limit	اوپر کی حد
Uniform convergence	یکساں استدقاق
Unlimited (integral, interval)	بلاحد (تکملہ، وقفہ)

[ترقیم جو اس کتاب میں استعمال کی گئی ہے]

$A, B, C, D,$	ا، ب، ج، د، .....
a,b,c,d,	ا، ب، ج، د، ......
x, y, z	لا، ما، ی
X Y Z	لا، ما، ے
α, β, γ	عہ، بہ، جہ
l, m, n	ل، م، ن
θ, ϕ, ψ	طہ، فہ، سا
ξ, η, ζ	ضا، عا، ظا
λ, μ, ν	لہ، مہ، نہ
$f(x)$	ف (لا)
$F(x)$	فا (لا)
$\phi(x)$	فہ (لا)
$\sin x$	جب لا
$\cos x$	جم لا
$\tan x$	مس لا
$\cot x$	ہم لا
$\sec x$	قط لا
$\operatorname{cosec} x$	قم لا
$\sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \tan^{-1}x,$	جب$^{-1}$ لا، جم$^{-1}$ لا، مس$^{-1}$ لا
$\cot^{-1}x, \sec^{-1}x, \operatorname{cosec}^{-1}x,$	ہم$^{-1}$ لا، قط$^{-1}$ لا، قم$^{-1}$ لا

Sine hyperbolic (Sinh x)	زائدی جیب (جبزلا)
Sinh x, Cosh x, Tanh x	جبزلا، جمزلا، مسزلا
Coth x, Sech x, Cosech x	ممزلا، قطزلا، قمزلا
$\text{Sinh}^{-1}x$, $\text{Cosh}^{-1}x$, $\text{Tanh}^{-1}x$	جبز$^{-1}$لا، جمز$^{-1}$لا، مسز$^{-1}$لا
$\text{Coth}^{-1}x$, $\text{Sech}^{-1}x$, $\text{Cosech}^{-1}x$	ممز$^{-1}$لا، قطز$^{-1}$لا، قمز$^{-1}$لا
$\cdot 123\dot{5}\dot{7}$	٫۱۲۳۵۷
π	π
Exponent (e)	قوت نما (قو) یا صرف (و)
e^x	قولا
a^x	الا
$\log_e x$	لوگ ولا [یا صرف لوگ لا]
$\log_{10} x$	لوگ۱۰ لا
ϵ	سر یا صہ
∞	∞
Limit, Lt	انتہا، نہا
Lt $f(x)=A$	نہا ف (لا) = ا
S_{n+1}	س$_{ن+۱}$
S	س
time (t)	وقت (ت)
arc (s)	قوس (س)
differential (d)	فرقی (فر)

اردو	English
تفرقی سر (فرما / فرلا)	differential coefficient $(\frac{dy}{dx})$
فرما / فرلا ، فر۲ما / فرلا۲ ، .... فرن ما / فرلان	$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}$
جزوی تفرقی سر جف / جف لا	Partial differential Coefficient $\frac{\partial}{\partial x}$
جف ما / جف لا ، جف۲ ما / جف لا۲ ، جف۲ ی / جف لا جف ما	$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ....
مف لا، مف ما، مف ی	$\delta x, \delta y, \delta z$
فرلا، فرما، فری	dx , dy , lz
ف (لا)، ف˝ (لا)،	$f'(x), f''(x)$
عامل تفرق (عف)	Operator (D)
عف ما، عف۲ ما	Dy, D^2y
لف۲ ی	$\nabla^2 u$
مجموعہ (م، ∫)	Summation (S, ∫)
∫ ا ب فا(لا) فرلا	$\int_a^b F(x)\,dx$
∫∫ ف(لا، ما) فرلا فرما	$\iint f(x,y)\,dx\,dy$
[عف⁻¹ فا(لا)] ا ب	$\left[D^{-1}F(x)\right]_a^b$
∫ ۰ ∞ ف(لا) فرلا	$\int_0^\infty f(x)\,dx$
گاما تفاعل جا(ن)	Gamma Function $\Gamma(n)$
بیٹا تفاعل با(م، ن)	(Beta Function) $B(m,n)$

English	Urdu
Bessel function $J_r(x)$	بیسل کا تفاعل سجِ ر (لا)
Sum Σ	حاصل جمع مج مجریا ک
$\sum_{h=1}^{\infty} A_h \cos hx$	مجِ ن=۱ ان جم ن لا

y, P, r, y, X', X, θ, و, x, y'

ما، ن ہ، ر، ط، ما، کا، و، لا، ما'، کا'

English	Urdu
Velocities u, v, w	رفتاریں ع، و، ھ
Kinetic energy E	توانائی بالحرکت حا
Work K	کام، ک
Potential V	قوہ، ق
Pressure P	دباؤ، د
Volume V	حجم، ح